УДК 531

Беридзе С.П.
ГОУ ВПО «Оренбургский государственный университет»

К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

Статья посвящена описанию модели колебания тонких прямоугольных пластинок. Приведен численный расчет процесса.

Ключевые слова: колебания тонких прямоугольных пластинок.

Имеем тонкую прямоугольную пластинку размером *а* х *в*. Начало координат возьмем в углу пластинки на середине ее толщины. Ось 0х направим вдоль стороны длиной *а*, ось 0у направим вдоль стороны длиной *в*, а ось 0z направим вниз. В работе [2] было получено уравнение свободных колебаний тонкой пластинки.

$$\nabla^2\nabla^2 w - A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 w + B\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{(\lambda + 3\mu)}{\mu(\lambda + 2\mu)^2}\rho;\quad B = \frac{\rho^2}{\mu(\lambda + 2\mu)}. \tag{2}$$

Граничные условия

а) край оперт

$$w=0,\ w''_{x^2} = 0 \tag{3}$$

б) край защемлен

$$w=0,\ w'_x = 0 \tag{4}$$

Начальные условия

$$w\Big|_{t=0} = w_0(x,y),\quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = v_0(x,y) \tag{5}$$

Решение уравнения ищем в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\cdot Y_n(y) Sin(\omega_n t + \delta_n), \tag{6}$$

где $X_n(x)$ берется из уравнения

$$X_n^{IV} + \lambda_n^2 X_n^{II} = 0, \tag{7}$$

см. [1].

Решение уравнения (7) имеет вид

$$X_n = A_n \sin\lambda_n x + B_n\cos\lambda_n x + D_n x + C_n, \tag{8}$$

где постоянные A_n, B_n, D_n, C_n – определяются по граничным условиям.

В таблице 1 даны формулы, определяющие функции X_n для соответствующих граничных условий и характеристические уравнения.

Подставим (6) в (1), с учетом (7), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[-\lambda_n^2 X_n'' Y_n + 2X_n'' Y_n'' + X_n Y_n^{IV} + A\omega_n^2\left(X_n'' Y_n + X_n Y_n''\right) + B\omega_n^4 X_n Y_n\Big]\cdot\sin(\omega_n t + \delta_n) = 0 \tag{9}$$

Умножаем (9) на X_m'' и интегрируем от 0 до *a*. С учетом ортогональности системы функций $\{X_n''\}$ и взаимной ортогональности систем функций $\{X_n\}$ и $\{X_n''\}$, см.[1], получим

$$Y_n^{IV}\int_0^a X_n X_n'' dx + Y_n''\left[2\int_0^a (X_n'')^2 dx + A\omega_n^2\int_0^a X_n X_n'' dx\right] +$$

$$+ Y_n\left[-\lambda_n^2\int_0^a (X_n'')^2 dx + A\omega_n^2\int_0^a (X_n'')^2 dx + B\omega_n^4\int_0^a X_n X_n'' dx\right] = 0$$

С учетом, см.[1], что

$$\frac{\int_0^a (X_n'')^2 dx}{\int_0^a X_n X_n'' dx} = -\lambda_n^2,$$

Получим

$$Y_n^{IV} + Y_n''\left(-2\lambda_n^2 + A\omega_n^2\right) + Y_n\left(\lambda_n^4 - 2A\omega_n^2 + B\omega_n^4\right) = 0.$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} -2\lambda_n^2 + A\omega_n^2 &= \alpha_n \\ \lambda_n^2 - A\omega_n^2\lambda_n^2 + B\omega_n^4 &= \beta_n \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

Таблица 1

Левый край x=0	Правый край x = a	
	Оперт	Защемлен
Оперт	$X_n = \sin\frac{n\pi x}{a}$ $\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$	$X_n = \sin\lambda_n x - x\lambda_n\cos\lambda_n a$ $\sin\lambda_n a - a\lambda_n\cos\lambda_n a = 0$
Защемлен		$X_n = (\cos\lambda_n a - 1)(\sin\lambda_n x - \lambda_n x) - (\sin\lambda_n a - \lambda_n a)(\cos\beta\lambda_n x - 1)$ $2 - 2\cos\lambda_n a - \lambda_n a\sin\lambda_n a = 0$

Окончательно

$$Y_n^{IV} + \alpha_n Y_n'' + \beta_n Y_n = 0 \qquad (11)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее этому линейному дифференциальному уравнению, имеет корни, два из которых всегда действительны, а два других могут быть и мнимыми.

$$k_{in} = \pm\sqrt{\frac{-\alpha_n \pm \sqrt{\lambda_n^2 - 4\beta_n}}{2}}, \quad i = \overline{1,4}$$

или

$$k_{in} = \pm\sqrt{\frac{2\lambda_n^2 - \omega_n^2\left(A \mp \sqrt{A^2 - 4B}\right)}{2}}. \qquad (12)$$

κ_1 и κ_2, также как и κ_3 и κ_4 будут отличаться только знаками, а потому

$$Y_n = F_n ch k_{in} y + G_n sh k_{in} y +$$
$$+ H_n \cos k_{3n} y + T_n \sin k_{3n} y \qquad (13)$$

λ_n берется из соответствующего характеристического уравнения в таблице 1.

