УДК 165.8

Алябьев Д.И.
Курский государственный университет

ОБ ОНТОЛОГИЧЕСКИХ И ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ИСТОЛКОВАНИЯ ЛОГИКИ В НАПРАВЛЕНИИ ФОРМАЛИЗМА

Статья посвящена исследованию онтологических и гносеологических установок, явно и имплицитно содержащихся в истолковании логических истин и объектов, логической составляющей основ математики в концепциях формализма.

Ключевые слова: математический формализм, онтология, гносеология, философия математики.

Важным для философии математики является понимание статуса и природы математических объектов. Эта проблема тесно связана с обсуждением таких понятий, как «достоверность» и «абсолютная истинность». Реальное существование математики со времен Античности представлялось гарантией способности человеческого познания достигать подобной достоверности и абсолютности. До настоящего времени единого общепризнанного понимания статуса природы математических и логических объектов не существует. Это связано прежде всего с особым положением самой математики как науки, оперирующей абстракциями, но практические результаты которой в точности согласуются с эмпирическими фактами, получаемыми в других науках. В связи с этим особое значение приобретает проблема онто-гносеологического истолкования исходных понятий математики и логики [6, с. 6].

Символические обозначения, являющиеся формальными представлениями положений теории, дали предпосылки к развитию современной математики, хотя полной формализации теории в повседневной практике, как правило, не получают. Согласно С. Клини, предложения формализованной математической теории могут не иметь ясного смысла, а ее умозаключения могут не характеризоваться несомненной очевидностью. Формальная аксиоматика представляет собой систему бессодержательных предметов, над которыми производят математические манипуляции по заданным правилам, аналогично арифметическим вычислениям. Хотя онтологический статус предметов явно не указывается, можно предположить, что Клини имеет в виду данные предметы как реально существующие. Свидетельством справедливости такой точки зрения можно считать требование понимания утверждений метатеории. Из этого можно предположить, что понимать реально не существующий объект не представляется возможным. Также Клини говорит о необходимости понимания правил, под которыми, по-видимому, подразумеваются законы логики, используемые в формализованной теории, что предполагает их реальное существование. Основным критерием достоверности методов в математике Клини считает интуитивную убедительность [8, с. 60-63].

В процессе формализации теории символизации подвергаются не только основополагающие понятия (аксиомы), но и способы логических умозаключений. Выведение новых предположений, таким образом, можно представить как формальное оперирование со знаками по заданным правилам. Такими правилами предположительно являются законы формальной логики. Отсюда можно допустить, что законы формальной логики выступают некоторым обобщением интуитивно очевидных правил, в существовании которых сомнений возникать не должно. Формальная же структура предполагает в себе некоторое обобщение и идеализацию реальных процессов, аналогичную, например, выбору модели идеального газа в физике [1, с. 75].

Своей программой Д. Гильберт пытается обосновать математику, не отвергая положительных результатов, полученных классической математикой и теорией множеств. Теория должна быть непротиворечивой в основаниях, тем самым исключая появление парадоксов. Реализация этой программы предполагала формализацию основных понятий таким образом, чтобы математика превратилась в совокупность формул. Фундаментом такой теории служат определенные формулы, называемые аксиомами. Действия над аксиомами в данной теории производятся по законам логики, которые тоже подвергаются формализации. Доказательство в этой теории является аналогом арифметического вычисления. Получаемые тем самым формулы и являются результатом программы обоснования математики Гильберта, поэтому имеют особую важность выявления онто-гносеологического статуса аксиом, а также самих законов логики.

В своей теории Гильберт использовал аксиоматические системы, существующие до него, придав им символический вид. Формализации была подвергнута и содержательная логика. Для математики и логики особое место занимает понимание статуса бесконечности, оперирование с которой приводит к большинству парадоксов. Понятие актуальной бесконечности, с которым были связаны парадоксы теории множеств, не является опытным, а представляется только в человеческом мышлении как результат эмпирического обобщения, в связи с этим Гильберт считал надежными операции с бесконечным только через конечное. Одной из основных особенностей формализованного доказательства является конечное число шагов при доказательстве [5, с. 108–110].

