Ивашкина Г.А.
ГОУ ВПО «Оренбургский государственный университет»

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА – ДАРБУ С ПАРАМЕТРАМИ $\alpha>0$, $\beta<0$

Задачи со смещением были впервые поставлены Нахушевым А.М. [6]. Для уравнения $U_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}(U_\eta-U_\xi)=0 \;\; -\frac{1}{2}<\beta<0$ задача со смещением была решена в работе [5], причем в работе были использованы операторы дробного порядка интегрирования и дифференцирования в смысле Лиувилля [1].

В данной работе поставлена задача со смещением с операторами Saigo [3, 4] для более широкого спектра параметров α и β.

В работе использовано общее решение уравнения Эйлера – Дарбу, полученное автором в работе [7].

Рассмотрим уравнение

$$U_{\xi\eta}+\frac{\alpha}{\eta-\xi}U_\xi-\frac{\beta}{\eta-\xi}U_\eta=0, \qquad (1)$$

где $\alpha>0$, $\beta<0$.

Для нахождения общего решения будем использовать два основных свойства уравнения Эйлера – Дарбу.

1. Если ввести новую функцию

$$U(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\,V(\xi,\eta),$$

то уравнение (1) перейдет в уравнение

$$V_{\xi\eta}-\frac{1-\beta}{\eta-\xi}V_\eta+\frac{1-\alpha}{\eta-\xi}V_\xi=0. \qquad (2)$$

Если через Z(a, b) обозначить любое решение уравнения (1), то в силу (2)

$$z(\alpha,\beta)=(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}z(1-\beta,1-\alpha). \qquad (3)$$

2. Если Z(a, b) любое решение уравнения (1), то

$$\frac{\partial z(\alpha,\beta)}{\partial\xi}=z(1+\alpha,\beta),\quad \frac{\partial z(\alpha,\beta)}{\partial\eta}=z(\alpha,1+\beta). \qquad (4)$$

Используя (3) и (4), можно записать

$$z(\alpha,\beta)=\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}z(\alpha-m,\beta)=$$

$$=\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+m}\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}z(1-\beta-n,1-\alpha+m),$$

где

$$z(1-\beta-n,1-\alpha+m)=$$

$$=\chi_1(\eta-\xi)^{\alpha+\beta+n-m-1}\int_0^1\phi(\xi+(\eta-\xi)t)t^{n+\beta-1}(1-t)^{-1-m+\alpha}\alpha t+$$

$$\chi_2\int_0^1\psi(\xi+(\eta-\xi)t)t^{m-\alpha}(1-t)^{-\beta-n}dt \qquad (5)$$

(здесь 0<a-m<1, 0<b+n<1, m, nON).

Введем вспомогательные функции

$$\phi(\xi)=\int_0^\xi T(z)(\xi-z)^\ell dz,\quad \psi(\xi)=\int_0^\xi G(z)(\xi-z)^\delta dz.$$

После ряда преобразований получим общее решение уравнения (1).

(Эти преобразования приведены в работе [1].)

$$U(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{\ell-m}\int_0^\xi T(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{m-\ell}F(m-\ell,\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t})dt+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\ell-m+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+\ell-m+\alpha)}(\eta-\xi)^{\ell-m}$$

$$\int_\xi^\eta T(t)(\frac{\eta-t}{\eta-\xi})^{\alpha-m+\ell}F(1-\beta,\alpha;\alpha-m+\ell;\frac{\eta-t}{\eta-\xi})dt+(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+\delta}$$

$$\int_0^\xi G(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-\delta}F(-\delta,1-\beta;2-\alpha-\beta;$$

$$\frac{\eta-\xi}{\eta-t})dt+\frac{\Gamma(1+\delta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(2-\beta+\delta)\Gamma(1-\alpha)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+\delta}$$

$$\int_\xi^\eta G(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{1+\delta-\beta}F(\alpha,1-\beta;2-\beta+\delta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi})dt, \qquad (6)$$

где d>a-2, $-1-\beta+m<\ell<m-\beta$.

Задача. В области D, ограниченной линиями $\xi=0$, $\eta=1$, $\eta=\xi$, найти решение $U(\xi,\eta)\in C^{(n)}(\overline{D})\cup C^{(n+1)}(D\cup I)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$U(\xi,\xi)=\tau(\xi)=\int_0^\xi T(z)(\xi-z)^\mu dt$$

$$(\mu=\ell-m,-1-\beta<\mu<-\beta), \qquad (7)$$

$$P(\xi)I_{0\xi}^{-1-\alpha-\mu,1+\mu,\alpha+\beta+\mu}U(0,\xi)+$$

$$+g(\xi)I_{\xi 1}^{-1-\mu-\beta,1+\mu,\alpha+\beta+\mu}U(\xi,1)=r(\xi) \qquad (8)$$

Здесь через $I_{0\xi}^{a,b,c}$ и $I_{\xi 1}^{a,b,c}$ обозначены операторы Saigo.

$$I_{0\xi}^{a,b,c}f=\begin{cases}\dfrac{\xi^{-a-b}}{\Gamma(a)}\displaystyle\int_0^\xi f(t)(\xi-t)^{a-1}F(a+b,-c;a;\frac{\xi-t}{\xi})dt & a>0;\\ \dfrac{d^n}{d\xi^n}I_{0\xi}^{a+n,b-n,c-n}f & a<0;\end{cases}\quad (9)$$

