Алдибеков Т.М.
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛЯПУНОВА

В работе рассматриваются показатели Ляпунова линейной системы дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами в более общей шкале. Установлен аналог теоремы Перрона для системы дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами и применен к исследованию устойчивости решений системы дифференциальных уравнений.

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = p_i(t)y_i + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)y_k \qquad (1)$$

вообще с комплексными коэффициентами $p_i(t), p_{ik}(t), i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\}$, которые являются непрерывными функциями на полуоси $J = [0,+\infty)$. Мы следуем работе Перрона [1, с. 193], который доказал совпадение показателей возмущенной и исходной системы с ограниченными коэффициентами при условии разделенности диагонали [2, с. 86].

Лемма 1. Если в системе (1) для любых $i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\}$ выполняется условие

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0. \qquad (2)$$

где $\psi(t)$ непрерывная положительная функция на J, то для любого $\alpha > 0$ существует такое $T_1 \in J$, что для любого $t \ge T_1$ имеют места неравенства

$$\frac{\operatorname{Re} p_i(t)}{\psi(t)}\left|y_i^2\right| - \frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{y_i} y_k\right| \le \frac{1}{2\psi(t)}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2\psi(t)}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| \le \frac{\operatorname{Re} p_i(t)}{\psi(t)}\left|y_i^2\right| + \frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{y_i} y_k\right|, \qquad (4)$$

где $i \in \{1,...,n\}$.

Доказательство. Умножим каждое из уравнений системы (1) на $\overline{y_i}$, где $\overline{y_i}$ – величина комплексная, сопряженная с y_i. Получим $\overline{y_i} y_i' = \overline{y_i} p_i(t) y_i + \overline{y_i}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) y_k$ отсюда в силу равенства $\overline{y_i} y_i = |y_i|^2$ получаем $\overline{y_i} y_i' = p_i(t)|y_i|^2 + \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)\overline{y_i} y_k$, откуда имеем

$$\left|\ \operatorname{Re}(\overline{y_i} y_i') - \operatorname{Re}(p_i(t)|y_i|^2)\ \right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|p_{ik}(t)\overline{y_i} y_k\right|,$$

следовательно, используя равенство $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| = \operatorname{Re}(\overline{y_i} y_i')$, имеем

$$\left|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| - \operatorname{Re}\left(p_i(t)|y_i|^2\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|p_{ik}(t)\overline{y}_i y_k\right| \qquad (5)$$

Отсюда, разделяя на $\psi(t)$, получаем

$$\left|\frac{1}{2\psi(t)}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| - \frac{\operatorname{Re}(p_i(t))}{\psi(t)}|y_i|^2\right| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)}\left|\overline{y_i} y_k\right| \qquad (6)$$

Из условия (2) следует, что для любого $\alpha > 0$ существует такое $T_1 \in J$, что для любого $t \ge T_1$ и для любых $i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\}$ имеет место

$$\frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} \le \frac{\alpha}{2n}. \qquad (7)$$

Следовательно, для любого $t \ge T_1$ из (6) и (7) вытекает, что при любых $i \in \{1,...,n\}$, $k \in \{1,...,n\}$ имеет место

$$\left|\frac{1}{2\psi(t)}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| - \frac{\operatorname{Re}(p_i(t))}{\psi(t)}\left|y_i^2\right|\right| \le \frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{y_i} y_k\right|.$$

Отсюда получаем неравенства (3) и (4). Лемма 1 доказана.

Для $\alpha > 0$ зафиксируем число $T_1 \in J$, найденное в лемме 1.