Попытка перейти к рассмотрению природы бесконечной индивидной области как заимствованной из области чувственного восприятия или же представляющей собой реальную действительность, по мнению Гильберта, обречена на провал. При подробном рассмотрении любой такой попытки можно убедиться, что во всех ситуациях прямого эмпирического обнаружения бесконечности не происходит. В связи с этим Гильберт не считает возможным говорить о понятии бесконечности как о единой совокупности. Вопрос понимания бесконечности должен решаться только внутри самой математики. Гильберт отмечает, что чувственное восприятие и сама действительность не дают нам прямых примеров бесконечности. Таким образом, говорит он, бесконечное нуждается в обосновании, так же как и натуральный ряд, являющийся, по мнению Гильберта, «чистым мысленным образом» [1, с. 41].

Гильберт признавал, что завершенная бесконечность не является интуитивной очевидностью, однако, несмотря на это, в отличие от Брауэра не пытался отказаться или опровергнуть классическую математику. Наоборот, его методика должна была уточнить основания математики и избежать парадоксов, в частности и связанных с использованием завершенной бесконечности.

Первоначально существовала вера в возможность эмпирического понимания бесконечности как данной в опыте, но более точные исследования показали, что бесконечность является не чем-то данным из опыта, а результатом некоторого мыслительного процесса. Из вышесказанного видим, что существование бесконечного многообразия невозможно разрешить с использованием каких-либо внематематических объектов, так как оно является внутриматематическим понятием. Отсюда можно предположить, что в понимании бесконечности представители формализма, в частности Клини, исходили из рационалистических предпосылок [8, с. 53–54].

Формалисты не относят бесконечность к реальным объектам, а говорят о ней только как о результате определенного умозрительного заключения. По мнению Гильберта, предъявить некоторую бесконечную индивидную область можно лишь через определенные, выполнимые в этой области логические формулы. И, как он указывает далее, данная область нуждается в доказательстве непротиворечивости описывающих ее аксиом. Подобное доказательство Гильберт считает возможным посредством метода формализации: разработки обозримой системы правил логического вывода и доказательства невозможности выведения противоречивой формулы в рамках данной системы аксиом и правил вывода. Таким образом, логика, с позиций формализма, выступает определенным аналогом гносеологического и онтологического фундамента науки наряду с чувственным опытом и эмпирией [1, с. 42].

Д. Гильберт одним из первых в начале XX века начал разработку теории доказательств на основе логического языка. Именно он и его последователи способствовали становлению математической логики как отдельной математической дисциплины. Но метод формализации оказал большое влияние не только на исследование логических проблем оснований математики. Данный метод в значительной степени повлиял на пересмотр и развитие почти всех разделов математики и особенное значение оказал на алгебру [1, с. 15].

В формалистской теории математики строгость математического доказательства основывается на логической основе математических выводов. В этом программа Гильберта имеет общее с программой логицизма, представители которой также считают, что фундаментом математических дисциплин является логика. Истинность законов логики у представителей формализма не вызывала сомнения, поэтому логика для них представляет собой твердую основу теории и, вероятно, ее основные понятия трактуются реалистически.

При выборе основных аксиом Гильберт в то же время руководствуется конвенциальными идеями, которые в свою очередь не должны противоречить реально существующей действительности. Это же относится и к выбору допустимых актов, которые можно осуществлять с исходными аксиомами. Из этого можно сделать предположение, что Гильберт не отвергает конвенциальные идеи, но в ином понимании, чем понимание конвенционализма А. Пуанкаре [1, с. 73]. Как отмечает В.Я. Перминов, математическая непротиворечивость и вообще сама целостность математики с точки зрения формализма проистекает и базируется на логике, на логико-методологических принципах организации теории. Предмет же математики изучается в каждом конкретном случае, – вторичен в этом отношении. Характер понятий математики в программе Гильберта истолковывается на основании некоторых общих гипотез о ее функции в познании. Конвенция, играющая важную роль в формалистской математике, понимается особым образом. У Гильберта конвенция не имела произвольного смысла. На нее накладывались требования согласования с реальной действительностью. Абстрактная свобода построения объектов также ограничивается практической целесообразностью [7, с. 11-12].

