УДК 330.4

Светуньков С.Г., Абдуллаев И.С.
Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В статье рассматривается одна из важных проблем моделирования экономической динамики – выбор наилучшей производственной функции, описывающей производственные процессы, протекающие в хозяйственных системах. Показывается, что чаще всего применяемые для этой цели «неоклассические функции» являются лишь одним и не самым лучшим классом моделей.

Ключевые слова: моделирования экономической динамики, производственные функции и процессы, хозяйственные системы.

Моделирование экономической динамики сегодня является одним из важнейших направлений современной экономической науки. В ее распоряжении имеются многочисленные модели, с той или иной степенью достоверности описывающие реальную экономическую динамику. В основе всех моделей лежат два достижения экономической мысли первой половины прошлого века – производственная функция Кобба - Дугласа как модель, описывающая трансформацию ресурсов в производственный результат, и модель распределения валового продукта Кейнса, описывающая трансформацию производственного результата в ресурсы. Объединение этих двух моделей позволяет построить замкнутую систему уравнений и неравенств, с помощью которой и моделируется динамика изменения основных экономических показателей. На этом принципе сегодня построено огромное множество моделей экономической динамики, в каждой из которых ее автор предлагает те или иные ограничения на исходные переменные, строит собственные агрегированные модели взаимосвязи между исходными переменными и результатами.

В этой статье мы рассмотрим в основном одну проблему повышения эффективности построения моделей экономической динамики, связанную с формой модели производственной функции. Мы покажем, что форма этой модели оказывает решающее влияние на моделирование траектории экономического роста, хотя ученые игнорируют эту проблему.

Чаще всего в моделях экономической динамики используют производственную функцию, называемую «неоклассической».

Производственная функция $Q = F(K, L)$ называется неоклассической, если она является гладкой и удовлетворяет следующим условиям:

1) при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0, \tag{1}$$

2) с ростом ресурсов выпуск растет, что означает положительность первых производных:

$$\frac{dQ}{dK} > 0, \ \frac{dQ}{dL} > 0, \tag{2}$$

3) с увеличением ресурсов скорость роста выпуска замедляется, что означает отрицательность второй производной:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0, \ \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0, \tag{3}$$

4) при неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет, то есть:

$$F(K, \infty) = F(\infty, L) = \infty. \tag{4}$$

Всем указанным условиям соответствует степенная производственная функция с положительными показателями степени:

$$Q_t = AK_t^{\alpha} L_t^{\beta}, \tag{5}$$

где A – коэффициент «нейтрального технического прогресса»;

α, β – показатели степени.

Действительно, вычислим первые производные функции (5) по каждому ресурсу:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial(AK^{\alpha}L^{\beta})}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial(AK^{\alpha}L^{\beta})}{\partial L} = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}. \tag{8}$$

Легко заметить, что эти первые производные в соответствии с требованиями к «неоклассическим производственным функциям» (2) будут положительными только в условиях, когда

$$\alpha > 0, \beta > 0. \tag{9}$$

То есть модель степенной производственной функции будет отнесена к «неоклассическому типу», если показатели степени отрицательны, – в противном случае модель перестает быть «неоклассической» и отвергается учеными при моделировании экономической динамики как не имеющая права на существование.

Частные производные выпуска по факторам в теории производственных функций называются *предельными продуктами* или *пре-*

дельными (маржинальными) эффективностями ресурсов и представляют собой прирост выпуска на малую единицу прироста ресурса.

Из (7) следует:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{K} = \alpha \frac{Q}{K}, \qquad (10)$$

то есть предельный продукт фондов или предельная фондоотдача (предельная эффективность фондов) пропорциональна средней фондоотдаче (Q/K) с коэффициентом пропорциональности α.

Из (8) следует аналогичный вывод относительно трудовых ресурсов:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \beta \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = \beta \frac{Q}{L}, \qquad (11)$$

то есть предельный продукт труда или предельная производительность (предельная эффективность труда) пропорциональна средней производительности труда (Q/L) с коэффициентом пропорциональности β.

Кстати, из (10) легко получить коэффициент эластичности производства по капитальному ресурсу:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q} = \alpha, \qquad (12)$$

а из (11) легко вычислить расчетную формулу коэффициента эластичности производства по труду:

$$\varepsilon_L = \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \beta. \qquad (13)$$

Так как показатели степени для «неоклассической функции» положительны, то и коэффициенты эластичности производства по каждому из ресурсов, моделируемые рассматриваемой функцией, также будут положительны.