Лемма 2. Пусть для системы (1) при $\alpha > 0$ и для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на J выполняются следующие условия

$$1)\ \operatorname{Re} p_1(t) > \operatorname{Re} p_i(t) + \alpha\psi(t), t \in J, i \in \{2,...,n\},$$

$$2)\ \lim_{t\to+\infty}\frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\}$$

Тогда существует решение $y_1, y_2,..., y_n$ системы (1) такое, что для любого $t \ge t_0$ выполняется неравенство

$$|y_1(t)|^2 > |y_i(t)|^2, i \in \{2,...,n\}, t_0 > T_1.$$

Доказательство. Пусть $y_1, y_2,..., y_n$ – решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $y_i(t_0) = \eta_i, i \in \{1,...,n\}$, где $|\eta_1| > |\eta_i|, i \in \{2,...,n\}$, $t_0 > T_1$. Теперь докажем, что это решение искомое. Допустим противное. Пусть $|y_1(t)|^2 > |y_i(t)|^2, i \in \{2,...,n\}, t_0 > T_1$ имеет место в некотором полуинтервале $t_0 \le t < t_2$ и в $t = t_2$ нарушается, т. е. для некоторого индекса $k \in \{2,...,n\}$ имеем

$$\left|y_1(t_2)\right|^2=\left|y_k(t_2)\right|^2\ge\left|y_i(t_2)\right|^2,\ i\ne 1, i\ne k, \quad (8)$$

притом $$\left(\frac{d}{dt}\left|y_1\right|^2\right)_{t=t_2}\le\left(\frac{d}{dt}\left|y_k\right|^2\right)_{t=t_2} \quad (9)$$

Так как $t_2>T_1$, то из неравенства (3) леммы 1 при $i=1, t=t_2$ следует, что

$$\frac{\operatorname{Re}p_1(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_1^2(t_2)\right|-\frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{y_1}(t_2)y_k(t_2)\right|\le\frac{1}{2\psi(t_2)}\left(\frac{d}{dt}\left|y_1^2\right|\right)_{t=t_2}$$

Отсюда в силу (8) получим неравенство

$$\frac{\operatorname{Re}p_1(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_1^2(t_2)\right|-\frac{\alpha}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left|\overline{y}_1(t_2)y_k(t_2)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\psi(t_2)}\left(\frac{d}{dt}\left|y_k\right|^2\right)_{t=t_2} \quad (10)$$

А также из неравенства (4) леммы 1 при $i=k, t=t_2$ следует, что

$$\frac{1}{2\psi(t_2)}\left(\frac{d}{dt}\left|y_k\right|^2\right)_{t=t_2}\le$$

$$\le\frac{\operatorname{Re}p_k(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_k^2(t_2)\right|+\frac{\alpha}{2n}\sum_{s=1}^{n}\left|\overline{y}_k(t_2)y_s(t_2)\right|$$

В силу (8) для любого $s\in\{1,\dots,n\}$ имеем

$$\left|\overline{y}_k(t_2)y_s(t_2)\right|=\left|\overline{y}_k(t_2)\right|\left|y_s(t_2)\right|=\left|y_1(t_2)\right|\left|y_s(t_2)\right|\le\left|y_1(t_2)\right|^2.$$

Поэтому имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\psi(t_2)}\left(\frac{d}{dt}\left|y_k\right|^2\right)_{t=t_2}\le\frac{\operatorname{Re}p_k(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_1(t_2)\right|^2+\frac{\alpha}{2}\left|y_1(t_2)\right|^2 \quad (11)$$

Следовательно, учитывая (8), из неравенств (10) и (11) получаем, что

$$\frac{\operatorname{Re}p_1(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_1^2(t_2)\right|-\frac{\alpha}{2}\left|y_1(t_2)\right|^2\le$$

$$\le\frac{\operatorname{Re}p_k(t_2)}{\psi(t_2)}\left|y_1(t_2)\right|^2+\frac{\alpha}{2}\left|y_1(t_2)\right|^2$$

Так как $\left|y_1(t_2)\right|\ge\left|y_i(t_2)\right|, i\ne 1;$ то $\left|y_1(t_2)\right|\ne 0$, поэтому полученное неравенство можно разделить на $\left|y_1(t_2)\right|^2$. Тогда имеем $\operatorname{Re}p_1(t_2)\le\operatorname{Re}p_k(t_2)+\alpha\psi(t_2),\quad k\in\{2,\dots,n\}, t_2\in J$ это неравенство непосредственно противоречит условию 1). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть для системы (1) при $\alpha>0$ и для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на J выполняются следующие условия