$c-b>-1, c,b\in R, f\in C[0,1]$

Этот оператор обладает следующими свойствами

$$1.\left(I_{0\xi}^{a,b,c}\right)^{-1}=I_{0\xi}^{-a,-b,a+c}\qquad (10)$$

$$2.I_{\xi 1}^{a,b,c}I_{0\xi}^{\gamma,\delta,a+c}=I_{0\xi}^{a+\gamma,\beta+\delta,c}\quad (a,\gamma>0)\qquad (11)$$

$$I_{\xi 1}^{a,b,c}f=\begin{cases}\dfrac{(1-\xi)^{-a-b}}{\Gamma(a)}\displaystyle\int_\xi^1 f(t)(t-\xi)^{a-1}F(a+b,-c;a;\frac{t-\xi}{1-\xi})dt & a>0;\\ (-1)^n\dfrac{d^n}{d\xi^n}I_{\xi 1}^{a+n,b-n,c-n}f & a<0;\end{cases}$$

$c-b>-1, c,b\in R, f\in C[0,1]$

Свойства этого оператора аналогичные.

В целях упрощения решения задачи выберем параметр d из условия $2-\beta+\delta=\alpha+\mu+1$, т. е. $\delta=\mu+\alpha+\beta-1$.

Тогда решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию (7), примет вид:

$$U(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^\mu\int_0^\xi T(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-\mu}F(-\mu;\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t})dt+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+\mu+\alpha)}(\eta-\xi)^\mu\int_\xi^\eta T(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\mu}$$
$$F(1-\beta,\alpha;\alpha+\mu+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi})dt+$$
$$+(\eta-\xi)^\mu\int_0^\xi G(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-1-\alpha-\beta-\mu}F(-1-\alpha-\beta-\mu,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t})dt+$$
$$\frac{\Gamma(\mu+\alpha+\beta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\mu+\alpha)}(\eta-\xi)^\mu\int_\xi^\eta G(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\mu+\alpha}$$
$$F(\alpha,1-\beta;1+\mu+\alpha;\frac{\eta-t}{\eta-\xi})dt\qquad (12)$$

Полагая в (12) $\xi=0$ и $\eta=\xi$, получим

$$U(0,\xi)=\frac{\Gamma(\mu+\alpha+\beta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\mu+\alpha)}\xi^\mu\int_0^\xi G(t)\left(\frac{\xi-t}{\xi}\right)^{\mu+\alpha}$$
$$F(\alpha,1-\beta;1+\mu+\alpha;\frac{\xi-t}{\xi})dt+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+\mu+\alpha)}\xi^\mu$$
$$\int_0^\xi T(t)\left(\frac{\xi-t}{\xi}\right)^{\mu+\alpha}F(1-\beta;\alpha+\mu+1;\frac{\xi-t}{\xi})dt$$

Выразим $U(0,x)$ через операторы Saigo

$$U(0,\xi)=\frac{\Gamma(\mu+\alpha+\beta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}I_{0\xi}^{1+\mu+\alpha,-\mu-1,\beta-1}G(\xi)+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta)}I_{0\xi}^{1+\mu+\alpha,-\mu-1,\beta-1}T(\xi)$$

Тогда

$$I_{0\xi}^{-1-\alpha-\mu,1+\mu,\alpha+\beta+\mu}U(0,\xi)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta)}T(\xi)+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta)}T(\xi)+\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\mu)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}G(\xi)\qquad (13)$$

Найдем

$$U(\xi,1)=(1-\xi)^\mu\int_0^\xi T(t)\left(\frac{1-\xi}{1-t}\right)^{-\mu}F(-\mu,\alpha;\alpha+\beta;\frac{1-\xi}{1-t})dt+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+\mu+\alpha)}(1-\xi)^\mu\int_\xi^1 T(t)\left(\frac{1-t}{1-\xi}\right)^{\alpha+\mu}$$
$$F(1-\beta;\alpha;\alpha+\mu+1;\frac{1-t}{1-\xi})dt+$$
$$+(1-\xi)^\mu\int_0^\xi G(t)\left(\frac{1-\xi}{1-t}\right)^{1-\alpha-\beta-\mu}F\left(1-\alpha-\beta-\mu,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{1-\xi}{1-t}\right)dt+$$
$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\mu)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\mu)\Gamma(1-\alpha)}(1-\xi)^\mu\int_\xi^1 G(t)\left(\frac{1-t}{1-\xi}\right)^{\alpha+\mu}$$
$$F(\alpha,1-\beta;1+\alpha+\mu;\frac{1-t}{1-\xi})dt\qquad (14)$$

