

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ ТРЕЩИНЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Статья посвящена определению коэффициентов интенсивности напряжений первого рода для трещины, находящейся под заданным углом к полупространству. Установлены зависимости коэффициента интенсивности напряжений первого рода от угла между трещиной и полупространством. Адекватность результатов моделирования подтверждалась их сопоставлением с результатами других авторов.

Ключевые слова: трещина; коэффициент интенсивности напряжений.

Целью настоящей работы являлось определение коэффициентов интенсивности напряжений первого рода в окрестности вершины трещины, находящейся под углом к полупространству.

Напряженно-деформированное состояние упругой изотропной среды в трехмерном случае описывалось уравнениями равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

уравнениями совместности, или неразрывности деформации

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z \partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

и законом Гука

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})), \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})), \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy}, \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xz}, \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yz}. \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты тензора деформаций определялись следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ – компоненты тензора напряжений;

$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$ – компоненты тензора деформаций;

u_x, u_y, u_z – компоненты тензора перемещений;

ν – коэффициент Пуассона;

E – модуль Юнга;

G – модуль сдвига.

Для приближенного решения задач с объемными трещинами в пространстве был разработан метод разрывных смещений [1]. Модель объемной трещины в пространстве для расчетов представлена на рисунке 1.

Граничные интегральные уравнения метода разрывных смещений в объемной постановке

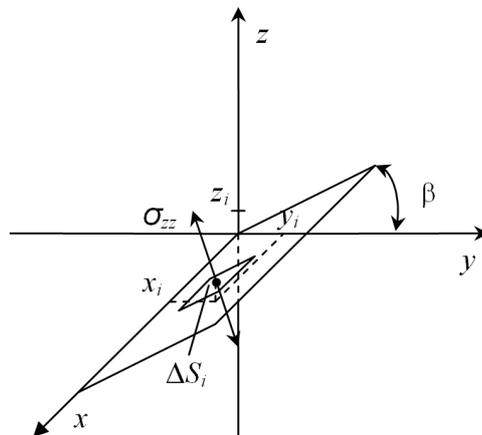


Рисунок 1. Схема моделирования объемной трещины

ке сводились к решению системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{nx}^i &= G \sum_{j=1}^N \{A_{11ij} D_{nxj} + A_{12ij} D_{nyj} + A_{13ij} D_{nzj}\} \\ \sigma_{ny}^i &= G \sum_{j=1}^N \{A_{21ij} D_{nxj} + A_{22ij} D_{nyj} + A_{23ij} D_{nzj}\} \\ \sigma_{nz}^i &= G \sum_{j=1}^N \{A_{31ij} D_{nxj} + A_{32ij} D_{nyj} + A_{33ij} D_{nzj}\} \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_{nx}^i, \sigma_{ny}^i, \sigma_{nz}^i$ – нормальное и касательные напряжения на границе тела ($i=1,2,\dots,N$);

G – модуль сдвига;

N – количество всех граничных элементов;

$D_{nxj}, D_{nyj}, D_{nzj}$ – компоненты разрыва смещений j -го элемента в касательных и нормальном направлениях соответственно.

Здесь

$$A_{11ij} = -\bar{F}_{121} \sin \gamma + \bar{F}_{131} \cos \gamma;$$

$$A_{12ij} = -\bar{F}_{122} \sin \gamma + \bar{F}_{132} \cos \gamma;$$

$$A_{13ij} = -\bar{F}_{123} \sin \gamma + \bar{F}_{133} \cos \gamma;$$

$$A_{21ij} = -\bar{F}_{221} \frac{1}{2} \sin 2\gamma + \bar{F}_{331} \frac{1}{2} \sin 2\gamma + \bar{F}_{231} \cos 2\gamma;$$

$$A_{22ij} = -\bar{F}_{222} \frac{1}{2} \sin 2\gamma + \bar{F}_{332} \frac{1}{2} \sin 2\gamma + \bar{F}_{232} \cos 2\gamma;$$

$$A_{23ij} = -\bar{F}_{223} \frac{1}{2} \sin 2\gamma + \bar{F}_{333} \frac{1}{2} \sin 2\gamma + \bar{F}_{233} \cos 2\gamma;$$

