УДК 530.145

Якунин И.Н., Бердинский В.Л.
ГОУ ВПО «Оренбургский государственный университет»

КВАНТОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ СОСТОЯНИЯ КАК ДВИЖУЩАЯ СИЛА КОГЕРЕНТНОЙ ЭВОЛЮЦИИ И «НАГРЕВА» ИЗМЕРЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

На примере двухуровневой системы показано, что измерительный прибор индуцирует квантовую эволюцию в измеряемой системе, если оператор измеряемой величины не коммутирует с гамильтонианом, что происходит даже если в начальный момент система находится в основном состоянии. Предложено решение задачи о переходе системы в ортогональное возбужденное состояние. Предложены два вида квантовой эволюции: осциллирующая и кинетическая (неосциллирующая), – а также условия их проявления. Утверждается, что измерительный прибор способен увеличивать энергию невырожденной системы («нагревать» ее).

Ключевые слова: квантовые измерения, квантовая динамика, двухуровневая система.

Развитие спинтроники [1] и наноэлектроники [2] сделало актуальной и практически важной классическую проблему квантовой механики – влияние измерительного прибора на состояние квантовой системы, в том числе и вопрос о «физическом» происхождении коллапса волновой функции при измерении квантового состояния. Примером нетривиального влияния процесса измерения и измерительного прибора на эволюцию квантовой системы является квантовый эффект Зенона [3, 4]. Суть этого эффекта заключается в замедлении эволюции квантового объекта в результате повторных измерений состояния. В пределе непрерывных измерений возможно эффективное выключение квантовых переходов и «замораживание» системы в исходном (даже возбужденном) состоянии. Недавно в работе [5] было показано, что процесс квантовых измерений способен влиять на термодинамические свойства измеряемой системы и термостата, например не температуру и энтропию. Цель данной работы – показать, что процесс измерения может быть движущей силой этой эволюции, и рассчитать вероятность перехода в возбужденное состояние.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

1. Получить аналитическое решение стохастического уравнения Неймана - Лиувилля для двухуровневой системы.

2. С помощью найденного решения рассчитать кинетику населенности возбужденного уровня.

3. Определить аналитический вид возможного сигнала.

В работах [6, 7] показано, что аналогом процесса измерения являются селективные процессы, т.е. такие процессы, развитие которых зависит от состояния системы в данный момент. Поэтому теория квантовых измерений важна и для построения теорий необратимых селективных процессов и реакций, например для спин-селективных реакций.

Рассмотрим двухуровневую систему, изначально находящуюся в одном из собственных состояний гамильтониана H, например в основном состоянии $|\psi_1\rangle$. Пусть $\mathrm{H}|\psi_1\rangle = \mathrm{E}_1|\psi_1\rangle$ и $\mathrm{H}|\psi_2\rangle = \mathrm{E}_2|\psi_2\rangle$, где $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ – ортогональные собственные функции гамильтониана, а E_1 и E_2 – соответствующие значения энергии, и $E_2 > E_1$. Очевидно, что невозмущенная прибором система, находясь в собственном состоянии гамильтониана, не эволюционирует. Она будет оставаться в этом состоянии бесконечно долго, а вероятность обнаружить частицу в другом собственном состоянии равна нулю $W_2=0$.

Пусть измерительный прибор селективно (с вероятностью w) детектирует и поглощает из ансамбля только частицы, находящиеся в произвольном суперпозиционном состоянии $|\psi_3\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$, которое не является собственным состоянием гамильтониана H. В качестве $|\psi_3\rangle$ могут выступать, например, собственные функции оператора проекции спинового момента на произвольную ось, отличную от оси квантования, оператор проекции импульса частицы или кинетической энергии и т.д. В общем случае коэффициенты c_1 и c_2 могут быть комплексными величинами, однако мы здесь ограничимся только действительными значениями.

В данной работе мы придерживаемся традиционных представлений о действии измерительного прибора как «идеального фильтра» [8, 9]. Он селективно реагирует только на частицы, находящиеся в состоянии $|\psi_3\rangle$, необратимо поглощает их и не реагирует на остальные. Взаимодействие квантовых частиц с прибором заставляет описывать измеряемую двухуровневую систему с помощью матрицы плотности.