Имеют место формулы

$$F\left(-\mu,\alpha,\alpha+\beta;\frac{1-\xi}{1-t}\right)\left(\frac{1-\xi}{1-t}\right)^{-\mu}=$$
$$=\left(\frac{\xi-t}{1-\xi}\right)^\mu F\left(-\mu,\beta;\alpha+\beta;\frac{1-\xi}{t-\xi}\right)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\mu)}$$
$$F\left(-\mu,1-\mu-\alpha-\beta;1-\mu-\beta;\frac{t-\xi}{1-\xi}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(-\beta-\mu)}{\Gamma(-\mu)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\xi-t}{1-t}\right)^{\mu+\beta}F\left(\beta,1-\alpha;1+\beta+\mu;\frac{t-\xi}{1-\xi}\right);$$
$$F\left(1-\beta,\alpha;\alpha+\mu+1;\frac{1-t}{1-\xi}\right)\left(\frac{1-t}{1-\xi}\right)^{\alpha+\mu}=\frac{\Gamma(\alpha+\mu+1)\Gamma(\mu+\beta)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\alpha+\beta+\mu)}$$
$$F\left(-\mu,1-\alpha-\beta-\mu;1-\beta-\mu;\frac{t-\xi}{1-\xi}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(1+\alpha+\mu)\Gamma(-\beta-\mu)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{t-\xi}{1-\xi}\right)^{\beta+\mu}F(1-\alpha,\beta;1+\beta+\mu;\frac{t-\xi}{1-\xi});$$

$$F(1-\alpha-\beta-\mu,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{1-\xi}{1-t})\left(\frac{1-\xi}{1-t}\right)^{1-\alpha-\beta-\mu}=$$

$$=\left(\frac{\xi-t}{1-\xi}\right)^{-1+\alpha+\beta+\mu}F\left(1-\alpha-\beta-\mu,1-\alpha;2-\alpha-\beta;\frac{1-\xi}{t-\xi}\right),$$

применив которые, найдем выражение для $U(\xi,1)$ в следующем виде:

$$U(\xi,1)=(1-\xi)^{\mu}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta+\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\mu)}\int_0^1 T(t)F(-\mu,1-\mu-\alpha-\beta;$$

$$1-\mu-\beta;\frac{t-\xi}{1-\xi})dt+(1-\xi)^{\mu}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\beta-\mu)}{\Gamma(-\mu)\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi}T(t)\left(\frac{\xi-t}{1-\xi}\right)^{\mu+\beta}F(\beta,1-\alpha;1+\beta+\mu;$$

$$\frac{t-\xi}{1-\xi})dt+(1-\xi)^{\mu}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(-\beta-\mu)\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)}\int_{\xi}^{1}T(t)\left(\frac{t-\xi}{1-\xi}\right)^{\mu+\beta}F(1-\alpha,\beta;$$

$$1+\beta+\mu;\frac{t-\xi}{1-\xi})dt+(1-\xi)^{\mu}$$

$$\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(\beta+\mu)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\mu)}\int_{\xi}^{1}G(t)F(1-\alpha-\beta-\mu,-\mu;1-\beta-\mu;\frac{t-\xi}{1-\xi})dt+$$

$$(1-\xi)^{\mu}\int_0^{\xi}G(t)\left(\frac{\xi-t}{1-\xi}\right)^{-1+\alpha+\beta+\mu}F(1-\alpha-\beta-\mu,1-\alpha;2-\alpha-\beta;\frac{1-\xi}{t-\xi})dt+$$

$$+(1-\xi)^{\mu}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\mu)\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(-\beta-\mu)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}$$

$$\int_{\xi}^{1}G(t)\left(\frac{t-\xi}{1-\xi}\right)^{\beta+\mu}F(1-\alpha,\beta;1+\beta+\mu;\frac{t-\xi}{1-\xi})dt \qquad (15)$$

Заметим, что

$$\frac{(1-\xi)^{-\beta}}{\Gamma(1+\beta+\mu)}\int_{\xi}^{1}T(t)(t-\xi)^{\mu+\beta}F(1-\alpha,\beta;1+\beta+\mu;\frac{t-\xi}{1-\xi})dt=$$

$$=I_{\xi 1}^{1+\beta+\mu,-1-\mu,\alpha-1}T(\xi)$$

Аналогично можно выделить оператор Saigo из последнего слагаемого. Ввиду громоздкости, связанной с преобразованиями этих интегралов, выберем конкретное значение μ, учитывая, что $-1-\beta<\mu<-\beta$. Легко показать, что в качестве μ можно взять $\mu=-\alpha-\beta+m$.

Действительно, исходя из верного неравенства $-1<-\alpha+m<0$, получим $-1-\beta<-\alpha-\beta+m<-\beta$.

Итак, взяв в (15) $\mu=-\alpha-\beta+m$, найдем

$$I_{\xi 1}^{-1-\beta-\mu,-\mu-1,\alpha+\beta+\mu}(U_1(\xi,1)+U_2(\xi,1))=$$

$$=I_{\xi 1}^{-1+\alpha-m,1-\alpha-\beta+m,m}(U_1(\xi,1)+U_2(\xi,1)),$$

где через $U_1(\xi,1)$ и $U_2(\xi,1)$ обозначены соответственно три первых и три последних слагаемых формулы (15)

$$I_{\xi 1}^{-1+\alpha-m,1-\alpha-\beta+m,m}(U_1(\xi,1))=$$

$$=(-1)^m\frac{d^m}{d\xi^m}I_{\xi 1}^{-1+\alpha,1-\beta-\alpha,0}U_1(\xi,1)=(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(m)}\frac{d^m}{d\xi^m}$$

$$\frac{(1-\xi)^{\beta}}{\Gamma(\alpha-1)}\int_{\xi}^{1}(t-\xi)^{\alpha-2}(1-t)^{-\alpha-\beta-m}$$

$$dt\int_0^1 T(z)F\left(\alpha+\beta-m,1-m,1+\alpha-m;\frac{z-t}{1-t}\right)dz+(-1)^m$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha-1)}\frac{d^m}{d\xi^m}$$

$$(1-\xi)^{\beta}\int_{\xi}^{1}(t-\xi)^{\alpha-2}(1-t)^{-\beta}dt\int_0^t T(z)(t-z)^{-\alpha+m}$$

$$F(\beta,1-\alpha;1-\alpha+m;\frac{z-t}{1-t})dz+$$

$$+\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)\Gamma(1-\alpha+m)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)}T(\xi) \quad (16)$$