Хотя в основе программы формализма и лежат логические предпосылки, это не означает полного сведения математики к логике, как это планировалось у представителей программы логицизма. Идея формализации теории состоит в переводе всех утверждений математической системы на язык логического исчисления, а полученные в результате таких преобразований построения должны быть лишь непротиворечивыми [7, с. 135-136].

В формальной аксиоматике Д. Гильберта надежность содержательных доказательств ставится под сомнение. Для него содержательная составляющая имела значение только в качестве связи формальной аксиоматики с реальными объектами, а также для удобства в процессе объяснения и убеждения коллег. Явная убедительность содержательной аксиоматики носит психологический характер и, видимо, связана с отражением природной действительности, истинность которой является эмпирическим фактом [7, с. 41].

Многие научные теории, по словам Гильберта, невозможно обосновать ссылкой на эмпирическую видимость их предположений. Обоснование можно осуществить только путем установления непротиворечивости производимой идеализации, в результате которой введенные понятия и основные положения теории переступают границы наглядно очевидного или данного из опыта. В связи с этим возникает необходимость исследования непротиворечивости теоретических систем в отрыве от изучения реально происходящих процессов. На этом этапе возникает переход к формальному представлению выбранной теории [1, с. 25].

Для формализации теории необходимо предварительно сформулировать аксиомы и записать их в символической форме, а также описать допустимые правила логики. Из этого не следует сведение математики к логике, Гильберт в логике усматривает критерий истинности научного знания. Помимо формулировки системы аксиом также требуется доказать непротиворечивость выбранной аксиоматической системы [7, с. 135-136]. Д. Гильберт, вероятно, при определении основных понятий предполагает реальное существование математических и логических объектов и истин, относящихся к объективной действительности. Фундаментальные математические понятия формальной аксиоматики, по мнению В.Я. Перминова, действительно отражают реальность, но не физическую реальность как таковую, а фундаментальные роды, лежащие в основе всякой предметности. Можно говорить, что в основаниях математика объединяется с философией, фиксируя в своих понятиях категориальные представления [7, с. 34-35].

Одной из особенностей формальной аксиоматики является необходимость выявления непротиворечивости и приемлемости идеализаций, к которым прибегает содержательная аксиоматика, использующая идеализации и приближения по отношению к реальным объектам действительности. Результаты теоретической физики полностью соответствуют эмпирически получаемым данным. В связи с этим получается не описание эмпирических фактов, а чисто символическое построение мира. По словам Клини, глубокий философский вопрос состоит в том, какая «истина» или объективность соответствует этому теоретическому построению мира, далеко выходящему за пределы непосредственного опыта [8, с. 56-58].

За основу математического знания Клини, так же как и Гильберт, берет логический аппарат. Посредством логических законов из первоначально выбранных аксиом происходит вывод теорем. Четкий путь выбора аксиом не указывается, но можно предположить, что этот процесс связан с умозаключением математика, основывается на обобщении эмпирических предпосылок и однозначно должен согласовываться с реальной действительностью. Результат же полной формализации теории Клини видит в высказывании явно всех условий, определяющих предложения, имеющиеся в теории.

Возможность формализации теории Клини считает открытием, то есть имеет предположительно объективистское представление об основаниях формальной аксиоматики, на которую, в свою очередь, опирается формальная логика. Подобные открытия происходят умозрительным путем и являются в итоге результатом длительного периода истории развития человеческого интеллекта [8, с. 58-60].

Для процесса формализации вывода Гильберт использует логику высказываний в виде теории истинностных функций. Он указывает на то, что эта теория возникает посредством определенного конструирования. Способ формализации умозаключений определенного рода представляет собой работу с определенным типом формул, являющихся или тождественно истинными выражениями, или же символическими обозначениями некоторых аксиом. Остальные формулы в этой теории выводятся из предпосылок по правилам подстановки и с использованием схемы заключения. Благодаря этому способу можно обойти определение отношения сказуемого к подлежащему, или, на языке логики, связь субъекта с предикатом, которую можно отразить в виде формализма [1, с. 121].