1) $\operatorname{Re}p_1(t)>\operatorname{Re}p_i(t)+\alpha\psi(t), t\in J, i\in\{2,\dots,n\};$

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\left|p_{ik}(t)\right|}{\psi(t)}=0, i\in\{1,\dots,n\}, k\in\{1,\dots,n\}$

тогда существует решение $y_1,y_2,\dots,y_n$ системы (1), такое, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\left|y_i\right|}{\left|y_1\right|}=0, i\in\{2,\dots,n\}$$

Доказательство. Зафиксированное число T_1 в леммах 1, 2, используя условие 2), возьмем так, чтобы для любого $t>T_1$ также выполнялось

$$\frac{\left|p_{ik}(t)\right|}{\psi(t)}<\frac{\alpha\gamma}{16n}, i\in\{1,\dots,n\}, k\in\{1,\dots,n\} \quad (12)$$

Рассмотрим решение $y_1,y_2,\dots,y_n$, найденное в лемме 2. Из леммы 2 следует, что $\frac{\left|y_k\right|^2}{\left|y_1\right|^2}$ ограниченная функция на J, поэтому конечный верхний предел существует. Покажем теперь, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\left|y_i\right|}{\left|y_1\right|}=0, i\in\{2,\dots,n\}$. Допустим противное. Пусть для некоторого индекса $k\in\{2,\dots,n\}$,

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2=\gamma>0 \quad (13)$$

Отсюда следует, что существует произвольно большое $t=\tau>T_1$, для которого одновременно имеют места неравенства

$$\left|\frac{y_k(\tau)}{y_1(\tau)}\right|^2>\frac{\gamma}{2};\ \frac{1}{\psi(\tau)}\left(\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2\right)_{t=\tau}>-\frac{\alpha\gamma}{2} \quad (14)$$

В самом деле, прежде всего очевидно, что не может, начиная с некоторого $t\in J$, иметь место неравенство $\frac{1}{\psi(t)}\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2<-\frac{\alpha\gamma}{2}$, так как тогда имели бы неравенство $\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2<0$, откуда $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2=-\infty$. Поэтому существуют произвольно большие $t=\tau>T_1$, для которых выполняется неравенство $\frac{1}{\psi(\tau)}\left(\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2\right)_{t=\tau}>-\frac{\alpha\gamma}{2}$. Если для этих $t=\tau>T_1$, $\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2>\frac{\gamma}{2}$, то утверждение доказано. Допустим, для $\tau'>T_1$ имеет место неравенство $\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2<\frac{\gamma}{2}$. Так как $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2=\gamma$, то среди чисел $t=\tau>T_1$, существует наименьшее $\tau>T_1$, для которого $\left|\frac{y_k(\tau)}{y_1(\tau)}\right|\ge\frac{3}{4}\gamma$, и для этого

$\tau > T_1$ имеем $\left(\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2\right)_{t=\tau} > -\frac{\alpha\gamma}{2}\psi(\tau)$. Следовательно, для этого $\tau > T_1$ имеют место неравенства $\left|\frac{y_k(\tau)}{y_1(\tau)}\right| > \frac{\gamma}{2}$, $\left(\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2\right)_{t=\tau} > -\frac{\alpha\gamma}{2}\psi(\tau)$.

Таким образом, для некоторого фиксированного, но произвольно большого $t = \tau > T_1$ одновременно имеют место неравенства (14). Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left|\frac{y_k}{y_1}\right|^2 = \frac{1}{|y_1|^2}\frac{d}{dt}|y_k|^2 - \frac{|y_k|^2}{|y_1|^4}\frac{d}{dt}|y_1|^2 \qquad (15)$$

В ходе доказательства леммы 1 было получено неравенство (5), откуда имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| \le \mathrm{Re}(p_i(t)\left|y_i^2\right| + \sum_{k=1}^{n}\left|p_{ik}(t)\bar{y}_i y_k\right| \qquad (16)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_i^2\right| \ge \mathrm{Re}(p_i(t)\left|y_i^2\right| - \sum_{k=1}^{n}\left|p_{ik}(t)\bar{y}_i y_k\right| \qquad (17)$$