Обозначим первое слагаемое формулы (16) через I_1, второе через I_2.

$$I_1=(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(т-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-1)(т-1)!}\frac{d^m}{d\xi^m}$$

$$(1-\xi)^{\beta}\int_{\xi}^{1}(t-\xi)^{\alpha-2}(1-t)^{-\alpha-\beta+m}dt$$

$$\int_0^1 T(z)F(\alpha+\beta-m,1-m;1+\alpha-m;\frac{z-t}{1-t})dz=$$

$$=(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-1)(m-1)!}\frac{d^m}{d\xi^m}$$

$$(1-\xi)^{\beta}\int_0^1 T(z)dz\int_{\xi}^{1}(t-\xi)^{\alpha-2}(1-t)^{-\alpha-\beta+m}$$

$$F(\alpha+\beta-m,1-m;1+\alpha-m;\frac{z-t}{1-t})dt.$$

Во внутреннем интеграле выполним подстановку $t=\xi+(1-\xi)v$ и заменим гипергеометрическую функцию по формуле

$$F(\alpha+\beta-m,1-m;1+\alpha-m;\frac{z-t}{1-t})=$$

$$=\left(\frac{1-z}{1-t}\right)^{m-1}F\left(1-\beta,1-m;1+\alpha-m;\frac{t-z}{1-z}\right).$$

Тогда I_1 примет вид

$$I_1=(-1)^m\cdot$$

$$\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-1)(m-1)!}\frac{d^m}{d\xi^m}\int_0^1 T(z)(1-z)^{m-1}dz\int_0^1 v^{\alpha-2}(1-v)^{1-\alpha-\beta}$$

$$F(1-\beta,1-m;1+\alpha-m;1-\frac{1-v}{1-z}(1-\xi))=0 \qquad (17)$$

Действительно, гипергеометрическая функция $F\left(1-\beta,1-m;1-\frac{1-v}{1-z}(1-\xi)\right)$ представляет многочлен m-1 степени по переменной $1-\frac{1-v}{1-z}(1-\xi)$, линейной относительно x, т. е.

$$F(1-\beta,1-m;1+\alpha-m;1-\frac{1-v}{1-z}(1-\xi))=$$

$$=1+\frac{(1-\beta)(1-m)}{(1+\alpha-m)1!}\left(1-\frac{1-v}{1-z}(1-\xi)\right)+$$

$$\frac{(1-\beta)(2-\beta)(1-m)(2-m)}{(1+\alpha-m)(2+\alpha-m)2!}(1-\frac{1-v}{1-z}(1-\xi))^2+....$$

$$+\frac{(1-\beta)(2-\beta)....(-\beta+m-1)(-1)^{m-1}}{(1+\alpha-m)(2+\alpha-m)....(-1+\alpha)}\left(1-\frac{1-v}{1-z}(1-\xi)\right)^{m-1},$$

m-я производная от которого будет равна нулю.

Преобразуем второе слагаемое формулы (16)

$$I_2=(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha-1)}\frac{d^m}{d\xi^m}(1-\xi)^\beta\cdot$$

$$\cdot\int_\xi^1(t-\xi)^{\alpha-2}(1-t)^{-\beta}dt\int_0^t T(t)(t-z)^{-\alpha+m}$$

$$F(\beta,1-\alpha;1-\alpha+m;\frac{z-t}{1-t})dz=(-1)^m\cdot$$

$$\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha-1)}\frac{d^m}{d\xi^m}(1-\xi)^\beta\int_\xi^1(t-\xi)^{\alpha-2}dt$$

$$\int_0^t T(z)(1-z)^{-\beta}(t-z)^{-\alpha+m}F(\beta,m;1-\alpha+m;\frac{t-z}{1-t})dz$$

Изменим порядок интегрирования

$$I_2=(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha-1)}\frac{d^m}{d\xi^m}(1-\xi)^\beta$$

$$(\int_0^\xi T(z)(1-z)^{-\beta}dz\cdot\int_\xi^1(t-\xi)^{\alpha-2}(t-z)^{m-\alpha}F(\beta,m;1-\alpha+m;\frac{t-z}{1-z})dt$$

$$+\int_\xi^1 T(z)(1-z)^{-\beta}dz\cdot$$

$$\cdot\int_z^1(t-\xi)^{\alpha-2}(t-z)^{m-\alpha}F(\beta,m;1-\alpha+m;\frac{t-z}{1-z})dt=$$

$$=(-1)^m\frac{d^m}{d^m}(I_{21}+I_{22}),\qquad(18)$$

где $I_{21}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha-1)}(1-\xi)^\beta\cdot$

$$\cdot\int_0^\xi T(z)(1-z)^{-\beta}dz\int_\xi^1(t-z)^{m-\alpha}(t-\xi)^{\alpha-2}F(\beta,m;1-\alpha+m;\frac{t-z}{1-z})dt$$