В таблице 2 даны формулы, определяющие функции Y_n для соответствующих граничных условий и уравнения частот.

Каждое Y_n на самом деле имеет еще и постоянный множитель, который определяется с помощью начальных условий, но для этого нужно, чтобы система собственных форм колебаний пластинки была ортогональной по переменной *y*. Удовлетворяя граничным условиям для уравнения (11), получим уравнение частот, где частота собственных колебаний ω_n будет функцией параметра λ_n. Задаваясь величиной λ_n, получим бесконечное множество значений ω_n.

Располагая их по возрастанию и нумеруя по *m*, обозначим каждое значение частоты как ω_{nm}. Так как начальная фаза тоже будет зависеть от *m*, то вместо δ_n, будем писать δ_{nm}, а Y_n представится в виде ряда

$$Y_n = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \overline{Y_m} \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (11) и, полагая, что каждый член ряда (14) является решением уравнения (11), получим

$$\overline{Y_m^{IV}} + \alpha_{nm} \overline{Y_m''} + \beta_{nm} \overline{Y_m} = 0, \qquad (15)$$

а решение (6) примет вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_n(x)\overline{Y_m}(y)\sin(\omega_{nm} t + \delta_{nm}). \qquad (16)$$

Решения, даваемые таблицей 2, будут подходить и для уравнения (15) нужно только в k_{1n} и k_{3n} заменить ω_n на ω_{nm}.

Покажем, что функции, которые дает таблица 2, ортогональны на отрезке [0, b].

Рассмотрим сначала следующий интеграл, который берем по частям.

$$\int_0^b \overline{Y_i^{IV}}\,\overline{Y_j} dy = \left(\overline{Y}_i^{III}\overline{Y}_j - \overline{Y}_i^{II}\overline{Y}_j^{I} + \overline{Y}_i^{I}\overline{Y}_j^{II} - \overline{Y}_i\overline{Y}_j^{III}\right)\Big|_0^b +$$
$$+ \int_0^b \overline{Y}_j \overline{Y_j^{IV}} dy.$$

Отсюда, с учетом граничных условий

$$\int_0^b \left(\overline{Y}_i^{IV}\overline{Y}_j - \overline{Y}_i\overline{Y}_j^{IV}\right) dy = 0 \qquad (17)$$

Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \overline{Y}_i^{IV}\overline{Y}_j + \alpha_{ni}\overline{Y}_i^{II}\overline{Y}_j + \beta_{ni}\overline{Y}_i\overline{Y}_j = 0 \\ \overline{Y}_i\overline{Y}_j^{IV} + \alpha_{nj}\overline{Y}_i\overline{Y}_j + \beta_{nj}\overline{Y}_i\overline{Y}_j = 0 \end{array}\right\}.$$

Таблица 2

Левый край y = 0	Правый край y = в	
	Оперт	Защемлен
Оперт	$Y_n = \sin\frac{n\pi y}{b}$ $k_{3n} = \frac{n\pi}{b}$	$Y_n = -\sin k_{3n} b\, shk_{1n} y + shk_{1n} b \sin k_{3n} y$ $k_{3n} shk_{1n} b \cos k_{3n} b - k_{1n} chk_{1n} b \sin k_{3n} b = 0$
Защемлен		$Y_n = -\left(shk_{1n} b - \frac{k_{1n}}{k_{3n}}\sin k_{3n} b\right)(chk_{1n} y - \cos k_{3n} y) +$ $+ (chk_{1n} b - \cos k_{3n} b)\left(shk_{1n} y - \frac{k_{1n}}{k_{3n}}\sin k_{3n} y\right)$ $2k_{1n} - 2k_{1n} chk_{1n} b \cos k_{3n} b - \left(k_{3n} - \frac{k_{1n}^2}{k_{3n}}\right) shk_{1n} b \sin k_{3n} b = 0$

k_{in} подставляется из (12).

Вычтем из первого уравнения второе и проинтегрируем от 0 до *в*.