При использовании выражения «индивидная область» Гильберт говорит о некоторой идеализации совокупности определенных вещей. Идеализацию вещей можно предположительно представить результатом мысленного процесса математика, который, однако, в определенной степени основывается на обобщении представлений о реально существующих объектах и явлениях. Такие идеализации в формализме являются формулировками аксиом теории. Отсюда можно предположить реалистические предпосылки в понимании и определении основополагающих аксиом как в математике, так, в частности, и в логике [1, с. 24].

Говоря о формализации научных теорий, и прежде всего теорий математического знания, Гильберт указывает, что данные теории применяются к рассматриваемым областям действительности посредством содержательных теорий. Можно, таким образом, утверждать, что математические теории, согласно Гильберту, изучают действительность. Он говорит также, что научные теории чаще всего воспроизводят действительность неполно, являются упрощенными идеализациями. Это утверждение указывает на то, что этот ученый не стремится разобраться в данном вопросе обстоятельно, в традиционном для многих математиков духе игнорируя философские проблемы, оставляя их за рамками рассмотрения. Действительно, вполне очевидно в настоящее время, что все теории эмпирических (естественных и др.) наук не могут претендовать на полное соответствие реальности. Наука и философия науки уже отказались от этой иллюзии механицизма. Тогда под разряд совпадающих с действительностью, в понимании Гильберта, видимо, подходят точные науки, математические теории. Но в этом-то и состоит важнейшая проблема философии математики: если математические истины никогда не опровергаются эмпирически, то вопрос о роде действительности, которую они описывают, остается открытым.

До Гильберта для установления непротиворечивости систем аксиом математики использовали только построения определенного рода. К этому методу приводит рассмотрение индивидных областей с конечным числом индивидов, поскольку для области такого рода непротиворечивость какой-либо формулы равнозначна ее выполнимости. В случае бесконечных индивидных областей положение вещей оказывается гораздо более сложным. Тогда выполнимость какой-либо системы аксиом является условием, достаточным для ее непротиворечивости, но необходимым не считается. Поэтому нельзя рассчитывать, что доказательство непротиворечивости всегда можно будет осуществить при помощи некоторого доказательства выполнимости [1, с. 42].

От анализа, как говорит Гильберт, нам требуется только то, чтобы он был совокупностью идей, непротиворечивость которых возможно доказать, предоставлял в наше распоряжение такие систематические рамки для упорядочения аксиоматических систем теоретических научных дисциплин, что осуществляемые в них идеализации реальной действительности также оказывались бы непротиворечивыми. Это помогает образовать гносеологическую связь абстрактных идеализаций и реальных процессов, явлений природы, согласование с которыми должно быть полным. Гильберт говорит об идеализации действительности в научных теориях и математике как о гаранте непротиворечивости этих идеализаций. Таким образом, он указывает на объективный характер математических и логических истин, на гносеологическую значимость формально-логических методов.

Проблема выполнимости какой-либо системы аксиом (соответственно какой-нибудь логической формулы), которая в случае конечной индивидной области может быть решена в позитивном смысле путем построения соответствующей модели, в том случае, когда для доказательства выполнимости требуется использование бесконечной индивидной области, не может быть разрешена указанным методом, поскольку существование бесконечной индивидной области само по себе не может считаться бесспорным. Более того, введение таких бесконечных областей само может быть обосновано лишь посредством доказательства непротиворечивости какой-либо системы аксиом, характеризующей бесконечное. Поскольку позитивный метод решения в этой ситуации оказывается невозможным, нам остается лишь один путь, путь негативных по своему характеру доказательств непротиворечивости, то есть путь доказательств невозможности, для чего оказывается необходимой формализация логического вывода. Доказательство непротиворечивости системы аксиом, характеризующих бесконечное, необходимым образом подразумевает формализацию логического вывода.

