Левченко А.С.
Курский государственный университет

К ПРОБЛЕМЕ ОНТО-ГНОСЕОЛОГИЧЕСКОГО ИСТОЛКОВАНИЯ ОСНОВАНИЙ АРИФМЕТИКИ В ТЕЧЕНИИ ИНТУИЦИОНИЗМА

В настоящей статье на основе работ А. Гейтинга, Г. Вейля и А. Пуанкаре выявляются онтологические и теоретико-познавательные установки программы интуиционизма в истолковании таких исходных арифметических понятий, как натуральное число, следование в ряду натуральных чисел, континуум и пр. В работе обосновывается утверждение, что в интуиционистских программах обоснования математики в числе прочего закладываются предпосылки объективистского, реалистического истолкования природы математических истин и объектов.

В некотором смысле интуиционизм опирается на установки неопозитивизма, признавая метафизические вопросы «внешними» для науки вопросами. Однако утверждение одного из фундаментальных для интуиционизма положений об отождествлении понятий «существовать» и «быть построенным», на наш взгляд, вовсе не исключает определенного метафизического, то есть онто-гносеологического смысла в обосновании арифметической составляющей математики. В отличие от других течений философско-математической направленности интуиционисты не стремились доказать непротиворечивость математической теории, а находят основание, при помощи которого имеется возможность создать «новую», непротиворечивую математику. Таким основанием интуиционисты провозглашают факт интуитивного восприятия человеком наиболее фундаментальных понятий математики [3, с. 16-22].

Известно, что к понятию интуиции в математике обращались и до появления школы интуиционизма, но только последователи школы Брауэра сделали попытку построения на его основе новой системы математики. Например, А. Пуанкаре в своем труде «Наука и гипотеза» указывает на присутствие нескольких видов интуиции в человеческом знании и определяет один из этих видов как «интуицию чистого числа», способную стать фундаментальной основой для построения математики: «…можно сказать, что ныне достигнута абсолютная строгость» [5, с. 212]. Пуанкаре говорит о необходимости разработки арифметической составляющей математики, аргументируя это тем, что только арифметические построения сохраняют в себе черты чистой интуиции и математической мысли. Математик указывает на «абсолютную строгость» математических истин и на несводимость интуиции к чувственному восприятию: «чувства скоро оказались бы бессильными; мы не можем представить себе тысячеугольника, однако же мы рассуждаем о многоугольниках вообще, а они включают в себя и тысячеугольник как частный случай» [5, с. 212], он ссылается на существование интуиции «чистого числа», в которой нельзя сомневаться. Такое истолкование понятия интуиции является, на наш взгляд, как минимум косвенным указанием на некий объективный статус арифметических истин, на их адекватность, соответствие и тем самым принадлежность к действительности.

Сам А. Пуанкаре не предпринимает попытки построения непротиворечивой математики на основе интуиции. Он предлагает идею конвенционализма как залога непротиворечивости математики. В этом, кажется, и было одно из основных и глубоких отличий между ним и интуиционистами, считавшими залогом непротиворечивости для науки не всеобщее согласие относительно математических понятий и объектов, а интуитивную понятность этих понятий и объектов для каждого.

Базируясь на том, что для построения новой математики необходимо пересмотреть некоторые понятия и принципы построения классической математики, интуиционисты называют основанием своей концепции интуитивное восприятие человеком натурального ряда чисел и понятие континуума [4, с. 2]. Немецкий математик, разделяющий некоторые идеи Брауэра, Герман Вейль для всей математики указывает два фундаментальных понятия, которые, по его мнению, «соприкасаются со сферой непостижимого», – принцип построения натурального ряда и понятие континуума. При этом Вейль относит все дальнейшие построения, примерами которых являются «переход от натуральных чисел к отрицательным и дробным… введение мнимых и гиперкомплексных величин», к операциям чисто формально-логического характера, «не таящим в себе никаких трудностей и загадок» [1, с. 18]. Огромным теоретико-познавательным открытием, по мнению Вейля, был способ построения Брауэром теории, в которой континуум выступал как сфера свободного становления [1, с. 22]. В приведенной ситуации (возможно, неявно) вводимое интуиционистами понятие потенциальной бесконечности имеет под собой весьма серьезное теоретическое обоснование и признается ими как значимое при построении оснований математики.

