

## АНАЛИЗ ПЛАТЕЖЕСПОСОБНОСТИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С УЧЕТОМ ИНВЕСТИРОВАНИЯ В РИСКОВЫЕ АКТИВЫ

В работе построены зависимости вероятности неразорения страховой компании от начального капитала в пуассоновской модели коллективного риска с учетом инвестирования в рискованные и безрисковые активы. Выявлен характер влияния параметров процесса риска на начальный капитал компании при фиксированном уровне неразорения. Построен критерий для выбора стратегии инвестирования в рискованные и безрисковые активы.

**Ключевые слова:** вероятность неразорения, рискованные активы.

Пусть страховая компания инвестирует свободные средства в рискованные активы, цены которого удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$

где  $\mu$  и  $\delta$  – доходность и волатильность цены рискованного актива,

$W_t$  – винеровский процесс.

Одной из важнейших задач страховой компании является задача оценки и обеспечения платежеспособности, под которой понимается положительность процесса риска, эволюция которого, в случае пуассоновского процесса поступления исков и инвестирования средств в рискованные активы, описывается, согласно [1, с. 19], уравнением

$$dY_t = (\mu dt + \sigma dW_t)Y_t + c dt - d\left(\sum_{i=N(t)}^{N(t)} X_i\right),$$

$$Y_0 = u, \quad (1)$$

где  $Y_t$  – капитал страховой компании в момент времени  $t$ ;

$u$  – начальный капитал компании;

$c$  – интенсивность поступления страховых премий;

$N(t)$  – пуассоновский процесс – число поступивших исков за время  $[0, t]$ , с параметром  $\lambda t$ ;

$\{X_i\}$  – размеры выплат по искам страховой компании – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с неизвестной плотностью распределения вероятностей  $f(x)$ .

В качестве показателя платежеспособности возьмем вероятность неразорения,  $\varphi(u) = P\{Y_t \geq 0, Y_0 = u, t \geq 0\}$ , которая, в предположении о пуассоновском процессе поступления исков, может быть найдена [2, с. 419] как решение задачи:

$$\frac{\sigma^2}{2} u^2 \varphi''(u) + (\mu u + c) \varphi'(u) - \lambda \varphi(u) + \lambda \int_0^u \varphi(u-y) f(y) dy = 0,$$

$$\varphi(\infty) = 1, \quad \mu > \sigma^2/2. \quad (2)$$

Случай  $\mu = 0$  и  $\sigma = 0$  соответствует тому, что страховая компания не инвестирует свободные средства; при  $\mu = r > 0, \sigma = 0$  – страховая компания вкладывает свободные средства в безрисковые активы с доходностью  $r$ ; если  $\mu \neq 0, \sigma \neq 0$  – страховая компания вкладывает свободные средства в рискованные активы.

Проанализируем, как влияет инвестирование на зависимость вероятности неразорения страховой компании от размера ее начального капитала.

Предварительно аппроксимировав  $f(x)$ , на основе статистических данных о размерах выплат, с помощью отрезка обобщенного ряда Фурье по системе ортогональных полиномов, нашли численное решение задачи (2):

а) без учета инвестирования ( $\mu = 0; \sigma = 0$ );

б) с инвестированием в безрисковые активы ( $r=0,13$ );

в) с учетом инвестирования в рискованные активы ( $\mu=0,4; \sigma=0,13$ ).

Графики построенных зависимостей (для договоров КАСКО за 2006-08 годы Оренбургского филиала страховой компании, исков/день, тыс. руб./день) представлены на рисунке 1.

По построенным зависимостям можно провести сравнительный анализ стратегии инвестирования для обеспечения заданного уровня неразорения. Так, например, инвестирование в рискованные активы ( $\mu=0,4; \sigma=0,13$ ) позволяет достичь уровня надежности 0,95 при значении начального капитала 300 тыс. руб., при инвестиро-

вании в безрисковые активы ( $r=0,13$ ) уровень не-разорения 0,95 достигается при значении началь-ного капитала 320,1 тыс. руб., а при отсутствии инвестирования требуется 450,6 тыс. руб. Кроме того, анализ показал (рисунок 2), что при значе-ниях начального капитала менее 417 тыс. руб. с точки зрения вероятности неразорения выгод-нее инвестирование в рисковые активы, в про-тивном случае выгоднее инвестирование в без-рисковые активы.