В гипергеометрической функции применим формулу перехода от аргумента x к $1-x$

$$F(\beta,m;1-\alpha+m;\frac{t-z}{1-z})=\frac{\Gamma(1-\alpha+m)\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)}F(\beta,m;\alpha+$$

$$+\beta;\frac{1-t}{1-z})+\frac{\Gamma(1-\alpha+m)\Gamma(-1+\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)(m-1)!}$$

$$\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{1-\alpha-\beta}F(1-\alpha-\beta+m,1-\alpha;2-\alpha-\beta;\frac{1-t}{1-z})$$

Тогда I_{21} примет вид

$$I_{21}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)\Gamma(1-\alpha+m)\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha-1)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)}(1-\xi)^\beta$$

$$\int_0^\xi T(z)(1-z)^{-\beta}dz\int_\xi^1(t-\xi)^{\alpha-2}(t-z)^{m-\alpha}F(\beta,m;\alpha+\beta;\frac{1-t}{1-z})dt+$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)\Gamma(1-\alpha-m)\Gamma(-1+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta)(m-1)!}(1-\xi)^\beta$$

$$\int_0^\xi T(z)(1-z)^{\alpha-1}dz\int_\xi^1(1-t)^{1-\alpha-\beta}(t-\xi)^{\alpha-2}(t-z)^{m-\alpha}$$

$$F(1-\alpha-\beta+m,1-\alpha;2-\alpha-\beta;\frac{1-t}{1-z})dt=$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)\Gamma(1-\alpha+m)\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha-1)}(1-\xi)^\beta\cdot$$

$$\cdot\int_0^\xi T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta+m}dz$$

$$\int_\xi^1(t-\xi)^{\alpha-2}F(\alpha,\alpha+\beta-m;\alpha+\beta;\frac{1-t}{1-z})dt+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)\Gamma(1-\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(-1+\alpha+\beta)}{(m-1)!}(1-\xi)^\beta$$

$$\int_0^\xi T(z)(1-z)^{m-1}dz\cdot$$

$$\cdot\int_\xi^1(1-t)^{1-\alpha-\beta}(t-\xi)^{\alpha-2}F(1-m,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{1-t}{1-z})dt$$

Во внутренних интегралах сделаем замену переменной по формуле $1-(1-\xi)v=t$

$$I_{21}=\frac{\sin\pi\alpha\sin\pi(\alpha+\beta-m)(1-\xi)^\beta}{\sin\pi(\alpha+\beta)\sin\pi(\alpha-\tau)\Gamma(\alpha-1)}$$

$$\int_0^\xi T(z)(1-z)^{-\alpha-\beta+\tau}dz\int_0^1((1-\xi)(1-v))^{\alpha-2}F(\alpha;\alpha+\beta-\tau;$$

$$\alpha+\beta;\frac{1-\xi}{1-z}v)$$

$$(1-\xi)dv+\frac{\pi}{\sin\pi(\alpha-\tau)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(-1+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\alpha+\beta-\tau)\Gamma(\beta)(\tau-1)!}$$

$$(1-\xi)^{\beta}\int_0^{\xi}T(z)(1-z)^{\tau-1}dz\int_0^1\left((1-\xi)v\right)^{1-\alpha-\beta}$$

$$((1-\xi)(1-v))^{\alpha-2}F(1-\tau,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{(1-\xi)v}{1-z})(1-\xi)dv=$$

$$=\frac{\sin\pi\alpha\sin\pi(\alpha+\beta-m)(1-\xi)^{\alpha+\beta-1}}{\sin\pi(\alpha+\beta)\sin\pi(\alpha-\tau)\Gamma(\alpha)}$$

$$\int_0^{\xi}T(z)(1-z)^{\tau-\alpha-\beta}F(1,\alpha+\beta-\tau;\alpha+\beta;\frac{1-\xi}{1-z})dz+\frac{\pi}{\sin\pi(\alpha-\tau)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(-1+\alpha+\beta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-\tau)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta)(\tau-1)!}$$

$$\int_0^{\xi}T(z)(\xi-z)^{\tau-1}dz=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi}T(z)(1-z)^{\tau-1}\left(\frac{1-\xi}{1-z}\right)^{\alpha+\beta-1}F(1,\alpha+\beta-\tau;\alpha+\beta;\frac{1-\xi}{1-z})dz+$$

$$(-1)^{m-1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\beta}{(\tau-1)!\Gamma(\alpha+\beta-\tau)\sin\pi(\alpha+\beta)}\int_0^{\xi}T(z)(\xi-z)^{\tau-1}dz \quad (19)$$

Преобразуем второе слагаемое формулы (18)

$$I_{22}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)(1-\xi)^{\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha-1)}\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{-\beta}dz\cdot$$

$$\cdot\int_z^1(t-\xi)^{\alpha-2}(t-z)^{m-\alpha}F(\beta,m;1-\alpha+m;\frac{t-z}{1-z})dt$$