Состояние ансамбля двухуровневых частиц, взаимодействующих с измерительным прибором, описывается модифицированным уравнением Неймана [10] для матрицы плотности ρ:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\hbar^{-1}[H,\rho] - \frac{w}{2}\{P_3\rho + \rho P_3\}\,. \qquad (1)$$

Здесь $P_3 = |\psi_3\rangle\langle\psi_3|$ – оператор проектирования в суперпозиционное состояние. Вероятность w является мерой «эффективности» измерительного прибора. Если обе величины c_1 и c_2 не равны нулю, то оператор P_3 не коммутирует с гамильтонианом H. Коммутатор этих операторов

$$[H,P_3] = c_1 c_2 \Delta E\left(|\psi_1\rangle\langle\psi_2| - |\psi_2\rangle\langle\psi_1|\right) \qquad (2)$$

имеет вид оператора переходов из состояния $|\psi_1\rangle$ в $|\psi_2\rangle$ и обратно, и $\Delta E = E_2 - E_1 = \hbar\Delta\omega$.

Уравнение (1) описывает необратимый процесс, в котором число частиц не сохраняется, поэтому матрица плотности ρ нормирована на 1 только в начальный момент t=0 и $\rho(0) = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$. Однако если учесть частицы, поглощенные прибором, то общее число частиц в системе сохраняется в течение всего процесса эволюции и измерения. Условие нормировки выполняется для полной матрицы плотности $\rho_f(t) = \rho(t) \oplus \rho'(t)$, где $\rho'(t)$ – матрица плотности частиц, поглощенных измерительным прибором.

Уравнение (1) имеет точное формальное решение

$$\rho(t) = \exp\left(B^* t\right)\rho(0)\exp(Bt) \qquad (3)$$

где $B = i\frac{H}{\hbar} + \frac{wP_3}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B)I + A$,

$$B^* = -i\frac{H}{\hbar} + \frac{wP_3}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(B^*\right)I + A^* \cdot$$

Здесь A, A^*, B и B^* – неэрмитовы матрицы, описывающие обратимую и необратимую эволюцию системы с селективным выбыванием частиц, а I – единичная матрица. При таком представлении матриц B и B^* неэрмитовы матрицы A и A^* оказываются бесследовыми матрицами, размерность которых 2×2; они обладают свойством

$$\exp(At) = \mathrm{ch}\left(\sqrt{a}\,t\right) + \frac{A}{\sqrt{a}}\mathrm{sh}\left(\sqrt{a}\,t\right) \qquad (4)$$

где $a = -\det(A) = \left(\frac{w^2}{16} - \frac{\Delta\omega^2}{4}\right) + i\frac{w\Delta\omega}{4}c_1 c_2$

Обычно для решения эволюционных уравнений типа (1) используют теорию линейного отклика [11-15], справедливую лишь при выполнении условия $w \ll \Delta E/\hbar$. Представление (4) позволяет получать точные аналитические решения эволюционного уравнения (1), в том числе и для нетривиального и наиболее интересного случая $w > \Delta E/\hbar$ [6].

Подстановка выражения (4) в формальное решение (3) позволяет получить точное аналитическое решение уравнения (1) и определить вероятность обнаружения системы в возбужденном состоянии $|\psi_2\rangle$ для любых соотношений w и $\Delta\omega$ в том числе и для наиболее интересного случая $w \geq \Delta\omega$:

$$W_2(t) = \langle\psi_2|\rho(t)|\psi_2\rangle =$$

$$= \frac{\langle\psi_2|A|\psi_1\rangle\langle\psi_1|A^*|\psi_2\rangle}{\sqrt{aa^*}}\exp\left(-\frac{w}{2}t\right)\mathrm{sh}\left(\sqrt{a}\,t\right)\mathrm{sh}\left(\sqrt{a^*}\,t\right). \qquad (5)$$

Из формулы (5) следует, что вероятность $W_2(t)$ обнаружения частиц в возбужденном состоянии $|\psi_2\rangle$ не равна нулю; это доказывает, что в результате действия измерительного прибора и измерения частица переходит из исходного основного состояния $|\psi_1\rangle$ в ортогональное возбужденное состояние $|\psi_3\rangle$.