Помимо задачи оценки зависимости веро-ятности неразорения от начального капитала

при фиксированных значениях параметров мо-дели коллективного риска представляет инте-рес оценка зависимости величины необходимо-го начального капитала, гарантирующего за-данный уровень неразорения, от величины рис-ковой надбавки.

Варьируя значение рисковей надбавки, можно оценить скорость поступления премий и построить зависимость вероятности неразо-рения, гарантирующей заданный уровень не-разорения, от рисковей надбавки для случаев с инвестированием и без инвестирования. На

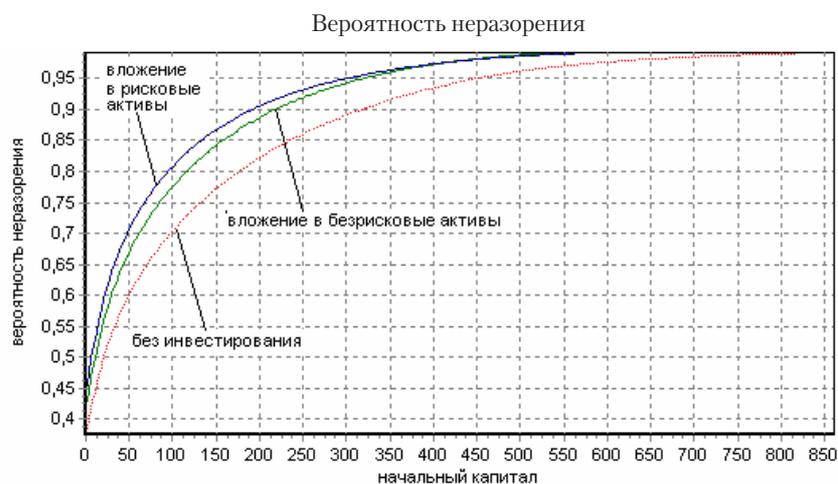


Рисунок 1. Графики зависимости вероятности неразорения от необходимого начального капитала (тыс. руб.), для случаев: а) без инвестирования; б) с инвестированием в безрисковые активы  $r=0,13$ ; в) с инвестированием в рисковые активы,  $\mu=0,4$ ;  $\sigma=0,13$  при  $u \in [0,850]$  тыс. руб.,  $\lambda=3,82$  исков/день,  $c=196,5$  тыс. руб./день.

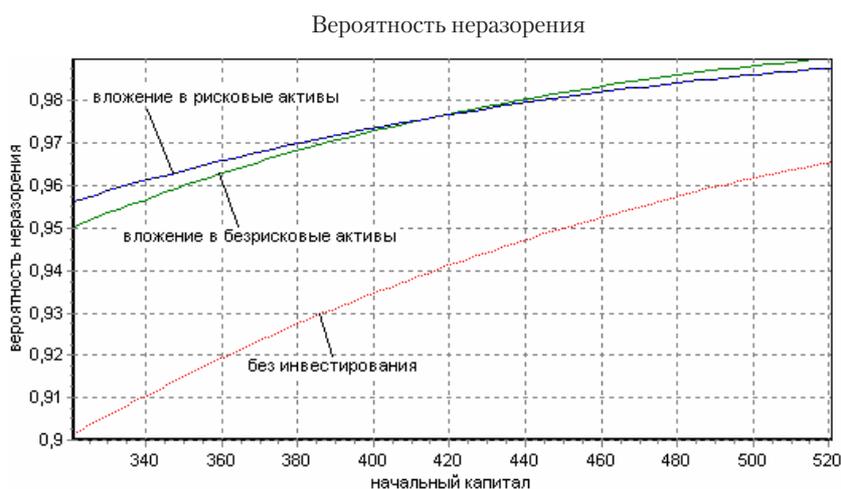


Рисунок 2. Графики зависимости вероятности неразорения от необходимого начального капитала (тыс. руб.) для случаев: а) без инвестирования; б) с инвестированием в безрисковые активы  $r=0,13$ ; в) с инвестированием в рисковые активы  $\mu=0,4$ ;  $\sigma=0,13$  при  $u \in [320,520]$  тыс. руб.,  $\lambda=3,82$  исков/день,  $c=196,5$  тыс. руб./день.