Во внутреннем интеграле делаем замену переменной по формуле $z+(1-z)v=t$

$$I_{22}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)(1-\xi)^{\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha-1)}$$

$$\int_{\xi}^{1}T(z)(z-\xi)^{\alpha-2}(1-z)^{m-\alpha-\beta+1}dz$$

$$\int_0^1 v^{m-\alpha}(1-\frac{1-z}{\xi-z}v)^{\alpha-2}F(\beta,\tau;1-\alpha+m;v)dv=$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-\tau)\Gamma(1-\alpha+\tau)\Gamma(2-\alpha-\beta)(1-\xi)^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta-\tau)\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2-\alpha-\beta+\tau)\Gamma(2-\alpha)}$$

$$\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{1+\tau-\alpha-\beta}{}_3F_2(1,2-\alpha,2-\alpha-\beta;2-\alpha+\tau-\beta,2-\alpha;\frac{1-z}{1-\xi})dz=$$

$$\frac{(1-\alpha-\beta)\sin\pi(\alpha+\beta-\tau)\sin\pi(\alpha-1)}{(1-\alpha-\beta+\tau)\Gamma(\alpha)\sin\pi(\alpha-\tau)\sin\pi(\alpha+\beta)}(1-\xi)^{\alpha+\beta-2}$$

$$\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{1+\tau-\alpha-\beta}F(1,2-\alpha-\beta;2-\alpha-\beta+m;\frac{1-z}{1-\xi})dz=$$

$$-\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\xi)^{\alpha-\beta-2}}{(1-\alpha-\beta-\tau)\Gamma(\alpha)}$$

$$\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{1+\tau-\alpha-\beta}F(1,2-\alpha-\beta;2-\alpha-\beta+\tau;\frac{1-z}{1-\xi})dz \quad (20)$$

Подставим (19) и (20) в (18)

$$I_2=\frac{d^{\tau}}{d\xi^{\tau}}(\frac{(-1)^{\tau}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi}T(z)(1-z)^{\tau-1}\left(\frac{1-\xi}{1-z}\right)^{\alpha+\beta-1}$$

$$F(1,\alpha+\beta-\tau;\alpha+\beta;\frac{1-\xi}{1-z})dz-$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\beta}{(\tau-1)!\Gamma(\alpha+\beta-\tau)\sin\pi(\alpha+\beta)}$$

$$\int_0^{\xi}T(z)(\xi-z)^{\tau-1}dz+(-1)^{\tau-1}\frac{1-\alpha-\beta}{(1-\alpha-\beta+\tau)\Gamma(\alpha)}$$

$$\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{\tau-1}\left(\frac{1-z}{1-\xi}\right)^{2-\alpha-\beta}F(1,2-\alpha-\beta;2-\alpha-\beta+\tau;\frac{1-z}{1-\xi})dz)=$$

$$=-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\beta}{\Gamma(\alpha+\beta-m)\sin\pi(\alpha+\beta)}T(\xi)+(-1)^m\frac{d^m}{d\xi^m}$$

$$\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi}T(z)(1-z)^{m-1}\left(\frac{1-\xi}{1-z}\right)^{\alpha+\beta-1}\right.$$

$$F\left(1,\alpha+\beta-m;\alpha+\beta;\frac{1-\xi}{1-z}\right)dz-$$

$$-\frac{1-\alpha-\beta}{(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha)}$$

$$\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{m-1}\left(\frac{1-z}{1-\xi}\right)^{2-\alpha-\beta}$$

$$\left.F\left(1,2-\alpha-\beta;2-\alpha-\beta+m;\frac{1-z}{1-\xi}\right)dz\right). \quad (21)$$

Учитывая, что получим

$$I_2=\frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha)}(1-\alpha-\beta)(2-\alpha-\beta)\ldots(m-\alpha-\beta)$$

$$\int_0^{\xi}T(z)(1-z)^{-1}\left(\frac{1-\xi}{1-z}\right)^{\alpha+\beta-m-1}\cdot$$

$$F\left(1,\alpha+\beta-m;\alpha+\beta-m;\frac{1-\xi}{1-z}\right)dz-$$

$$-\frac{(1-\alpha-\beta)(2-\alpha-\beta)\ldots(1+m-\alpha-\beta)}{1-\alpha-\beta+m}\frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\int_{\xi}^{1}T(z)(1-z)^{-1}\left(\frac{1-z}{1-\xi}\right)^{2-\alpha-\beta+m}$$

$$F\left(1,2-\alpha-\beta+m;2-\alpha-\beta+m;\frac{1-z}{1-\xi}\right)dz-$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\beta}{\Gamma(\alpha+\beta-m)\sin\pi(\alpha+\beta)}T(\xi)=$$

$$\frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(1+m-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}(1-\xi)^{\alpha+\beta-m-1}$$

$$\int_0^1 T(z)\frac{(1-z)^{1-\alpha-\beta+m}}{\xi-z}dz-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\beta}{\Gamma(\alpha+\beta-m)\sin\pi(\alpha+\beta)}T(\xi).\quad(22)$$

Выражение для I_1 и I_2, найденные по формулам (17) и (22), подставим в (16) и найдем

$$I_{\xi 1}^{-1+\alpha-m,1-\alpha-\beta+m,m}U_1(\xi,1)=$$

$$=\frac{(-1)^m\Gamma(1+m-\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta)}(1-\xi)^{\alpha+\beta-m-1}$$

$$\int_0^1 T(z)\frac{(1-z)^{1-\alpha-\beta+m}}{\xi-z}dz+$$

$$+T(\xi)(-1)^m\left(\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\sin\pi\beta\Gamma(1-\alpha-\beta+m)}{\Gamma(\alpha)\sin\pi\alpha}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\beta}{\Gamma(\alpha+\beta-m)\sin\pi(\alpha+\beta)}\right)=$$

$$=(-1)^m\frac{\Gamma(1+m-\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta)}(1-\xi)^{\alpha+\beta-m-1}$$

$$\int_0^1 T(z)\frac{(1-z)^{1-\alpha-\beta+m}}{\xi-z}dz.\qquad(23)$$

(коэффициент у функции T(x)равен нулю).