Из неравенства (16) при $i = k$ получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_k^2\right| \le \mathrm{Re}(p_k(t)\left|y_k^2\right| + \sum_{s=1}^{n}\left|p_{ks}(t)\bar{y}_k y_s\right| \qquad (18)$$

Из неравенства (17) при $i = 1$ после умножения на -1 получаем

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|y_1^2\right| \le \sum_{s=1}^{n}\left|p_{1s}(t)\bar{y}_1 y_s\right| - \mathrm{Re}(p_1(t)\left|y_1^2\right| \qquad (19)$$

Следовательно, из (15) в силу (18) и (19) вытекает, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 + \mathrm{Re}(p_1(t) - p_k(t))\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{n}\frac{\left|p_{ks}(t)\bar{y}_k y_s\right|}{|y_1|^2} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\left|p_{1s}(t)\bar{y}_1 y_s\right|}{|y_1|^4}|y_k|^2 \qquad (20)$$

В силу леммы 2 $|y_i| < |y_1|, i \in \{2,...,n\}$, из (20) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 + \mathrm{Re}(p_1(t) - p_k(t))\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{s=1}^{n}|p_{ks}(t)| + \sum_{s=1}^{n}|p_{1s}(t)|$$

Отсюда в силу условия 1) леммы имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 + \alpha\psi(t)\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 \le \sum_{s=1}^{n}|p_{ks}(t)| + \sum_{s=1}^{n}|p_{1s}(t)|$$

Разделяя на $\psi(t)$, получаем

$$\frac{1}{2\psi(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 + \alpha\left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 \le \sum_{s=1}^{n}\frac{|p_{ks}(t)|}{\psi(t)} + \sum_{s=1}^{n}\frac{|p_{1s}(t)|}{\psi(t)} \qquad (21)$$

Тогда из (21) при $t = \tau > T_1$ в силу (14) следует, что $-\frac{\alpha\gamma}{4} + \frac{\alpha\gamma}{2} \le \sum_{s=1}^{n}\frac{|p_{ks}(\tau)|}{\psi(\tau)} + \sum_{s=1}^{n}\frac{|p_{1s}(\tau)|}{\psi(\tau)}$. Отсюда, учитывая (12), получаем $\frac{\alpha\gamma}{4} \le \sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha\gamma}{16n} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha\gamma}{16n}$, т. е. $\frac{1}{4} \le \frac{1}{8}$. Тем самым полученное противоречие доказывает лемму. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть для системы (1) для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на J выполняются следующие условия:

1) $\mathrm{Re}\, p_1(t) > \mathrm{Re}\, p_i(t) + \alpha\psi(t), t \in J, i \in \{2,...,n\}, \alpha > 0,$ $\psi(t) \ge \beta > 0,$

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\},$

тогда существует решение $y_1, y_2, ..., y_n$ системы (1), такое, что

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{1}{\psi(t)}\frac{y_1'}{y_1} - \frac{p_1(t)}{\psi(t)}\right| = 0$$

Доказательство. Первое уравнение системы (1) имеет вид

$$y_1' = p_1(t)y_1 + p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + ... + p_{1n}(t)y_n$$

Рассмотрим решение $y_1, y_2, ..., y_n$ из леммы 3. Подставляя это решение в уравнение и учитывая, что $y_1(t) \ne 0, \psi(t) \ne 0, t \ge t_0 \in J$, получаем неравенство

$$\left|\frac{1}{\psi(t)}\frac{y_1'}{y_1} - \frac{p_1(t)}{\psi(t)}\right| \le \frac{|p_{11}(t)|}{\psi(t)} + \sum_{k=2}^{n}\frac{|p_{1k}(t)|}{\psi(t)}\frac{|y_k|}{|y_1|}.$$

Следовательно, в силу леммы 3 и из условия 2) вытекает утверждение леммы. Лемма 4 доказана.

Далее рассмотрим систему (1) с действительными коэффициентами.