Таблица 1. Значения оценок коэффициентов эластичности величины начального капитала, гарантирующего неразорение с вероятностью 0,95 по различным параметрам процесса риска

Оценка коэффициента эластичности величины начального капитала, гарантирующего вероятность неразорения 0,95	Значение оценки
по значению рисковой надбавки в модели без инвестирования, при рисковой надбавке 0,70	-0,678
по значению рисковой надбавки в модели с инвестированием в безрисковые активы, при рисковой надбавке 0,70	-0,411
по значению рисковой надбавки в модели с инвестированием в рисковые активы, при рисковой надбавке 0,70	-0,381
по значению доходности вложения в безрисковый актив, при $r=0,13$	-0,224
по значению доходности вложения в рисковый актив, при $\mu = 0,4$	-0,589
по значению волатильности вложения в рисковый актив, при $\sigma = 0,13$	0,646

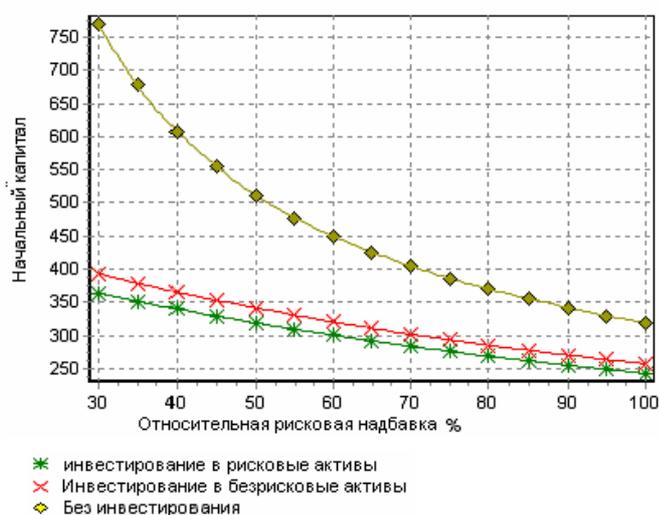


Рисунок 3. Зависимость начального капитала (тыс. руб.), гарантирующего неразорение с вероятностью 0,95, от рисковой надбавки для случаев: а) без инвестирования, б) с инвестированием в безрисковые активы с доходностью 0,13, в) с инвестированием в рисковые активы  $\mu=0,4$ ,  $\sigma=0,13$ , при  $\lambda=3,82$  исков/день.

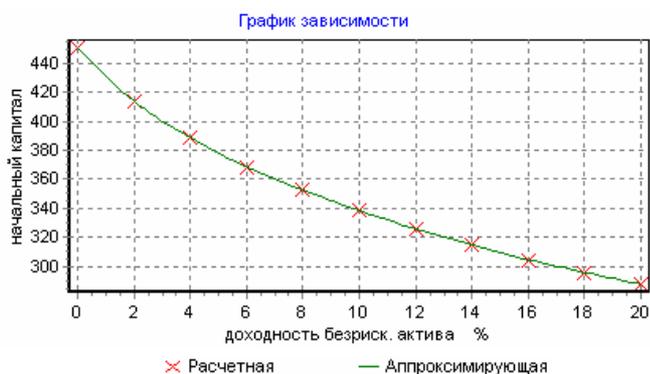


Рисунок 4. График зависимости начального капитала (тыс. руб.), гарантирующего уровень неразорения 0,95, от доходности вложения в безрисковый актив,  $\lambda=3,82$  исков/день,  $s=196,5$  тыс. руб/день.