Вводя обозначения

$$\gamma = \sqrt{2\left(D + \frac{w^2}{16} - \frac{\Delta\omega^2}{4}\right)} \qquad (6)$$

и

$$\Omega = \sqrt{2\left(D - \frac{w^2}{16} + \frac{\Delta\omega^2}{4}\right)}, \qquad (7)$$

где

$$D = \sqrt{aa^*} = \left(\left(\frac{w^2}{16} - \frac{\Delta\omega^2}{4}\right)^2 + \frac{w^2\Delta\omega^2}{4}\left(c_1^2 - c_2^2\right)^2\right)^{1/2}, \qquad (8)$$

получим выражение, описывающее временную зависимость появления частиц в возбужденном состоянии $|\psi_3\rangle$:

$$W_2(t) = \frac{w^2 c_1^2 c_2^2}{16D}\left[\exp(-\Gamma t)\left(1 - \exp(-\gamma t)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 4\exp(-wt/2)\sin^2(\Omega t/2)\right] \qquad (9)$$

где $\Gamma = w/2 - \gamma$.

Из формулы (9) следует, что вероятность квантового перехода пропорциональна квадрату «эффективности» измерения w. Если же $w = 0$ (отсутствие квантовых измерений и проектирования), то вероятность $W_2(t)$=0 и система (частица) все время остается в исходном состоянии $|\psi_1\rangle$.

Изменение населенности состояния $|\psi_2\rangle$ описывается двумя слагаемыми. Первое описывает «кинетическое» появление частиц в состоянии $|\psi_2\rangle$ и их последующее исчезновение в результате селективного поглощения измерительным прибором (проявляется при больших значениях t и характеризуется сравнительно медленным убыванием). Второе (осциллирующее)

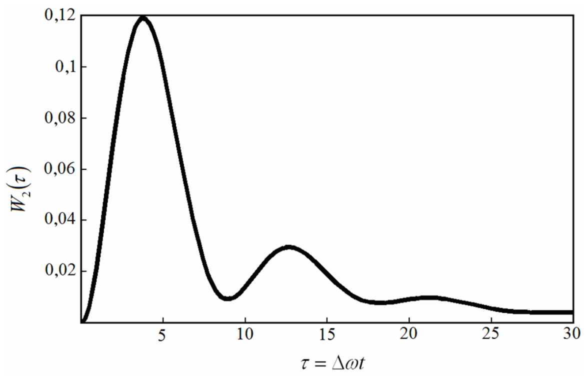

Рисунок 1. Изменение населенности $W_2(t)$ возбужденного состояния $|\psi_2\rangle$ в результате действия измерительного прибора при w/Dw=0,39, c_1^2=0,85 и c_2^2=0,15. Представлен начальный участок с ярко выраженными квантовыми биениями.

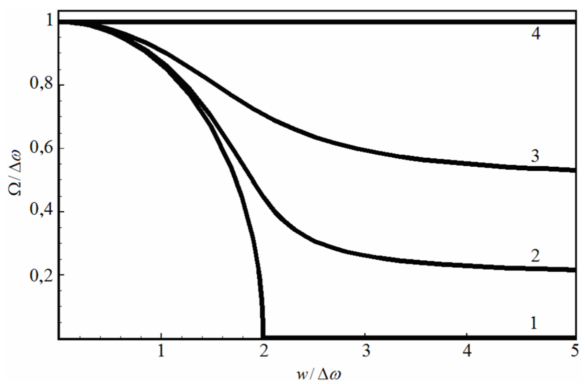

Рисунок 2. Зависимость частоты квантовых биений W от эффективности действия измерительного прибора w, состояний $|\psi_3\rangle$ с коэффициентами c_1 и c_2: 1) c_1^2-c_2^2=0; 2) $\left(c_1^2-c_2^2\right)^2=0,05$; 3) $\left(c_1^2-c_2^2\right)^2=0,25$; 4) $\left(c_1^2-c_2^2\right)^2=1$.