Лемма 5. Пусть для системы (1) для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на J выполняются следующие условия

1) $\mathrm{Re}\, p_1(t) > \mathrm{Re}\, p_i(t) + \alpha\psi(t), t \in J, i \in \{2,...,n\}, \alpha > 0,$ $\psi(t) \ge \beta > 0,$

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\}$

3) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_1(\tau)d\tau = \lambda_1(q), \ \ \lambda_1(q) \in R,$

где $q(t)=\int_0^t \psi(\tau)d\tau$, тогда система (1) имеет решение $\bar{y}=\{y_1,y_2,...,y_n\}$, такое, что $\chi[y_1,q]=\lambda_1(q)$, где $\chi[y_1,q]$ – верхний характеристический показатель Ляпунова первой координатной функции $y_1(t)$ относительно $q(t)$.

Доказательство. Рассмотрим решение $\bar{y}=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ из леммы 4. Тогда в силу леммы 4 имеем для любого $\varepsilon>0$, существует такое $T\in J$, что для любого $t>T$ имеет место неравенство

$$p_1(t)-\varepsilon\psi(t)<\left(\ln|y_1|\right)'<p_1(t)+\varepsilon\psi(t).$$

Следовательно, отсюда, интегрируя

$$\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_1(\tau)d\tau-\varepsilon\le\frac{1}{q(t)}\ln\frac{|y_1(t)|}{|y_1(0)|}\le\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_1(\tau)d\tau+\varepsilon.$$

Теперь, переходя к верхним пределам, используя условия 3), получаем

$$\lambda_1(q)-\varepsilon\le\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\ln|y_1(t)|\le\lambda_1(q)+\varepsilon.$$

По определению $\chi[y_1,q]=\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\ln|y_1(t)|$.

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon>0$ имеем $\lambda_1(q)=\chi[y_1,q]$. Лемма 5 доказана.

Теорема 1. Пусть для системы (1), где коэффициенты – непрерывные действительные функции, определенные на полуоси $J=[0,+\infty)$, $i\in\{1,...,n\}$, для некоторой непрерывной положительной функций $\psi(t)$ на J выполняются условия

1) $\operatorname{Re}p_1(t)>\operatorname{Re}p_i(t)+\alpha\psi(t), t\in J, i\in\{2,...,n\}, \alpha>0,$ $\psi(t)\ge\beta>0,$

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)}=0, i\in\{1,...,n\}, k\in\{1,...,n\}$

3) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_1(\tau)d\tau=\lambda_1(q),$

где $q(t)=\int_0^t\psi(\tau)d\tau$, тогда система (1) имеет решение $\bar{y}=\{y_1,y_2,...,y_n\}$, такое, что $\chi[\bar{y},q]=\lambda_1(q)$.

Доказательство. Рассмотрим решение $\bar{y}=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ из леммы 5. В силу леммы 2 для любых $t>t_0, i\in\{2,...,n\}$ имеет место неравенство $|y_1(t)|>|y_i(t)|$. Поэтому из свойства показателей относительно $q(t)$ имеет место равенство $\chi[y_1,q]=\chi[\bar{y},q]$. Отсюда из леммы 5 следует требуемое равенство. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 система (1) имеет $\lambda_1(q)$ – верхний показатель относительно $q(t)$, который вычисляется по формуле

$$\lambda_1(q)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_1(\tau)d\tau$$

Теорема 2. Пусть для системы

$$\frac{dy_i}{dt}=p_i(t)y_i+\sum_{k=1}^n p_{ik}(t)y_k, \qquad (22)$$

где коэффициенты – непрерывные действительные функции, определенные на полуоси $J=[0,+\infty)$, $i\in\{1,...,n\}$, для некоторой непрерывной положительной функции $\psi(t)$ на J выполняются условия

1) $\operatorname{Re}p_i(t)>\operatorname{Re}p_{i+1}(t)+\alpha\psi(t), t\in J, i\in\{1,2,...,n-1\},$ $\alpha>0$, $\psi(t)\ge\beta>0,$

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)}=0, i\in\{1,...,n\}, k\in\{1,...,n\},$