Теперь вычислим вторые производные степенной производственной функции (5):

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = A\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\beta}, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = A\beta(\beta-1)K^{\alpha}L^{\beta-2}. \qquad (15)$$

Модель производственной функции имеет право носить имя «неоклассической», если ее вторые производные отрицательны. Так как показатели степени α и β положительны, то отрицательность каждой из вторых производных (14) и (15) достигается только в том случае, когда эти показатели меньше единицы. Теперь ясно, что степенная производственная функция (5) будет считаться «неоклассической», если для ее показателей степени выполняются условия:

$$0 < \alpha < 1;\ 0 < \beta < 1 \qquad (16)$$

Производственная функция Кобба - Дугласа, показатели степени которой равны:

$$0 < \alpha < 1;\ 0 < 1-\alpha < 1, \qquad (17)$$

отвечает всем указанным требованиям «неоклассической производственной функции» и является одной из ее разновидностей.

Обычно на этом изучение свойств «неоклассической производственной функции» и завершается, но мы рассмотрим, какому типу производства соответствует класс этих функций, то есть дадим экономическую интерпретацию тем производственным процессам, которые моделируются этими функциями. Для экономической интерпретации «неоклассической производственной функции» вспомним из экономической теории такое понятие, как «отдача ресурса». Там доказывается следующий закон ее изменения. С ростом привлекаемого ресурса ресурсоотдача сначала возрастает, затем остается постоянной, а затем – уменьшается. Все это формируется как закон изменения ресурсоотдачи.

Каким случаям производства соответствует тот или иной тип ресурсоотдачи?

1. Ресурсоотдача возрастает, когда производство еще не доведено до уровня номинальных значений. Оборудование задействовано не полностью, поэтому увеличение ресурса приводит к более значительному производству объема продукта. При этом производство еще не эффективно, но себестоимость на промежутке увеличивающейся ресурсоотдачи уменьшается.

2. Ресурсоотдача постоянна. Этот участок зависимости производства от количества привлекаемого ресурса характеризует наиболее эффективное использование данного ресурса. Небольшое увеличение или уменьшение используемого ресурса приводит к прямо пропорциональному увеличению или уменьшению объема производства. Это участок максимальной ресурсоотдачи. При этом себестоимость производства минимальна, поскольку производственные мощности, использующие этот ресурс, загружены полностью.

3. Ресурсоотдача уменьшается. Каждый вновь привлекаемый ресурс уменьшает степень

его отдачи, объем производства растет в меньшей степени, чем растут объемы привлекаемых ресурсов. Себестоимость увеличивается. Это участок работы с перегрузкой производственных мощностей, когда эффективность работы производства не высока, а себестоимость растет с ростом объема привлекаемых ресурсов.

Переведем теперь закон изменения ресурсоотдачи на математический язык. Ресурсоотдача r характеризует количество произведенной продукции Q при использовании некоторого объема ресурса R и представляет собой их отношение:

$$r = \frac{Q}{R}. \tag{18}$$

Возрастающая или убывающая ресурсоотдача есть показатель динамический, когда расчетная величина (18) сравнивается с такой же, но при большем объеме привлекаемого ресурса. Поэтому обозначим небольшое приращение ресурсов через ΔR, а небольшое приращение объемов производства – через ΔQ. Тогда объем произведенной продукции при увеличивающемся количестве ресурсов $R+\Delta R$ будет соответствовать величине $Q+\Delta Q$. Ресурсоотдача при этой величине ресурсов легко определяется:

$$r_{\Delta} = \frac{Q+\Delta Q}{R+\Delta R}. \tag{19}$$

Если теперь от ресурсоотдачи (18) вычесть ресурсоотдачу (19), то по ее знаку можно будет судить о том, возрастает ресурсоотдача, остается постоянной или убывает. Сделаем это:

$$r_{\Delta} - r = \frac{Q+\Delta Q}{R+\Delta R} - \frac{Q}{R} = \frac{\Delta QR - \Delta RQ}{(R+\Delta R)R}. \tag{20}$$

Поскольку знаменатель по определению положителен, направление изменения ресурсоотдачи определяется знаком числителя. Если ресурсоотдача возрастает, то числитель положителен; если ресурсоотдача постоянна, то числитель равен нулю, а если ресурсоотдача уменьшается, то числитель отрицателен. Рассмотрим каждый из этих случаев:

1) ресурсоотдача возрастает. Тогда числитель (20) положителен:

$$\Delta QR - \Delta RQ > 0. \tag{21}$$

Отсюда со всей очевидностью следует, что:

$$\Delta QR > \Delta RQ \to \frac{\Delta Q}{\Delta R}\frac{R}{Q} = \varepsilon_R > 1. \tag{22}$$