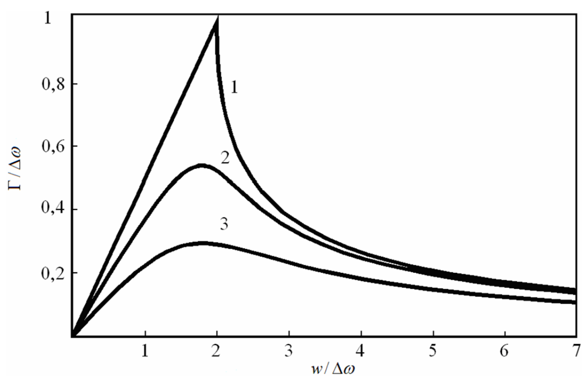

Рисунок 3. Зависимость скорости Г селективного поглощения частиц от эффективности измерения прибора w для разных состояний $|\psi_3\rangle$ с коэффициентами c_1 и c_2: 1) $\left(c_1^2-c_2^2\right)^2=0$; 2) $\left(c_1^2-c_2^2\right)^2=0,05$; 3) $\left(c_1^2-c_2^2\right)^2=0,25$.

слагаемое описывает квантовые биения с частотой Ω и характерным временем затухания $2/w$.

Эти квантовые биения доказывают когерентный характер эволюции системы, индуцированной действием измерительного прибора. Такая эволюция сопровождается появлением недиагональных элементов матрицы плотности $\rho_{12}(t)=\rho_{21}{}^*(t)=\langle\psi_1|\rho(t)|\psi_2\rangle\neq 0$.

На рис. 1 показан характерный график зависимости $W_2(t)$, на котором явно выражены квантовые биения с частотой $\Omega\neq\Delta\omega$. Эти биения экспоненциально затухают со скоростью $w/2$, которая определяется только «эффективностью» поглощающего измерительного прибора. Однако затухание квантовых биений не означает прекращение квантовой эволюции. Она продолжается в «кинетическом» режиме, затухая со скоростью $\Gamma < w/2$.

На рис. 2 показана зависимость частоты квантовых биений Ω от «эффективности» квантового прибора w для разных соотношений коэффициентов c_1 и c_2, то есть для разных состояний $|\psi_3\rangle$. Для всех возможных соотношений c_1 и c_2 частота осцилляций Ω, индуцированных процессом селективного измерения, всегда меньше частоты переходов изолированных систем $\Omega < \Delta\omega$. Уникальной является ситуация, когда $c_1=\pm c_2$. Только в этом случае при $w>\Delta\omega/2$ возможно отсутствие квантовых биений (Ω=0) и чисто «кинетический» режим квантовой эволюции измеряемой системы. Равенство частот $\Omega=\Delta\omega$ возможно, если $|c_1^2-c_2^2|=1$, то есть только в случаях $c_1=1$, $c_2=0$ или $c_1=0$, $c_2=1$. Однако при этом состояние $|\psi_3\rangle$ совпадает либо с основным состоянием $|\psi_1\rangle$, либо с возбужденным $|\psi_2\rangle$. Но в этом случае $W_2(t)\equiv 0$ и переходы в системе невозможны.

На рис. 3 показана зависимость скорости Γ поглощения частиц измерительным прибором от его эффективности w. Видно, что только при $c_1^2=c_2^2$ и $w < 2\Delta\omega$ возможно равенство $\Gamma = w/2$. При любых других соотношениях c_1 и c_2 всегда $\Gamma < w/2$. При $w < 2\Delta\omega$ величина Γ возрастает с ростом w. Однако при $w > 2\Delta\omega$ повышение «эффективности» поглощающего измерительного прибора приводит к парадоксальному уменьшению скорости Γ вместо ее ожидаемого увеличения. Это объясняется своеобразным проявлением эффекта Зенона в кинетических процессах [6]. Поскольку при больших значениях w лимитирующей стадией процесса является квантовая эволюция, переводящая частицы из ортогонального подпространства в состояние $|\psi_1\rangle$, то уменьшение частоты Ω и замедление эволюции приводит к уменьшению скорости поглощения частиц Γ при увеличении эффективности w.