$$A_{31ij} = \bar{F}_{221} \sin^2 \gamma + \bar{F}_{331} \cos^2 \gamma - \bar{F}_{231} \sin 2\gamma;$$

$$A_{32ij} = \bar{F}_{222} \sin^2 \gamma + \bar{F}_{332} \cos^2 \gamma - \bar{F}_{232} \sin 2\gamma;$$

$$A_{33ij} = \bar{F}_{223} \sin^2 \gamma + \bar{F}_{333} \cos^2 \gamma - \bar{F}_{233} \sin 2\gamma;$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{111} &= \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-3 \frac{\bar{x}\bar{z}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}^3\bar{z}}{r^7} \right); \\ \bar{F}_{112} &= \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left((6\nu-3) \frac{\bar{y}\bar{z}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}^2\bar{y}\bar{z}}{r^7} \right); \end{aligned}$$

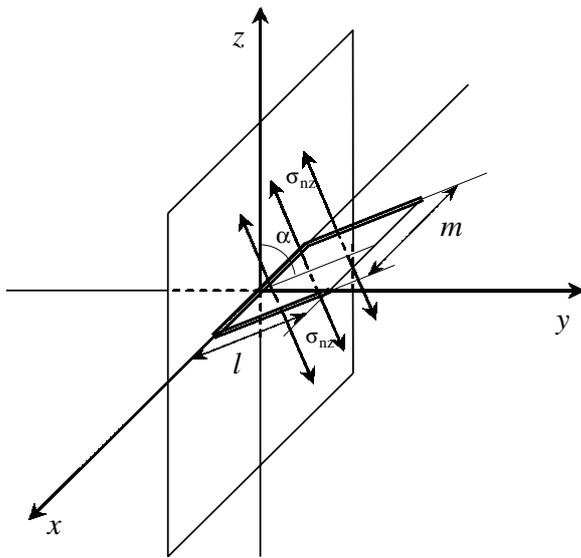


Рисунок 2. Схема поворота трещины относительно полупространства

$$\bar{F}_{113} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left((2\nu-2) \frac{1}{r^3} + (3-6\nu) \frac{\bar{y}^2}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}^2\bar{z}^2}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{121} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-3\nu \frac{\bar{y}\bar{z}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}^2\bar{y}\bar{z}}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{122} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-3\nu \frac{\bar{x}\bar{z}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}\bar{y}^2\bar{z}}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{123} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left((6\nu-3) \frac{\bar{x}\bar{y}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}\bar{y}^2\bar{z}}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{131} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-(1+\nu) \frac{1}{r^3} + 3\nu \frac{\bar{y}^2}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}^2\bar{z}^2}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{132} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-3\nu \frac{\bar{x}\bar{y}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}\bar{y}^2\bar{z}}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{133} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-3 \frac{\bar{x}\bar{z}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}\bar{z}^3}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{221} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left((6\nu-3) \frac{\bar{x}\bar{z}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}\bar{y}^2\bar{z}}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{222} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-3 \frac{\bar{y}\bar{z}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}^3\bar{z}}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{223} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left((2\nu-2) \frac{1}{r^3} + (3-6\nu) \frac{\bar{x}^2}{r^5} + 15 \frac{\bar{y}^2\bar{z}^2}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{231} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-3\nu \frac{\bar{x}\bar{y}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}\bar{y}^2\bar{z}}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{232} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-(1+\nu) \frac{1}{r^3} + 3\nu \frac{\bar{x}^2}{r^5} + 15 \frac{\bar{y}^2\bar{z}^2}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{233} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-3 \frac{\bar{y}\bar{z}}{r^5} + 15 \frac{\bar{y}\bar{z}^3}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{331} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-3 \frac{\bar{x}\bar{z}}{r^5} + 15 \frac{\bar{x}\bar{z}^3}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{332} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-3 \frac{\bar{y}\bar{z}}{r^5} + 15 \frac{\bar{y}\bar{z}^3}{r^7} \right);$$

$$\bar{F}_{333} = \frac{\Delta S_j}{4\pi(1-\nu)} \left(-\frac{1}{r^3} - 6 \frac{\bar{z}^2}{r^5} + 15 \frac{\bar{z}^4}{r^7} \right);$$