рисунке 3 приведены графики зависимостей для уровня неразорения 0,95.

Анализируя расчеты, можно сделать вывод: страховой компании с начальным капиталом 350 тыс. руб. для обеспечения вероятности неразорения 0,95 требуется установить относительную рисковую надбавку в размере 85% при отсутствии инвестирования. Инвестирование в безрисковые активы с доходностью 0,13 позволяет снизить рисковую надбавку до 45% при том же уровне неразорения. Инвестирование в рисковые активы с доходностью 0,4 и волатильностью 0,13 позволяет снизить рисковую надбавку до 35% при том же уровне неразорения. Для построенных зависимостей были рассчитаны оценки коэффициентов эластичности (для рисковой надбавки 70%, таблица 1), откуда следует, что наибольшее влияние рисковая надбавка оказывает на начальный капитал, если страховая компания не инвестирует свободные средства.

Аналогично строятся зависимости необходимого начального капитала, гарантирующего заданный уровень неразорения, от доходности вложения в рисковые и безрисковые активы и волатильности. Графики данных зависимостей для уровня неразорения 0,95 представлены на рисунках 4-6.

Проведем анализ чувствительности величины необходимого начального капитала к изменению параметров процесса риска с помощью коэффициентов эластичности (таблица 1).

Таким образом:

– при отсутствии инвестирования или инвестировании в безрисковые активы наибольшее влияние на величину необходимого начального капитала оказывает величина относительной рискованной надбавки. Т.е. пересмотр величины относительной рискованной надбавки будет являться наиболее действенным инструментом снижения размера начального капитала, гарантирующего неразорение с вероятностью 0,95 (или, что эквивалентно, повышения уровня неразорения при том же размере начального капитала);

– при инвестировании в рискованные активы наибольшее влияние на рост величины необходимого начального капитала, гарантирующего неразорение с вероятностью 0,95, оказывает волатильность.

Проведем сравнительный анализ целесообразности инвестирования в рискованные и безрисковые активы. Для этого найдем такие значения начального капитала  $u^*$ , при которых выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi^{\mu, \sigma}(u) &> \varphi^r(u) \quad \forall u < u^*; \\ \varphi^{\mu, \sigma}(u) &< \varphi^r(u) \quad \forall u > u^*; \\ \varphi^{\mu, \sigma}(u^*) &= \varphi^r(u^*) = \varphi^* \end{aligned} \quad (3)$$

Назовем  $(u^*, \varphi^*)$  – точкой инвестиционного равновесия, так как в этой точке вероятность неразорения при инвестировании в рискованные активы совпадает с вероятностью неразорения при инвестировании в безрисковые активы, здесь  $u^*$  – равновесный капитал, а  $\varphi^*$  – равновесная вероятность. Сравнение рискованных вложений будем проводить с безрисковыми для  $r=0,13$  и  $\mu=0,4$ . Варьируя  $\sigma$ , построили графики зависимости равновесного капитала и равновесной вероятности от волатильности вложения в рискованный актив.

График зависимости

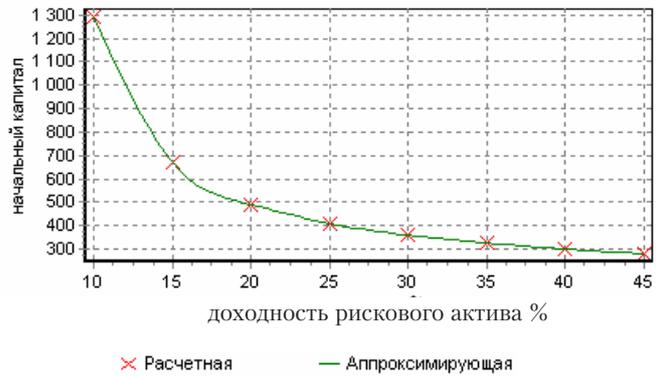


Рисунок 5. График зависимости начального капитала (тыс. руб.), гарантирующего уровень неразорения 0,95, от доходности вложения в рискованный актив при фиксированном  $\sigma=0,13$ ,  $\lambda=3,82$  исков/день,  $c=196,5$  тыс. руб/день.