Взаимозависимость величин Ω и γ, а также Γ при селективном поглощении следует из формул (6) и (7). Их произведение равно

$$\gamma\Omega = \frac{w\Delta\omega}{4}\,|c_1^2 - c_2^2|. \qquad (10)$$

Очевидно, что экспериментально вероятность $W_2(t)$ может быть определена только с помощью второго измерительного прибора, природа которого не уточнялась и действие которого не учитывалось в предыдущем рассмотрении.

Таким образом, показано, что с помощью второго измерительного прибора можно определять действие на систему первого прибора. Теперь после того, как мы фактически вычислили показания второго измерительного прибора, следует ответить и на вопрос о том, что же будет показывать первый измерительный прибор? Для ответа на этот вопрос следует найти вероятность нахождения частиц в состоянии $|\psi_3\rangle$, то есть величину:

$$W_3(t) = \langle\psi_3|\rho(t)|\psi_3\rangle = c_1^2\langle\psi_1|\rho(t)|\psi_1\rangle + c_1c_2\big(\langle\psi_1|\rho(t)||\psi_2\rangle + \langle\psi_2|\rho(t)||\psi_1\rangle\big) + c_2^2\langle\psi_2|\rho(t)||\psi_2\rangle \qquad (11)$$

Тогда показания прибора будут пропорциональны величине:

$$\Pi_3(t) = wW_3(t) = \frac{wc_1^2}{2D}\left(\frac{d+e}{2}\right)\exp(-\Gamma t)\left(1 + \frac{d-e}{d+e}\right)\exp(-2\gamma t) + \exp(-wt/2)\big(f\cos(\Omega t) + g\sin(\Omega t)\big) \qquad (12)$$

где $d = D + w^2/16 + \Delta\omega^2/4$, $e = {w\gamma}/{4} + \Omega\Delta\omega/2$, $f = D - w^2/16 - \Delta\omega^2/4$, $g = w\gamma/4 - \gamma\Delta\omega/2$.

На рис. 4 изображен график временной зависимости $W_3(t)$, то есть величина сигнала, который должен показать измерительный прибор. В начальный момент времени включения прибора $W_3(t=0) = c_1^2 = |\langle\psi_1|\psi_3\rangle|^2$. Из формулы (12) следует, а на рис. 4 отчетливо видно, что в показаниях прибора тоже могут проявляться затухающие квантовые биения. Частота осцилляций $W_3(t)$ совпадает с частотой квантовых биений вероятности $W_2(t)$ и равна Ω. При $t > 2/w$ зависимость $W_3(t)$ может быть описана экспоненциально затухающей функцией с показателем Γ. Это затухание соответствует поглощению частиц измерительным прибором.

Влияние селективно поглощающего измерительного прибора на состояние частиц, остающихся в ансамбле, объясняется следующим образом. Условие полноты для двухуровневой системы

$$I = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| = |\psi_3\rangle\langle\psi_3| + |\psi_4\rangle\langle\psi_4|, \qquad (13)$$

где $|\psi_4\rangle$ – вектор состояния, ортогональный $|\psi_3\rangle$, позволяет представить уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i\hbar^{-1}[H,\rho] - w\rho + wP_4 + \frac{w}{2}[P_4\rho P_3 + P_3\rho P_4], \qquad (14)$$

где $P_4 = |\psi_4\rangle\langle\psi_4|$.