Относительно числа интуиционисты отбрасывают любой метафизический подход и считают, что число может существовать лишь в том случае, если дан способ его построения. Иначе, по мнению немецкого математика А. Гейтинга, само понятие существования должно иметь какой-то метафизический характер, а это противоречит основным установкам интуиционизма – изучать математику без привлечения в нее любого рода метафизических проблем. Интуиционисты говорят, что понятия натурального числа и числового ряда являются интуитивно ясными и, хотя они и не обладают абсолютной определенностью и точностью, все же их вполне достаточно для построения математики. Критикуя финитизм других математических течений, А. Гейтинг говорит, что он хотя и «дает максимальные гарантии против опасности непонимания», но «влечет за собою такое отрицание понимания, которое трудно принять» [3, с. 16].

При этом весьма интересным фактом выступает признание А. Гейтингом в работе «Интуиционизм. Введение» объективного статуса числа, вернее, невозможность сведения чисел к чисто субъективным построениям, к психологизму: «Если бы натуральное число было только результатом умственного построения, то оно не продолжало бы существовать после завершения акта этого построения и было бы невозможно сравнивать его с другими натуральными числами, построенными в другое время и в другом месте» [3, с. 24]. Чтобы получить возможность выполнять такое сравнение, нам необходимо связывать полученное число с каким-либо материальным объектом. Таким объектом может быть, например, математическая формула или точка на координатной плоскости. Но ситуация, в которой говорится не о конкретном построении, а о его возможности, не имеет содержательного смысла. Только в том случае, когда доказательство осуществленного построения проведено, мы имеем право высказывать экзистенциальное суждение. В этом с А. Гейтингом соглашается и Г. Вейль, говоря, что именно по вышеуказанной причине в теоремах о существовании построение имеет большую ценность для интуициониста, нежели проведенное доказательство [1, с. 77].

Однако объективные аспекты трактуются Гейтингом лишь как материальные символические обозначения чисел: «мы фиксируем натуральное число x средствами материального представления; с каждым элементом построения x мы связываем, например, точку на бумаге. Это помогает нам сравнивать при помощи простого наблюдения натуральные числа, построенные в различное время» [1, с. 24, 25]. Это, конечно же, неверно, так как мы могли бы символически обозначать свои сновидения, но они не были бы воспроизводимы или проверяемы для любого другого человека. Следовательно, объективная составляющая сущности чисел не может быть сведена лишь к материальности их символических обозначений. Функциональная сущность числа не зависит от способа его написания, а интуитивное восприятие сущности числа одинаково для каждого человека, отсюда мы имеем полное право говорить о неоправданном отсутствии глубокого рассмотрения онто-гносеологических аспектов статуса числа в интуиционистской версии оснований математики.

Центральные понятия оснований математики, по словам немецкого математика и философа Германа Вейля, это понятие первого натурального числа – 1 и отношение следования одного числа за другим в натуральном ряду. Ученый высказывает мысль о том, что «математические теоремы частью относятся ко всей совокупности натуральных чисел, частью же ко всей совокупности возникающих в результате актов свободного выбора становящихся последовательностей натуральных чисел» [1, с. 26, 35]. На основании этого мы предполагаем допущение ученым возможности объективного существования математических понятий, которыми являются натуральные числа как таковые и последовательности натуральных чисел.

Г. Вейль связывает основы восприятия понятия числа с пространственно-временными характеристиками существования человека в мире. По его мнению, категория времени является основополагающей предпосылкой для тех операций разума, которые определяют числовые умозаключения. Однако связь между арифметикой и временем, по мнению ученого, значительно менее фундаментальна, чем связь между геометрией и пространством. Время – форма чистого сознания и предпосылка числовых предложений, говорит Вейль, то есть числа, с одной стороны, «не имеют собственного существования как идеальные объекты», а с другой стороны – опираются на время – «форму чистого сознания» [1, с. 63]. Тогда возникает закономерный вопрос – что такое «чистое сознание»? Не кроется ли за этим определением Вейля некая объективная возможность существования разума? Однако очевидно, что сам математик отмежевывается от размышлений над этим вопросом, опираясь на установку интуиционистов об отсутствии необходимости решения метафизических проблем оснований математики.