График зависимости

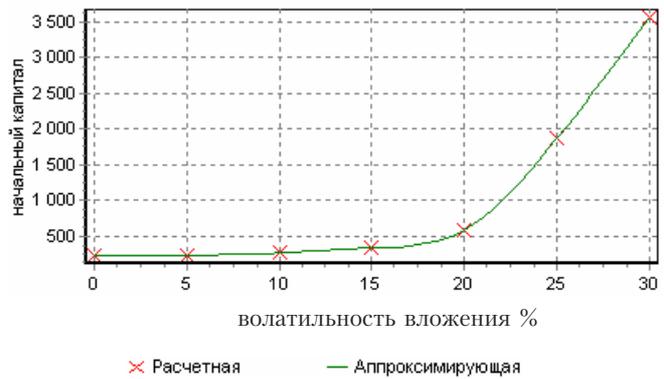


Рисунок 6. График зависимости начального капитала (тыс. руб.), гарантирующего уровень неразорения 0,95, от волатильности вложения в рискованный актив при  $\mu=0,4$ ,  $\lambda=3,82$  исков/день,  $c=196,5$  тыс. руб/день.

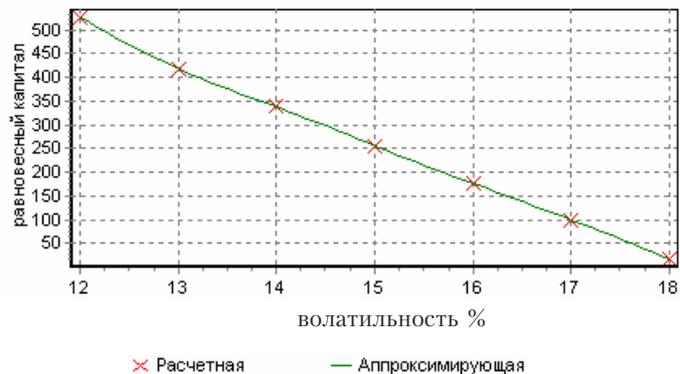


Рисунок 7. График зависимости равновесного капитала (тыс. руб.) от волатильности рискованного актива, при  $\mu=0,4$ ,  $\lambda=3,82$  исков/день,  $c=196,5$  тыс. руб/день.

На основе полученных расчетов можно сделать вывод, что для заданных параметров процессов риска ( $r=0,13$  и  $\mu=0,4$ ): при  $\sigma \leq 11$  вложение в рискованные активы дает более высокие значения вероятности неразорения при любых значениях начального капитала; для  $\sigma \geq 19$  более высокий уровень неразорения обеспечивает инвестирование в безрисковые активы; при  $12 \leq \sigma \leq 18$  зависимость  $u^*(\sigma)$  приве-

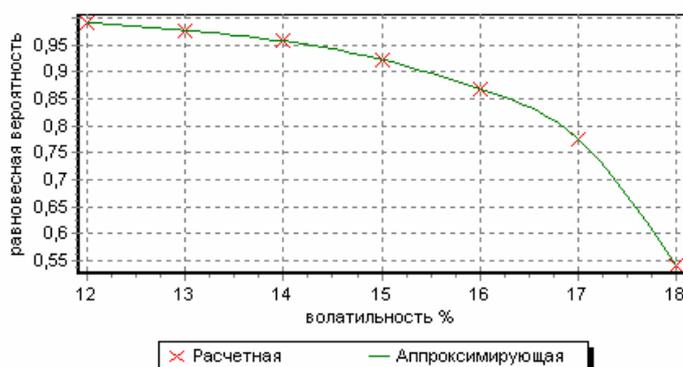


Рисунок 8. График зависимости равновесной вероятности от волатильности рискованного актива, при  $\mu=0,4$ ;  $r=0,13$ ,  $\lambda=3,82$  исков/день,  $c=196,5$  тыс. руб./день.