Из формулы (14) следует, что действие такого измерительного прибора можно представить как поглощение всех частиц и одновременно возвращение в измеряемую систему частиц в состоянии $|\psi_4\rangle$. Именно поток таких «отраженных» частиц осуществляет обратную связь между измерительным прибором и измеряемой системой. Так как исходное состояние системы соответствует минимальной ее энергии, то переход в любое другое состояние будет соответствовать увеличению энергии **E** измеряемой системы (ее «нагреванию»). Если E_1=0, то увеличение энергии системы **E** можно представить как

$$\mathbf{E} = E_2\rho_{22}(t).$$

Таким образом, показано, что процесс селективных измерений посредством поглощающего прибора способен индуцировать квантовую эволюцию в измеряемой системе, даже в том случае, если она изначально находилась в основном собственном состоянии. Для этого необходимо, чтобы оператор измеряемой величи-

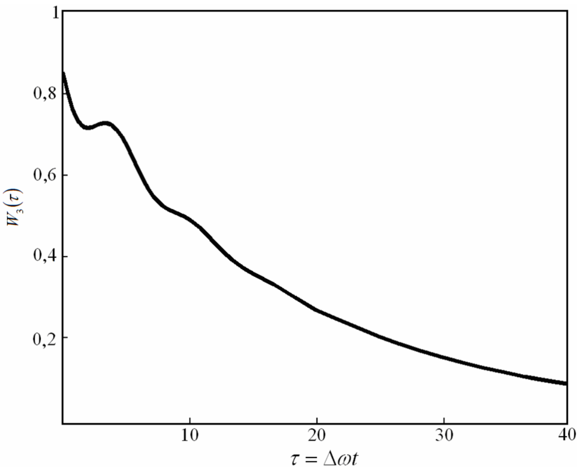

Рисунок 4. Характерный пример зависимости «сигнала» измерительного прибора, пропорционального вероятности W_3 обнаружить квантовую систему в состоянии $|\psi_3\rangle$. Здесь w=0,39, c_1^2=0,85.

ны не коммутировал с гамильтонианом измеряемой системы.

Выводы:

Для достижения цели в работе поставлены и решены задачи:

1. Получено аналитическое решение стохастического уравнения Неймана - Лиувилля для двухуровневой системы без использования приближений.

2. Рассчитана кинетика населенности верхнего возбужденного уровня. Она включает осциллирующий и неосциллирующий режимы квантовой эволюции, первый из которых затухает быстрее первого, проявляющегося в виде продолжительного убывающего сигнала.

3. Выведена временная зависимость временного сигнала прибора, изображенная на рис. 4.

Список использованной литературы:

1. Awshalom D.D. Semiconductor, Spintronics and Quantum Computation Springer. Berlin, 2002.
2. Щука А.А. Наноэлектроника. СПб.: Питер, 2007.
3. Менский М.Б. Квантовые измерения и декогеренция. М.: Физматлит, 2001.
4. Misra B. and Sudarshan E.C.G. The Zeno's paradox in quantum theory. The Zeno's paradox in quantum theory // J. Math. Phys., 1977.-V. 18.-P. 756-165.
5. Frez N., Gordon G., Nest M. et. all. Thermodynamical control by frequent quantum measurements //Nature, 2008. – V. 452. – P. 724-727.
6. Якунин И.Н., Бердинский В.Л. Химический эффект Зенона и его проявления // ДАН, 2008. – Т. 421. – С. 163-165.
7. Kominis I.K. Quantum Zeno effect in radical-ion-pair recombination reactions. [Электронный ресурс]. – 2008. – Режим доступа: http://Arxiv.org/abc/0804.3503.
8. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
9. Мессиа А. Квантовая механика. М.: Наука. 1978.
10. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966.
11. Korotkov A.N. Continuous quantum measurement of a double dot // Phys. Rev. B., 1999. – V. 60. – P. 5737-5752.
12. Averin D.V. Quantun Noise in Mesoscopic Physics, edited by Nazarov Yu.V., Kluwer. Dordrecht, 2003.
13. Clerk A.A., Girvin S. M. and Stone A.D. Quantum-limited measurements and information in mesoscopic // Phys. Rev. B., 2003. – V. 67. – 165324.
14. Jordan A.N. and Buttiker M. Beliaev damping of quasiparticles of Bose-Einstein condensate // Phys. Rev. Lett., 2005. – V. 89. – 220401.
15. Korotkov A.N. and Jordan A.N. Updoing a weak quantum measurement of solid-state qubit // Phys. Rev. Lett., V.97. – 2006. – 166805.