Г. Вейль указывает на первичность порядковых свойств чисел, относя доказательство этого к самим истокам процесса их интуитивного построения в мышлении: «Процесс счета располагает элементы совокупности в упорядоченную последовательность (первый, второй, третий, и т. д.)» [1, с. 61]. В области натуральных чисел единственным отношением и законом для определения всех чисел Г. Вейль видит отношение между предыдущим числом и следующим за ним. Он говорит, что упорядоченная последовательность, которую образуют из себя создаваемые таким образом числа, нуждается в особого рода интуитивном рассуждении, которое бы привело к доказательству того, что результат пересчитывания не зависит от его порядка.

А. Гейтинг высказывает свою точку зрения на этот вопрос (будучи солидарным с Л.Э.Я. Брауэром): в процессе счета перечисляемые объекты выступают в мышлении человека как некоторые интуитивно воспринимаемые математические сущности. При этом факт их перечисления, то есть отделения сущностей друг от друга, является важнейшим свойством человеческого разума. Метафизические же вопросы, касающиеся того, дано ли нам определение сущности заранее или мы его создаем при размышлении об отделяемом от других предмете – не являются значимыми для интуиционизма, процесс счета не зависит от отношений между этими понятиями. Значительно более важна для счета возможность поочередной концентрации человеческого внимания на одной из отделенных сущностей, потом на другой и т. д. [3, с. 22].

Для интуиционистов общее суждение о числе мы можем получить только в том случае, когда нами исследуется сама сущность числа, рассмотрение же свойств отдельных чисел никогда не даст нам возможности построить такое суждение. Чтобы получить утвердительный ответ на вопрос о наличии или отсутствии свойства Р у числа, необходимо знать конкретное число, обладающее этим свойством, иначе необходимо исследовать все числа. Но это невозможно, поэтому только твердая уверенность в том, что число в сущности своей обладает или не обладает свойством Р, позволяет сделать правильный вывод относительно такого предположения. Таким образом, если кому-то удалось построить некоторое число n с присущим ему свойством Р, то он имеет полное право утверждать, что число с такими свойствами существует, но альтернатива, принятая в теоретико-множественном обосновании математики, утверждающая, что либо такое число существует, либо все числа обладают свойством не-Р, – не имеет для интуиционистов никакого основания [2, с. 44]. Герман

Вейль, подтверждая вышеупомянутое отношение интуиционизма к рассмотрению подходов в изучении сущности числа, указывает на возможность получения положительного решения «только в результате исследования сущности числа, а не в результате исследования отдельных чисел» [1, с. 22-23]. Эта установка ученого подразумевает допустимость и необходимость углубления понятийных оснований арифметики, что, в свою очередь, не исключает и полезности онто-гносеологических исследований в отношении статуса оснований арифметики в интуиционизме.

Г. Вейль в своей работе «О философии математики», посвященной рассмотрению современного ему состояния дел в этой области, подчеркивает, что в своей теории интуиционистского обоснования математического знания Л.Э.Я. Брауэр согласен с мыслями, высказанными относительно общих суждений о числах А. Пуанкаре в труде «Наука и гипотеза» [5]. Вейль указывает, что для Л.Э.Я. Брауэра общее суждение не высказывает какого-либо определенного положения дел и является гипотетическим, а конкретным суждением становится только по отношению к заданному числу. Построить общее суждение, которое бы было содержательным безотносительно к конкретному математическому объекту, для интуиционистов не представляется возможным. При таких условиях Л.Э.Я. Брауэр отказывается от принципа исключенного третьего, доказывая это неправомерным перенесением экзистенциальных понятий из области «математики подмножеств определенного (читай: заданного путем указания его элементов) конечного множества» в область «математики бесконечных множеств» [1, с. 77-78]. При этом цитирующий Л.Э.Я. Брауэра Г. Вейль сам разделяет понятия сущего и возможного как двух основных «агрегатных состояний», свойственных математически мыслимому объекту, и говорит о возникновении экзистенциальной осмысленности только после осуществления процедуры построения.