Аналогично находится

$$I_{\xi 1}^{-1+\alpha-m,1-\alpha-\beta+m,m}U_2(\xi,1)=(-1)^m\frac{d^m}{d\xi^m}I_{\xi 1}^{-1+\alpha;1-\alpha-\beta;0}U_2(\xi,1),$$

где $U_2(\xi,1)$ – три последних слагаемых формулы (15).

Итак,

$$I_{\xi 1}^{-1+\alpha-m,1-\alpha-\beta+m;m}U_2(\xi,1)=$$

$$(-1)^m\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(-\alpha+m)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha-1)}\cdot\frac{d^m}{d\xi^m}(1-\xi)^\beta\cdot$$

$$\int_\xi^1(1-t)^{-\alpha-\beta+m}(t-\xi)^{\alpha-2}dt$$

$$\int_t^1 G(z)F\left(1-m,\alpha+\beta-m;1+\alpha-m;\frac{z-t}{1-t}\right)dz+$$

$$+(-1)^m\frac{d^m}{d\xi^m}\frac{(1-\xi)^\beta}{\Gamma(\alpha-1)}\int_\xi^1(1-t)^{1-\alpha-\beta}(t-\xi)^{\alpha-2}dt$$

$$\int_0^t G(t)(t-z)^{m-1}\cdot F\left(1-m,1-\alpha;2-\alpha-\beta;\frac{1-t}{z-t}\right)dz+$$

$$+\frac{(-1)^m(m-1)!\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}G(\xi).\qquad(24)$$

Здесь учтено, что последний интеграл формулы (15) представим оператором *Saigo*

$$I_{\xi 1}^{1-\alpha+m,\alpha+\beta-1-m,\alpha-1}G(\xi)=\frac{(1-\xi)^{-\beta}}{\Gamma(1-\alpha+m)}$$

$$\int_\xi^1 G(t)(t-\xi)^{m-\alpha}F\left(\beta,1-\alpha;1-\alpha+m;\frac{t-\xi}{1-\xi}\right)dt.$$

Преобразуем сначала гипергеометрическую функцию

$$F(1-m,1-\alpha;2-\alpha-\beta;\frac{1-t}{z-t}).$$

Запишем формулу перехода к обратному аргументу

$$F(1-\alpha,\beta;1-\alpha+m;\frac{z-t}{1-t})=$$

$$=\frac{\Gamma(1-\alpha+m)\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\beta)(m-1)!}\left(\frac{1-t}{t-z}\right)^{1-\alpha}$$

$$F(1-\alpha,1-m;2-\alpha-\beta;\frac{1-t}{z-t})+$$

$$+\frac{\Gamma(1-\alpha+m)\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)}\left(\frac{1-t}{z-t}\right)^\beta$$

$$F(\beta,\alpha+\beta-m;\alpha+\beta;\frac{1-t}{z-t}),$$

из которой определим функцию

$$F(1-\alpha,1-m;2-\alpha-\beta;\frac{1-t}{z-t})=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)(m-1)!}{\Gamma(1-\alpha+m)\Gamma(\alpha+\beta-1)}\left(\frac{t-z}{1-t}\right)^{1-\alpha}$$

$$F(1-\alpha,\beta;1-\alpha+m;\frac{z-t}{1-t})-$$

$$-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(\beta)(m-1)!}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha+\beta-1)}\left(\frac{t-z}{1-t}\right)^{1-\alpha-\beta}$$

$$F(\beta,\alpha+\beta-m;\alpha+\beta;\frac{1-t}{z-t}).\qquad(25)$$

В гипергеометрической функции $F(\beta,\alpha+\beta-m;\alpha+\beta;\frac{1-t}{z-t})$ перейдем к обратному аргументу

$$F(\beta,\alpha+\beta-m;\alpha+\beta;\frac{1-t}{z-t})=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{t-z}{1-z}\right)^{\beta}$$

$$F(\beta,1-\alpha;1-\alpha+m;\frac{z-t}{1-t})+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(\beta)(m-1)!}$$

$$\left(\frac{t-z}{1-t}\right)^{\alpha+\beta-m}F(\alpha+\beta-m,1-m;1+\alpha-m;\frac{z-t}{1-t}).$$

Полученный результат подставим в (25)

$$F(1-\alpha,1-m;2-\alpha-\beta;\frac{1-t}{z-t})=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta)(m-1)!}{\Gamma(1-\alpha+m)\Gamma(\alpha+\beta-1)}\left(\frac{t-z}{1-t}\right)^{1-\alpha}$$

$$F(1-\alpha,\beta;1-\alpha+m;\frac{z-t}{1-t})$$

$$(1-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha+m)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha+\beta-m)\Gamma(\alpha)})-$$

$$-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha+\beta-1)}\left(\frac{t-z}{1-t}\right)^{1-m}$$

$$F(\alpha+\beta-m,1-m;1+\alpha-m;\frac{z-t}{1-t}).$$

Покажем, что выражение

$$1-\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha+m)\Gamma(\alpha-m)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha+\beta-m)}=0$$