Это означает, что для участка, когда производство еще не доведено до номинального уровня и ресурсоотдача возрастает, коэффициент эластичности производства по ресурсу больше единицы;

2) ресурсоотдача остается постоянной. Тогда числитель (20) равен нулю:

$$\Delta QR - \Delta RQ = 0. \tag{23}$$

Отсюда следует, что:

$$\Delta QR = \Delta RQ \to \frac{\Delta Q}{\Delta R}\frac{R}{Q} = \varepsilon_R = 1. \tag{24}$$

То есть для участка, когда производство доведено до номинального уровня и является эффективным, коэффициент эластичности производства по ресурсу равен единице;

3) ресурсоотдача уменьшается. Тогда числитель (20) меньше нуля:

$$\Delta QR - \Delta RQ < 0. \tag{25}$$

Тогда:

$$\Delta QR < \Delta RQ \to \frac{\Delta Q}{\Delta R}\frac{R}{Q} = \varepsilon_R < 1. \tag{26}$$

Это свидетельствует о том, что если наблюдается перепроизводство, а именно для него характерна убывающая ресурсоотдача, производство является неэффективным, а коэффициент эластичности производства по ресурсу меньше единицы.

Теперь, зная, какой участок ресурсоотдачи и, соответственно, уровень эффективности производства отражают коэффициенты эластичности по ресурсу, можно по этим коэффициентам осуществлять диагностику экономического процесса. Это поможет нам дать более расширенную интерпретацию свойств «неоклассической производственной функции». Поскольку для этой функции, как это было показано выше, коэффициент эластичности по капиталу равен показателю степени β при этом ресурсе (12), а коэффициент эластичности по труду равен показателю степени α, в который возводится величина трудового ресурса (12), а сами эти коэффициенты положительны, но меньше единицы (16), то это соответствует последнему, третьему участку закона ресурсоотдачи – то, что называют «законом убывающей ресурсоотдачи».

Таким образом, «неоклассическая производственная функция» описывает исключительно участок убывающей отдачи [2]. Этот участок, как только что было показано, характеризует такое производство, при котором производственные мощности работают с перегрузкой, привлекаемые ресурсы используются неэффективно, а себестоимость с привлечением ресурсов увеличивается.

Поэтому, *когда исследователь заявляет, что он априорно при моделировании экономической динамики будет использовать «неоклассическую производственную функцию», то это означает, что он заведомо объявляет о том, что рассматриваемый им производственный процесс является неэффективным, оборудование работает на износ, объемы производства превышают номинальные, а себестоимость производства выше своего оптимального значения!*

Поскольку только что было доказано, что «неоклассическая функция» и функция Кобба - Дугласа, являющаяся одной из ее разновидностей, отражают неэффективное производство, возникает вполне логичный вопрос: так какая же функция моделирует нормальные условия производства. Ответ на этот вопрос следует из анализа взаимосвязи коэффициентов эластичности с различными участками ресурсоотдачи (22), (24) и (26). Для моделирования различных производственных ситуаций необходимо использовать модель

Таблица 1. Данные экономического развития экономики Хорезмской области Узбекистана

Год	Инвестиции, млн. сумм.	Валовой региональный продукт, млн. сумм.	Основные фонды, млн. сумм.	Численность занятых, тыс. чел.
1997	12 354,00	140,6	609663,0	442,00
1998	17 767,00	145,60	624370,7	449,00
1999	21 670,10	152,20	640747,5	456,00
2000	25 839,50	144,30	671715,9	467,20
2001	52 614,20	148,60	713787,1	468,30
2002	68 966,90	283,50	755740,8	478,30
2003	45 404,70	372,80	799915,6	490,40
2004	123 802,60	483,20	930449,0	506,60
2005	63 263,50	562,00	1010865,4	522,30
2006	113 406,30	930,20	1091063,0	538,00
2007	114 503,20	1 003,70	1230510,0	547,00

(5) без введения каких-либо ограничений на показатели степени.

Тогда степенная производственная функция (5) будет диагностировать производство, близкое к оптимальному, если показатели степени α и β равны единице (или в случае эконометрических оценок – близки к единице). Отдача капитального и трудового ресурса, как следует из (24), при таких значениях показателей степени является постоянной, а это характеризует уровень эффективного производства.

Если показатели степени будут больше единицы, то это характеризует ситуацию возрастающей отдачи ресурсов, недозагруженности производственных мощностей и уменьшающейся с ростом привлекаемых ресурсов себестоимости производства.

Но поскольку мы предлагаем снять все ограничения на коэффициенты степенной модели, то возникает необходимость интерпретации случая, когда некоторые или все показатели степени будут отрицательными. Какому типу производства будет соответствовать этот случай?