Другим основополагающим понятием интуиционистской математики является континуум. Брауэр говорит о континууме, определяемом не как безусловно заданное и конкретизированное бытие, а как среда свободного становления, законы которой определимы и познаваемы только посредством интуиции. В книге Г. Вейля «О философии математики» представлены выдержки из венского доклада Л.Э.Я. Брауэра (Mathematik, Wissenschaft und Sprache. Mon.-Hefte f. Math. u. Phys., 1929), в котором ученый обстоятельно объясняет эволюцию интуитивного построения числового ряда и говорит о невозможности существования каузальной связи мира вне человеческого мышления. Последовательный ряд чисел рассматривается им как некий феномен человеческой рефлексии над разделением момента жизни человека на две аналогичные составляющие. Причем одна из составляющих (предположительно, «прошлое»), заменяясь другой, переходит в область воспоминаний, другая же составляющая при этом разделяется еще на две половины и т. д. При этом весь происходящий процесс воспринимается человеческой интуицией и полностью определяет ее. Очевидно тогда, что благодаря интуиции человек теоретически способен и к обратному построению – возврату и объединению разделяющихся временных сущностей с целью нахождения первооснов континуума. Раздельность двух мест в континууме, таким образом, переходит посредством бесчисленного количества промежуточных дискретных состояний в их неразличимость. Поэтому континуум невозможно составить из отдельных частей, в нем существуют только непрерывные функции. Говоря, например, о выделении подконтинуума положительных чисел из континуума действительных чисел, Г. Вейль указывает, что ошибочно думать, что весь континуум будет состоять из положительных чисел, отрицательных чисел и нуля, мы имеем право утверждать лишь то, что любое число будет принадлежать одному из подконтинуумов вышеуказанных чисел [1, с. 8, 25].

Интуиционисты определяют категорию пространства как бесконечную не только в смысле отсутствия его границ, но и относительно определения точки в самом пространстве как бесконечного уточнения ее местоположения относительно других точек: «Непрерывное не может состоять из дискретных элементов, которые отделены друг от друга и как бы отрублены друг от друга ударами топора… Это представление противоречит покоящемуся, законченному в себе для интуиции бытию пространства» [1, с. 68]. Причем такой подход характерен не только для категории пространства, но и для оценки реально существующего мира вещей. Вещь, которая в действительности существует, никогда не может быть воспринята нами полностью, во всей совокупности своих проявлений, говорят они. Следствием этого выступает отсутствие возможности определять вещи действительного мира как замкнутые в себе и всесторонне завершенные сущности. Далее Г. Вейль говорит о нереальности существования математического тела вследствие невозможности его разложения на первичные сущности и причисляет его к области построений мышления [1, с. 68]. Здесь можно утверждать, что ученый указывает на объективные сущностные особенности математических объектов, говоря о соответствии непрерывных и дискретных свойств математического пространства свойствам «вещей внешнего мира», то есть свойствам действительности.

Основывая математику на понятии континуума, Л.Э.Я. Брауэр прежде всего вводит собственное определение понятия последовательности. По мнению Г. Вейля, под этим понятием Л.Э.Я. Брауэр понимает не последовательность, построение которой определялось бы некоторым законом, а последовательность, которая строится посредством свободного выбора каждого следующего ее члена: «…свойство континуума, данное нам в нашей интуиции: в нем раздельность двух мест переходит при их сближении в неотличимость, так сказать, постепенно, через целый ряд расплывчатых промежуточных стадий» [1, с. 25]. При этом большую роль играет факт, что какое-либо свойство, присущее последовательности, можно определить лишь в том случае, если предварительно был достигнут результат, однозначным образом определяющий наличие этого свойства, и дальнейшее построение последовательности никак не повлияет на полученные результаты. Такая последовательность, согласно Вейлю, воспринимается Л.Э.Я. Брауэром как возможный объект математического образования понятий. Если же вышеперечисленные условия не выполняются, то мы должны говорить о последовательности, построенной согласно определенному закону и являющейся определенной до бесконечности, а континуум, по мнению интуиционистов, «никоим образом не разрешается сам в совокупность предлежащих готовыми вещественных чисел» [1, с. 102].

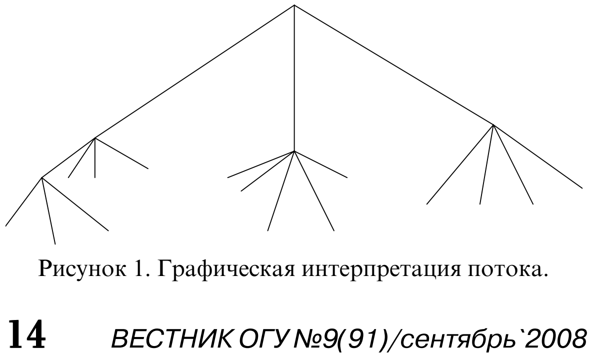
Рисунок 1. Графическая интерпретация потока.