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2};$$

$$\bar{x} = x_i - x_j;$$

$$\bar{y} = (y_i - y_j) \cos \beta_j + (z_i - z_j) \sin \beta_j;$$

$$\bar{z} = -(y_i - y_j) \sin \beta_j + (z_i - z_j) \cos \beta_j;$$

$$A_{11ii} = \frac{(2-\nu)\sqrt{2G}}{\pi(1-\nu)\sqrt{S_i}};$$

$$A_{22ii} = \frac{(2-\nu)\sqrt{2G}}{\pi(1-\nu)\sqrt{S_i}};$$

$$A_{33ii} = \frac{2\sqrt{2G}}{\pi(1-\nu)\sqrt{S_i}};$$

$$A_{12ii} = A_{13ii} = A_{21ii} = A_{23ii} = A_{31ii} = A_{32ii} = 0;$$

$\gamma = \beta_i - \beta_j$ – наклон i -го элемента относительно j -го;

β_i – угол i -го элемента с осью OY ;

x_i, y_i, z_i – координаты i -го элемента;

ΔS_i – площадь i -го элемента.

Таблица 1. Таблица значений функции, зависящей от угла наклона плоскости трещины к полупространству

α	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{\pi}{6}$
$f(\alpha)$	0,6501	0,6505	0,6515	0,6435	0,6561	0,6663	0,6659	0,6769	0,746

В работе было рассмотрено полупространство и трещина размером $m \times 1$ под углом α к полупространству. На обоих берегах по всей поверхности трещины действовали нормальные напряжения σ_{zz} (рисунок 2).

Коэффициент интенсивности напряжений первого рода определялся по следующей формуле [2]:

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{G}{2(1-\nu)} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{D_n}{\sqrt{1-s}}, \quad (6)$$

где G – модуль сдвига;

ν – коэффициент Пуассона;

D_n – разрыв смещений в нормальном направлении;

l – длина трещины.

Аппроксимация D_n в окрестности вершины трещины осуществлялась на основе параболической зависимости. Коэффициент интенсивности напряжений определялся для точки C , приведенной на рисунке 3.

При моделировании данной задачи были использованы следующие исходные данные:

– коэффициент Пуассона $\nu=0,3$, модуль Юнга $E=30000$ МПа;

– размеры плоскости 80×80 мм;

– размеры трещины 40×20 мм ($m=40$ мм, $l=20$ мм);

– разбивка плоскости 10×10 элементов;

– разбивка трещины 15×10 элементов;

– угол поворота полуплоскости

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{24}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{24}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{6}.$$

В результате расчетов был разработан коэффициент интенсивности напряжений первого рода от угла наклона прямоугольной трещины к полупространству

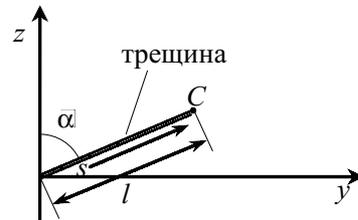


Рисунок 3. Схема вычисления коэффициента интенсивности напряжений первого рода

$$K_I = \sigma \pi^{1/2} S^{1/4} f(\alpha), \quad (7)$$

где S – напряжение на поверхности прямоугольной трещины;

$S = m \cdot l$ – площадь поверхности трещины;

$f(\alpha)$ – функция, зависящая от угла наклона плоскости трещины к полупространству, приведенная в таблице 1.

Анализ приведенных результатов показал, что уменьшение угла наклона трещины к полупространству увеличивает коэффициент интенсивности напряжений первого рода.

Сопоставление результатов расчетов осуществлялось с коэффициентом интенсивности напряжений первого рода для полупространства с ортогональной трещиной [3]:

$$K_I = 0,65 \sigma_0 \pi^{1/2} S^{1/4}, \quad (8)$$

где S – площадь поверхности трещины.

В результате сравнения данных, представленных в таблице 1, с соотношением (8) и формулой (7) можно сделать вывод об адекватности полученных результатов.

Таким образом, в результате расчетов были установлены коэффициенты интенсивности напряжений первого рода для полупространства с трещиной под углом α .

Список использованной литературы:

- Герике Б.Л. Математические модели циклического разрушения крепких горных пород дисковым инструментом. / Б.Л. Герике, Ю.Г. Полкунов, П.Б. Герике. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2001. – 171 с.
- Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А.М. Линьков. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
- Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2 т. Т.2 / под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 453 с.