дена на рисунке 7, так, например, точка (15, 250) на графике означает, что при  $u < 250$  тыс. руб. выгоднее инвестирование в рискованные активы с доходностью  $\mu=0,4$  и волатильностью  $\sigma=0,15$ , а при  $u > 250$  тыс. руб. выгоднее инвестирование в безрисковые активы с доходностью  $r=0,13$ . За-

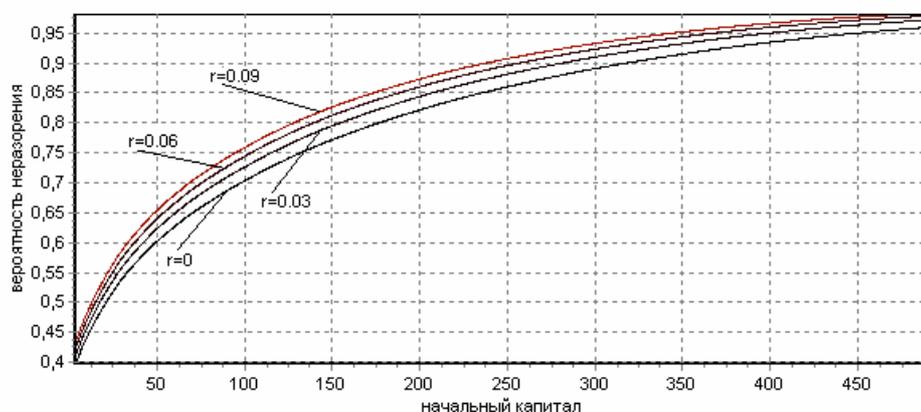


Рисунок 9. Графики зависимости вероятности неразорения от необходимого начального капитала (тыс. руб.), для случаев: а) без инвестирования; б) с инвестированием в безрисковые активы  $r=0,03$ ; в) с инвестированием в безрисковые активы  $r=0,06$ ; г) с инвестированием в безрисковые активы  $r=0,09$ , при  $u \in [0,500]$  тыс. руб.,  $\lambda=3,82$  исков/день,  $c=196,5$  тыс. руб./день.

зависимость  $\varphi^*(\sigma)$  представлена на рисунке 8. Для значений  $\mu=0,4$ ,  $r=0,13$  и  $\sigma=15$  (при  $\lambda=3,82$  исков/день,  $c=196,5$  тыс. руб./день) точкой инвестиционного равновесия будет (250, 0,92).

Расчеты показали (рисунок 9), что вложения в безрисковые активы более выгодны по сравнению с отсутствием инвестирования при любых значениях начального капитала и доходности:  $\varphi^r(u) > \varphi^0(u), \forall u \geq 0, r > 0$ .

**Список использованной литературы:**

1. Мельников, А.В., Волков, С.Н., Нечаев, М.Л. Математика финансовых обязательств / Мельников, А.В., Волков, С.Н., Нечаев, М.Л. // М.: ГУ ВШЭ, 2001 - 260с.
2. Paulsen, J., Ruin models with investment income / Paulsen, J. // Probability Surveys. Vol. 5, 2008, 416-434 с.

**Renner A.G., Yarkova O.N.**  
**ANALYSIS OF PAYING CAPACITY OF INSURANCE COMPAN WITH TAKING INTO ACCOUNT INVESTMENTS INTO RISK ASSETS**

The dependences of possibility of insurance company nonbankruptcy from the opening capital in paussonov's model of collective risk taking into account investments into risk and nonrisk assets are constructed in this article. The character of risk process parameters influence on the opening capital of a company at fix level of nonbankruptcy is revealed here. The criterion for choice of strategy of investments into risk and nonrisk assets is constructed in this work.

Key words: possibility of nonbankruptcy, risk assets

Информация об авторе:

Реннер А.Г. заведующий кафедрой математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета, кандидат технических наук, доцент, 460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, тел.: (3532) 372444, e-mail: mme@mail.osu.ru

Яркова О.Н. старший преподаватель кафедры математических методов и моделей в экономике Оренбургского государственного университета, 460018, г. Оренбург, пр-т Победы, 13, тел.: (3532) 372444