Действительно,

$$1-\frac{\sin\pi\alpha\sin\pi(\alpha+\beta-m)}{\sin\pi(\alpha+\beta)\sin\pi(\alpha-m)}=1-\frac{\sin\pi\alpha(-1)^m\sin\pi(\alpha+\beta)}{\sin\pi(\alpha+\beta)(-1)^m\sin\pi\alpha}=0$$

Таким образом,

$$F(1-\alpha,1-m;2-\alpha-\beta;\frac{1-t}{z-t})=$$

$$=\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)}\left(\frac{t-z}{1-t}\right)^{1-m}$$

$$F(\alpha+\beta-m,1-m;1+\alpha-m;\frac{z-t}{1-t}).$$

Подставляя найденное выражение для гипергеометрической функции в (24), получим

$$I_{\xi 1}^{1+\alpha-m,1-\alpha-\beta+m,m}U_2(\xi,1)=$$

$$=\frac{(-1)^m(m-1)!\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}G(\xi)+(-1)^m$$

$$\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(-\alpha+m)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha-1)}\frac{d^m}{d\xi^m}$$

$$\int_\xi^1(1-t)^{-\alpha-\beta+m}(t-\xi)^{\alpha-2}dt$$

$$\int_0^1 G(z)F(1-m,\alpha+\beta-m;1+\alpha-m;\frac{z-t}{1-t})dz=$$

$$=\frac{(-1)^m(m-1)!\Gamma(2-\alpha-\beta)G(\xi)}{\Gamma(1-\beta)}$$

$$+(-1)^m\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha-1)}\frac{d^m}{d\xi^m}(1-\xi)^{\beta}$$

$$\int_0^1 G(z)(1-z)^{m-\alpha-\beta}dz$$

$$\int_\xi^1(t-\xi)^{\alpha-2}F(\alpha+\beta-m,\alpha,1+\alpha-m;\frac{t-z}{1-z})dt.$$

Выполним замену переменной по формуле $1-(1-\xi)v=t$

$$I_{\xi 1}^{1+\alpha-m,1-\alpha-\beta+m,m}U_2(\xi,1)=$$

$$=\frac{(-1)^m(m-1)!\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}G(\xi)+(-1)^m$$

$$\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)\Gamma(\alpha-1)}\frac{d^m}{d\xi^m}(1-\xi)^{\alpha+\beta-1}$$

$$\int_0^1 G(z)(1-z)^{m-\alpha-\beta}dz$$

$$\int_0^1(1-v)^{\alpha-2}F(\alpha+\beta-m,\alpha;\alpha+1-m;1-\frac{1-\xi}{1-z}v)dv=$$

$$=\frac{(-1)^m(m-1)!\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}$$

$$G(\xi)+(-1)^m\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha-1)\Gamma(1-\alpha-\beta+m)}\frac{d^m}{d\xi^m}$$

$$\int_0^1 G(z)(1-z)^{m-1}dz\int_0^1(1-v)^{\alpha-2}v^{1-\alpha-\beta}F(1-\beta,1-m;\alpha+1-m;$$

$$1-\frac{1-\xi}{1-z}v)=(-1)^m\frac{(m-1)!\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}G(\xi).\quad(26)$$

Гипергеометрическая функция представляет многочлен m-1 степени относительно переменной $1-\frac{1-\xi}{1-z}v$, поэтому

$$\frac{d^m}{d\xi^m}F(1-\beta,1-m;1+\alpha-m;1-\frac{v}{1-z}\xi)=0.$$

Подставляя (13), (23) и (26) в краевое условие (8), получим уравнение относительно неизвестной функции G(x)

$$(m-1)!\Gamma(2-\alpha-\beta)G(\xi)\left(\frac{P(\xi)}{\Gamma(1-\alpha)}+\frac{(-1)^m g(\xi)}{\Gamma(1-\beta)}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta+\tau)}{\Gamma(\beta)}$$

$$P(\xi)T(\xi)+(-1)^{m}\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta+\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta)}g(\xi)(1-\xi)^{\alpha+\beta-m-1}$$

$$\int_{0}^{1}T(z)\frac{(1-z)^{1-\alpha-\beta-m}}{\xi-z}dz=r(\xi).$$

Уравнение разрешимо при условии

$$\frac{P(\xi)}{\Gamma(1-\alpha)}+(-1)^{m}\frac{g(\xi)}{1-\beta}\neq 0,\quad 0<\xi<1$$

Функции $P(x)$, $g(x)$ и $r(x)$ – непрерывны на сегменте $[0,1]$, $g(\xi)=g^{*}(\xi)\xi^{\delta}(1-\xi)^{\delta}$, где $-\alpha-\beta+m<S<1-\alpha-\beta+m$, $0<\delta<1$; $T(\xi)$ и $G(x)$ – интегрируемые.

Список использованной литературы:

1. Hardy G., Littlewool I., Some properties of fractional integrals. I. Math., z., 27, 565-606, 1928.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1110 с.
3. Saigo M., Math. Rep. Kyushu Unir, 1978, vol. 11.
4. Saigo M., Math., jap., 1979, vol. 24.
5. Ивашкина Г.А., Невоструев Л.М. Дифференциальные уравнения, 14, №2, 1978.
6. Нахушев А.М. Дифференциальные уравнения, 5, №1, 1969.
7. Ивашкина Г.А. Задача Коши для уравнения Эйлера-Дарбу с параметрами $\alpha>0$, $\beta<0$, $0<\alpha+\beta<1$ // Вестник ОГУ. – 2002. – №5. – С. 98-106.