Для ответа на этот вопрос обратимся вновь к (22), (24) и (26). Отрицательность показателя степени свидетельствует о том, что эластичность ресурса, который возводится в отрицательную степень, также является отрицательной. Это означает, что увеличение данного ресурса только ухудшает производство, поскольку объемы его уменьшаются. Следовательно, отрицательность какого-либо показателя степени в степенной производственной функции (5) означает, что моделируемый процесс характеризуется крайним проявлением закона убывающей ресурсоотдачи, когда производство является крайне неэффективным и для его улучшения необходимо либо сокращать объем привлекаемого ресурса, либо использовать инновационные процессы, меняющие технологию производства.

Теперь построим модель производственной функции на примере статистических данных об экономической динамике Хорезмской области Узбекистана за 1997–2007 год. Исходные данные, собранные по данным Госкомстата Узбекистана, приведены в таблице 1.

Для того чтобы построить модель производственной функции, эти данные были приведены к безразмерным величинам.

Попытка построить производственную функцию Кобба - Дугласа на этих данных оказалась бессмысленной, поскольку модель, коэффициенты которой были найдены с помощью метода наименьших квадратов (МНК), имеет вид:

$$Q_t=0{,}9471K_t^{4{,}0021}L_t^{-3{,}0021}, \qquad (27)$$

а показатели степени функции Кобба - Дугласа, как известно, лежат в пределах от нуля до единицы (24).

Простая степенная производственная функция (5), коэффициенты которой также были найдены с помощью МНК по безразмерным данным таблицы 1, имеет такой вид:

$$Q_t=0{,}87\ K_t^{2{,}17766}\ L_t^{3{,}10876}. \qquad (28)$$

Значит, эластичность использования капитальных ресурсов за 1997–2007 годы в Узбекистане составила 2,17766 единицы, а эластичность использования трудовых ресурсов – 3,10876 единицы. В соответствии с ранее полученными результатами (22) это говорит о том, что производственные мощности экономики Хорезмской области существенно недозагружены, поэтому увеличение любого ресурса приведет к росту эффективности производства.

Поскольку в бывшем СССР в качестве наилучшего направления развития производства считались концентрация и высокая специализация производств, что вполне соответствовало принципам централизованного планового хозяйства, то применительно к Узбекистану, например, это вылилось в ярко выраженную сельскохозяйственную ориентацию республики на выращивание, сбор и первичную переработку хлопка-сырца. После развала СССР Узбекистану и его республикам досталась несбалансированная экономика. Хорезмская республика представляет собой яркий пример этого. Капиталовложения в отрасли экономики, не связанные с выращиванием и первичной переработкой хлопка, поэтому дают столь высокий эффект, который отражается показателями степени производственной функции (28).

Использование полученной модели производственной функции для многовариантных прогнозов оказалось неприемлемым – высокие показатели степени приводят в расчетах к тому, что, например, удвоение капитального ресурса влечет за собой увеличение объема производства регионального продукта почти в пять раз, что следует признать маловероятным сценарием.

Для удовлетворительного решения проблемы моделирования экономической динамики воспользуемся предложением об использовании в моделировании производственных функций комплексных переменных [3]. Из многочисленных видов моделей комплексных переменных будем использовать одну из самых простых – степенную производственную функцию комплексного аргумента с действительными коэффициентами, имеющую вид:

$$Q_t = A(K_t + iL_t)^{\alpha}. \qquad (29)$$

Оценка коэффициентов этой модели на данных Хорезмской области позволила получить такие значения производственной функции:

$$Q_t = 0{,}026(K_t + iL_t)^{4{,}28}. \qquad (30)$$

На наш взгляд, эта функция лучше всего описывает реальный процесс хозяйствования в Хорезмской области, что и подтверждают расчеты по модели Солоу, построенной для этой экономической системы.

Следует, правда, указать на то, что степенная комплекснозначная функция многолистна, и это особенно ярко проявляется при высоких показателях степени, как в нашем случае, но в тех пределах, в каких изменяются исходные переменные, это свойство не проявляется, и поэтому мы используем в своих расчетах именно эту модель.

Список использованной литературы:

1. Кейнс Дж. М. Избранные произведения. – М.: Экономика, 1993. – С. 224 – 518.
2. Светуньков С.Г. Моделирование инновационной динамики // Инновации, конкуренция и предпринимательство / Под ред. С.Г. Светунькова.– СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. – С. 18 – 34.
3. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 136 с.

Статья выполнена при поддержке РГНФ грант № 08-02-00212а «Инновации, предпринимательство и конкуренция: системное исследование взаимосвязи»