При возникновении необходимости доказательства невозможности необходимо четкое понимание того, что само доказательство уже не может быть осуществлено с помощью методов экзистенциально-аксиоматического вывода. Более того, необходимо применять только такие способы рассуждений, которые не содержат в себе никаких идеализированных экзистенциальных предположений [1, с. 44]. Но все-таки эта методика может быть проведена в жизнь лишь тогда, когда постулаты рассматриваются нами как выражение каких-либо известных из действительности фактов либо когда мы считаем их непосредственно очевидными. Очевидность постулатов, сомнения в точности которых не у кого не возникает, вероятно, доказывает существование реалистических предпосылок их понимания. Вопрос о границах применимости геометрических аксиом является, как известно, чрезвычайно спорным. Существенное преимущество формальной аксиоматики как раз в том и состоит, что она делает построение геометрии не зависящим от решения этого вопроса [1, с. 45].

Одной из характерных особенностей формалистской точки зрения является то, что рассуждения рассматриваются как мысленные эксперименты над предметами, которые предполагаются конкретно заданными. Так, в арифметике речь идет о числах, которые мыслятся как заданные, в алгебре речь идет о заданных буквенных выражениях и числовых коэффициентах. В арифметике имеется некоторый исходный объект и, кроме того, некоторая операция порождения. И то и другое необходимо зафиксировать некоторым наглядным образом. Конкретный вид фиксации является несущественным. Необходимо только, чтобы выбор, осуществленный однажды, сохранялся затем на протяжении всей теории. Здесь обнаруживается отвлечение от содержательного смысла объектов и переход к их формальному пониманию [1, с. 46].

Способы умозаключений системы анализа, имеющие содержательный характер, основываются на представлениях о завершенной, окончательно определенной действительности и являются формальным выражением такого представления. Однако отсюда не следует, что порождаемая этими способами умозаключений метаматематически оформленная структура должна обладать свойством абсолютной завершенности. В определенной степени она наверняка обладает методической завершенностью, а именно завершенностью, в силу которой при обычных способах рассуждений, применяемых в анализе и теории множеств, ее вполне хватает для той цели, которой служит этот дедуктивный формализм.

Гильберт считает, что математические содержательные теории, в основе которых находятся законы логики, и создаваемые на основе теорий формализованные системы расширяют сферу действительности в том смысле, что они распространяют реальность на теоретические идеальные объекты. При этом способы рассуждений, применяемые в таких системах, исходят из установки о наличии «завершенной, окончательно определенной действительности» и сами являются формальным выражением этой установки. Исходя из этих представлений и учитывая, что математические истины и теории обладают неизменной эффективностью в применении к изучению или преобразованию реального мира, а также что они никогда не опровергаются эмпирическим путем или в процессе практической деятельности человека, можно заключить, что описываемая Гильбертом установка вполне адекватна существующему положению дел.

В завершение можно отметить, что представления о логике онто-гносеологического характера, служащие фундаментом формализма, не сводятся лишь к высказываниям Гильберта или его последователей. Очень многие из них просто не сформулированы в явном виде, и их выявление представляется актуальной задачей для истории философии, а также перспективной для философии математики и науки линией исследований.

Список использованной литературы:
1. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики / пер. с нем. Н.М. Нагорного. – М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 557 с.
2. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики / пер. с нем. А.А. Ерофеева. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1947. – 307 с.
3. Клини С.К. Математическая логика / пер. с англ. Ю.А. Гастаева. – М.: Мир, 1973. – 481 с.
4. Перминов В.Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-традиция, 2001. – 320 с.
5. Китчер Ф., Перминов В.Я., Федоров Б.И. и др. Методологический анализ оснований математики. – М.: Наука, 1988. – 175 с.
6. Гносеологические проблемы математического знания: современные зарубежные исследования / Автор обзора З.А. Сокулер; Отв. ред. А.И. Панченко. – М.: ИНИОН АНСССР, 1984. – 70 с.
7. Перминов В.Я. Развитие представлений о надежности математического доказательства. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.
8. Клини С.К. Введение в метаматематику. – М.: Изд. иностр. лит., 1957. – 481 с.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект №08-03-00049а.