С учетом (17), получим

$$\left(\beta_{ni}-\beta_{nj}\right)\int_0^b \overline{Y}_i\,\overline{Y}_j dy=-\alpha_{ni}\int_0^b \overline{Y}_i^{II}\,\overline{Y}_j dy+\alpha_{nj}\int_0^b \overline{Y}_i\,\overline{Y}_j^{II}dy\ .$$

Рассмотрим следующий интеграл

$$\int_0^b \overline{Y}_i^{II}\,\overline{Y}_j dy=\left|\begin{matrix}\overline{Y}_j=и, & dy=dи\\ \overline{Y}_i^{II}dy=d\nu, & \nu=\overline{Y}_i^{I}\end{matrix}\right|=$$

$$=\overline{Y}_j\,\overline{Y}_i^{I}\Big|_0^{в}-\int_0^b \overline{Y}_i^{I}\,\overline{Y}_j^{I}dy=-\int_0^b \overline{Y}_i^{I}\,\overline{Y}_j^{I}dy.$$

С учетом полученного имеем

$$\left(\beta_{ni}-\beta_{nj}\right)\int_0^b \overline{Y}_i\,\overline{Y}_j dy=\left(\alpha_{ni}-\alpha_{nj}\right)\int_0^b \overline{Y}_i^{I}\,\overline{Y}_j^{I}dy \qquad (18)$$

Как это следует из таблицы 2, функции $\overline{Y}_k$ непрерывны на [0,b].

Прежде чем двигаться дальше, докажем теорему аналогичную Обобщенной теореме о среднем (см [3]), которую назовем Третья теорема о среднем.

Пусть f(x) непрерывна, а g(x) интегрируема на отрезке [*a*, *b*] и m≤f(x)≤M на этом отрезке, тогда

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|=\mu\left|\int_a^b g(x)dx\right|,$$

где μ находится между $|m|$ и $|M|$, или $0\prec\mu\le M$.

Доказательство

а) Пусть m>0, тогда

$$m\left|\int_a^b g(x)dx\right|\le\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le M\left|\int_a^b g(x)dx\right|,$$

откуда

$$m\le\frac{\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|}{\left|\int_a^b g(x)dx\right|}\le M.$$

Тогда

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|=\mu\left|\int_a^b g(x)dx\right|=f(c)\left|\int_a^b g(x)dx\right|,$$

где a≤c≤b что и требовалось;

б) Пусть m<0, M>0 и $|m|\succ M$, тогда f(x) возьмем в следующих пределах $|m|\le f(x)\le M$, далее все так же, как и в а), но здесь $|m|\le\mu\le M$.

в) Пусть m<0, M>0 и $|m\succ M,|$ тогда

$$0\prec\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le M\left|\int_a^b g(x)dx\right|,$$

откуда

$$0\le\frac{\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|}{\left|\int_a^b g(x)dx\right|}\le M$$

и окончательно

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|=\mu\left|\int_a^b g(x)dx\right|,$$

где $0\prec\mu\le M$.

г) Пусть m<0, M<0 тогда

$$|M|\cdot\left|\int_a^b g(x)dx\right|\le\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le|m|\cdot\left|\int_a^b g(x)dx\right|$$

далее все как в а).

Теперь рассмотрим интеграл, стоящий в правой части формулы (18)

$$\int_0^b \overline{Y_i'}\cdot\overline{Y_j'}\cdot dy,$$

так как $\overline{Y_i'}$ и $\overline{Y_j'}$ непрерывные функции, то к этому интегралу можно применить доказательную теорему. Поскольку $\overline{Y_i'}$ непрерывна на [0, b], то она там принимает наибольшее и наименьшее значение, тогда согласно теореме

$$\left|\int_0^b \overline{Y_i'}\cdot\overline{Y_j'}dy\right|=\mu\left|\int_0^b \overline{Y_j'}dy\right|=\mu\left|\overline{Y_j}\right|_0^b\Big|=0,$$

что следует из граничных условий.

Теперь из начальных условий (5) для определения A_{nm} и δ_{nm} из (14) и (16) будем иметь два уравнения

$$\int_0^a\int_0^b w_0(x,y)X_n^{II}(x)\cdot\overline{Y}_m dxdy=A_{nm}\int_0^a X_n(x)X_n^{II}(x)dx\int_0^b \overline{Y}_m^2(y)dy\sin\delta_{nm},$$

$$\int_0^a\int_0^b \nu_0(x,y)X_n^{II}(x)\cdot\overline{Y_m}(y)dxdy=$$

$$=A_{nm}\omega_{nm}\int_0^a X_n(x)X_n^{II}(x)dx\int_0^b \overline{Y}_n^2(y)dy\cos\delta_{nm}.$$

Список использованной литературы:

1. Беридзе С.П. Свободные колебания тонких прямоугольных пластинок с опертым или защемленным краем. – В кн. Расчет строительных конструкций на статические и динамические нагрузки. Межвуз. темат. сб. тр. – Л.: ЛИСИ, 1985. – С. 28-34.
2. Беридзе С.П. Свободные колебания тонких прямоугольных пластинок // Прогрессивные технологии в транспортных системах. Сборник докладов VII Российской научно-технической конференции. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. – С. 54-58.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II, – М.: Физматгиз, 1962. – 807 с.