тогда система (22) имеет n линейно независимых решений $\bar{y}_k=\{y_{1k},y_{2k},...,y_{nk}\}, k=1,2,...,n;$ удовлетворяющих равенствам:

$$a)\lim_{t\to+\infty}\frac{y_{\mu k}}{y_{kk}}=0, \mu\ne k \quad b)\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\psi(t)}\frac{y'_{kk}}{y_{kk}}-\frac{p_k(t)}{\psi(t)}\right)=0$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по $k=1,...,n.$ Пусть $k=1.$ Тогда в силу леммы 3 и леммы 4 система (22) имеет решение

$$y_1=y_{11}; y_2=y_{21};...; y_n=y_{n1}; \qquad (23)$$

и утверждения $a)$ и $b)$ теоремы выполняются. Пусть утверждения $a)$ и $b)$ теоремы выполняются для любого $k<n.$ Положим

$$y_1=y_{11}\int u\,dt, y_2=y_{21}\int u\,dt+z_1,...,y_n==y_{n1}\int u\,dt+z_{n-1}, \qquad (24)$$

где $\bar{y}_1=\{y_{11},y_{21},...,y_{n1}\}$ решение (23). Тогда система (22) переходит в систему

$$\frac{dz_{\lambda-1}}{dt}=p_\lambda z_{\lambda-1}+\sum_{\mu=2}^n\left(p_{\lambda\mu}(t)-p_{1\mu}(t)\frac{y_{\lambda1}}{y_{11}}\right)z_{\mu-1},$$
$$(\lambda=2,3,...,n) \qquad (25)$$

Заметим, что $p_\lambda(t)>p_{\lambda+1}(t)+\alpha\psi(t),$ $(\lambda=2,3,...,n-1)$. Далее

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\left|p_{\lambda\mu}(t)-p_{1\mu}(t)\frac{y_{\lambda1}}{y_{11}}\right|}{\psi(t)}=\lim_{t\to+\infty}\left|\frac{p_{\lambda\mu}(t)}{\psi(t)}-\frac{p_{1\mu}(t)}{\psi(t)}\frac{y_{\lambda1}}{y_{11}}\right|=0$$

Таким образом, для системы (25) условия теоремы 2 выполняются. Система (25) состоит из $k=n-1$ уравнений. Применяя индукцию к системе (25), получим утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть для системы

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) y_k, k = 1,...,n; \qquad (26)$$

где коэффициенты непрерывные действительные функции определенные на полуоси $J = [0,+\infty)$, для некоторой непрерывной положительной функций $\psi(t)$ на J, выполняются условия

1) $p_{k-1,k-1}(t) - p_{kk}(t) \ge \alpha\psi(t), t \in J, k \in \{2,...,n\}, \alpha > 0,$
$\psi(t) \ge \beta > 0,$

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,n\}, i \ne k,$

3) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau = \lambda_k(q); k = \overline{1,n}.$

где $q(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau$, тогда система (26) имеет фундаментальную систему решений $\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_n$, такую, что $\chi[\overline{y}_k, q] = \lambda_k(q), k = \overline{1,n}.$

Доказательство. В силу условия теоремы и из теоремы 2 следует, что существует фундаментальная система решений системы (26), $\overline{y}_k = \{y_{1k}, y_{2k}, ..., y_{nk}\}, k = \overline{1,n}.$, такая, что

$$a) \lim_{t\to+\infty} \frac{y_{ik}}{y_{kk}} = 0, i \ne k \qquad (27)$$

$$b) \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{\psi(t)} \frac{y'_{kk}}{y_{kk}} - \frac{p_{kk}(t)}{\psi(t)} \right) = 0 \qquad (28)$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $T \in J$, что для любых $t > T$, $k = 1,...,n;$ имеют место неравенства

$$p_{kk}(t) - \varepsilon\psi(t) < \frac{y'_{kk}}{y_{kk}} < p_{kk}(t) + \varepsilon\psi(t).$$

Отсюда $\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau - \varepsilon\int_0^t \psi(\tau)d\tau < \ln\frac{|y_{kk}(t)|}{|y_{kk}(0)|} <$