Полученный таким образом континуум, состоящий из произвольным образом выбранных вещественных чисел, никогда не будет всецело определяться совокупностью предварительно данных вещественных чисел, а всегда будет являться интуитивно выстраиваемой свободно становящейся областью этих математических объектов. Г. Вейль подчеркивает, что в дополнение к вышеперечисленному Брауэр окончательно убрал рамки предопределенности в построении последовательностей и множеств, отказавшись от выражений «все» и «существуют», которые «оказываются уязвимыми не только при применении их к совокупности подмножеств бесконечного множества, но уже при применении к самым элементам бесконечного множества» [3, с. 22].

Опираясь на вводимые Л.Э.Я. Брауэром понятия числового ряда и континуума, А. Гейтинг высказывает собственную идею о возможности построения множества в интуиционизме, определив его понятием бесконечно продолжающейся последовательности. Бесконечно продолжающаяся последовательность определяется им как такая, продолжать которую можно до бесконечности, а основным ее свойством является полная свобода при определении каждого последующего члена. Связь вышеупомянутого А.

Гейтингом понятия бесконечно продолжающейся последовательности с определением Л.Э.Я. Брауэра понятия потока привела к двум различным подходам в интуиционизме к определению множества.

Первый из них тесно связан с понятием потока [3, с. 45-46]. Поток определяется интуиционистами как бесконечно продолжающаяся последовательность, определяемая законом выбора натуральных чисел последовательности и законом, сопоставляющим полученную бесконечно продолжающуюся последовательность натуральных чисел последовательности математических объектов; чаще всего указанными объектами выступают рациональные числа. Такой способ определяет последовательность по общему закону выбора ее элементов. В интуиционизме поток также называют допустимой последовательностью, а ее графическая интерпретация представляет собой последовательное веерообразное построение, причем в таком веере из любой вершины может исходить бесконечное число лучей (рис. 1) [3, с. 46].

Понятие вида тесно связано со свойствами математических объектов, по сути, виды – это и есть свойства математических объектов: «построение натурального числа n состоит в последовательном образовании чисел от 1 до n; эти числа образуют вид 1 – n. Вид называется конечным, если при некотором n он эквивалентен 1 – n» [3, с. 51]. Основное свойство вида заключается для интуиционистов в том, что любой математический объект, определенный после определения какого-либо вида P и удовлетворяющий его условию, сам является членом вида P. Способ определения последовательности, в этом случае происходит посредством свойства, характерного для ее элементов. К важным свойствам, характерным для бесконечно продолжающейся последовательности при этом стоит отнести тот факт, что способ выбора ее элементов может изменяться на любом этапе построения, то есть уже после того, как часть элементов последовательности определена.

В итоге этого краткого обозрения можно сделать вывод о том, что, хотя представители интуиционизма преимущественно стремятся избежать рассмотрения метафизических аспектов построения оснований математических теорий, их концепции могут служить плодотворной почвой для разработки онтологического и гносеологического фундамента математических областей. В частности, можно сказать, что в интуиционизме четко просматриваются элементы математического реализма, ориентированного на выявление объективных составляющих в природе математических истин, в частности истин, относящихся к исходному базису арифметики. Нам представляется весьма перспективным дальнейшее историко-философское исследование этой проблемы.

Список использованной литературы:
1. Вейль Г. О философии математики: Пер. с нем. / Предисл. С.А. Яновской. Вступ. ст. А.П. Юшкевича. Изд. 2-е, стереотипное. – М.: КомКнига, 2005.
2. Г. Вейль. Полвека математики. (Перевод с английского З.А. Кузичевой), М.: ЗНАНИЕ, 1969.
3. Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. Перевод Б.А. Янкоба, под ред. и с комментариями А.А. Маркова. М., «МИР», 1965.
4. Гейтинг А. Интуиционистские взгляды на природу математики. М.: РГИУ, 1999.
5. Пуанкаре А. О науке: Пер с фр. / Под ред. Л.С. Понтрягина. – 2 изд., стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект №08-03-00049а.