$< \int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau + \varepsilon\int_0^t \psi(\tau)d\tau.$ Следовательно,

$$\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau - \varepsilon < \frac{1}{q(t)}\ln\frac{|y_{kk}(t)|}{|y_{kk}(0)|} < \frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau + \varepsilon.$$

Отсюда в силу условия 3) теоремы имеем

$$\lambda_k(q) - \varepsilon < \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \ln|y_{kk}(t)| < \lambda_k(q) + \varepsilon \qquad (29)$$

Из теоремы 2 и из свойства показателей относительно $q(t)$ следует, что $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \ln|y_{kk}(t)| = \chi[\overline{y}_k, q]$. Поэтому из (29) в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем требуемое равенство. Теорема 3 доказана.

Следствие 2. В условиях теоремы 3 фундаментальная система решений $\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_n$ образует нормальный базис системы (26), т. е. $\lambda_k(q), k = \overline{1,n}.$ являются обобщенными показателями системы (26).

Доказательство. В самом деле, из условия 1) теоремы следует, что

$$\frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{k-1,k-1}(\tau)d\tau \ge \frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau + \alpha, k = \overline{2,n}.$$

$\lambda_{k-1}(q) \ge \lambda_k(q) + \alpha, k = \overline{2,n}.$ В силу положительности α отсюда следует, что $\lambda_1(q),...,\lambda_n(q)$ различные. Поэтому фундаментальная система решений $\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_n$ образует нормальный базис, а $\lambda_n(q) < ... < \lambda_1(q)$ являются обобщенными показателями системы (26).

Следствие 3. В условиях теоремы 3 обобщенные показатели системы (26) вычисляются по формуле $\lambda_k(q) = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau, k = \overline{1,n}.$

Следствие 4. В условиях теоремы 3 общее решение системы (26) может быть записано в виде $\overline{y} = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) e^{\lambda_k(q)q(t)}$, где c_k – произвольные постоянные, $\chi[\varphi_k, q] = 0$, $\lambda_k(q), k = \overline{1,n}.$ – обобщенные показатели системы (26).

Следствие 5. Если в условиях теоремы 3 $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)}\int_0^t p_1(\tau)d\tau < 0$, где $q(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau$, то система (26) асимптотически устойчива.

Следствие 6. Если в условиях теоремы

$$3 \; \lambda_k(q) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau < 0,$$

где $q(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau$, $1 < k \le n$, то система (26) имеет k-мерное условно-устойчивое подпространство решений.

Следствие 7. Если в условиях теоремы 3 существует точный предел $\lambda_k(q) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau$, $k = 1,...,n$, где $q(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau$, тогда система (26) обобщенно-правильная по Ляпунову относительно $q(t)$.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную систему решений $\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_n$ в теореме 3. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \chi[\overline{y}_k, q] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(q) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{q(t)}\int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{q(t)}\int_0^t \sum_{k=1}^{n} p_{kk}(\tau)d\tau,$$

т. е. система (26) обобщенно-правильная по определению. Следствие 7 доказано.

Следствие 8. Пусть система

$$y' = P(t)y + f(t, y) \qquad (30)$$

удовлетворяет следующим условиям:
1) соответствующая линейная однородная система удовлетворяет условиям следствий 6,
2) $\lambda_1(q) < 0$,
3) функция $f(t, y)$ непрерывна по $t \in J$ и непрерывно дифференцируема по y в области $|y| \le h$ и удовлетворяет неравенству $|f(t, y)| \le \varphi(t)|y|^m$, где $m > 1, \varphi(t)$ – непрерывная положительная функция при $t \in J$ с нулевым обобщенным показателем Ляпунова относительно $q(t)$. Тогда нулевое решение нелинейной системы (30) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Из условия 1), 2) и 3) следуют, что все требования аналога теоремы Ляпунова для неограниченных систем дифференциальных уравнений [3, с. 859] выполняются, откуда следует утверждение. Следствие 8 доказано.

Список использованной литературы:
1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л., 1949., 550 с.
2. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники (Мат. анализ). М., 1974. Т. 12. С. 71-146.
3. Алдибеков Т.М. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. №6. С. 859-860.