Севодин М.А., Полнер М.П.
Пермский государственный технический университет

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫРАВНИВАНИЯ ЦЕН НА ФАКТОРЫ ПРОИЗВОДСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО КОЛЕБАНИЙ ЦЕН НА ТОВАРЫ

Изучается влияние на выравнивание цен на факторы колебаний в ценах на товары. Устанавливается некоторая устойчивость выравнивания цен на факторы по отношению к изменению цен на товары.

Благодаря международной экономической науке экономики разных стран оказались взаимосвязанными друг с другом самым тесным образом. Учет изменений международных условий в настоящее время стал необходимым элементом при разработке стратегии как отдельного предприятия, так и экономической политики государства в целом.

Среди множества теорий, описывающих влияние международной торговли на экономики стран, выделяют [1, с. 90] модель Хекшера – Олина. Эта теория объясняет, какую роль играют в торговле различия в ресурсах разных стран. Одним из главных выводов, к которым приводит использование модели Хекшера – Олина, является вывод о выравнивании цен на факторы производства в торгующих между собой странах. В силу достаточно жестких предположений модели этого выравнивания в действительности не наблюдается, но общепринято говорить о тенденции к выравниванию цен на факторы производства и объяснять этим различные эффекты, к которым приводит международная торговля. В ряду таких жестких предположений находится предположение о полном выравнивании цен на товары. Вследствие как естественных препятствий (например, транспортных издержек), так и искусственных ограничений в виде таможенных пошлин или квот на импорт цены товаров абсолютно одинаковыми в различных странах считать нельзя.

В данной статье изучается влияние на выравнивание цен на факторы колебаний в ценах на товары. Устанавливается некоторая устойчивость выравнивания цен на факторы по отношению к изменению цен на товары.

Напомним некоторые положения модели Хекшера – Олина. Предположим, что экономика некоторой страны, участвующей в международной торговле, производит ряд товаров. Тогда конкуренция среди производителей в каждой отрасли обеспечит равенство цены каждого товара издержкам его производства. Издержки производства конкретного товара зависят от цен на факторы производства: если плата за использование некоторого фактора увеличится, то тогда при прочих равных условиях цена любого товара, производство которого требует использования рассматриваемого фактора, также должна возрасти. Влияние цены некоторого фактора производства на затраты по изготовлению товара зависит от того, в какой степени этот фактор используется в производственном процессе. Если производство товара требует использования малого количества фактора, то рост платы за использование фактора скажется на цене товара незначительно и наоборот. Таким образом, можно говорить о том, что существует прямая зависимость между ценами на товары и ценами участвующих в их производстве факторов. Эту зависимость мы будем называть функцией издержек.

Предполагается, что количество факторов производства совпадает с количеством производимых продуктов и равно n, причем факторы полностью подвижны внутри страны и совершенно неподвижны между странами, а все товары производятся в условиях постоянной эффективности при изменяющемся масштабе производства.

Рассматриваются технологические множества T_i для каждой из отраслей, производящих продукты (при этом считается, что каждая отрасль производит только один продукт), и строится функция удельных издержек $c(w)$, каждая компонента которой определяется как

$$c_i(w)=\min\,(w,x^i)$$

по всем процессам из T_i с единичным выпуском, где w – вектор цен на факторы производства, а x^i – вектор затрат факторов на производство i-го продукта.

Учитывая одинаковые для всех стран функции производства и производственные возможности, можно говорить о совпадении функций издержек в торгующих странах.

Известно (см. [2]), что взаимная однозначность функции издержек $p = c(w)$ (где p – набор мировых цен на товары) гарантирует выравнивание цен на факторы для всех стран.

Условия взаимной однозначности отображения $p = c(w)$ можно устанавливать, в частности, исследуя его матрицу Якоби $J_c(w)$.

Так справедлива

Теорема 1. Пусть D – область в $\boldsymbol{R}^n$, а отображения $c{:}D\to\boldsymbol{R}^n$, $g{:}D\to\boldsymbol{R}^n$ непрерывно дифференцируемы, $G = g(D)$ – выпуклая область, g – взаимно однозначно в D. Если матрица $J_c \cdot J_g^{-1}$ положительно или отрицательно квазиопределена в G, то c – взаимно однозначное в D отображение. Здесь J_c и J_g – якобиевы матрицы отображений c и g соответственно.

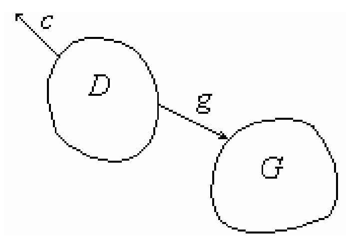

Рисунок 1.

Доказательство.

Для обоснования взаимной однозначности отображения c в D достаточно доказать взаимную однозначность отображения $c \circ g^{-1}$ в G. Рассмотрим случай положительной квазиопределенности $((J_c \cdot J_g^{-1} x, x) > 0)$. Пусть $x_1, x_2 \in G$ и $x_1 \neq x_2$. Положим $x(t) = x_1 + th$, где $h = (h_i) = x_2 - x_1 \neq 0$. В силу выпуклости области G будем иметь $x(t) \in G$ $(0 \le t \le 1)$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{n} (c_i(g^{-1}(x(t))) - c_i(g^{-1}(x_1)))h_i \quad (0 \le t \le 1).$$

Дифференцируя, получим

$$\Phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(g^{-1}(x(t))) g_{kj}^{-1}(x(t)) \right) h_j h_i ,$$

где f_{ij} означает частную производную i-й координатной функции отображения f по j-му аргументу.

Вычисленная производная положительна при всех t в силу положительной квазиопределенности матрицы $J_c \cdot J_g^{-1}$, следовательно, функция $\Phi(t)$ строго возрастает на отрезке [0, 1]. Так как $\Phi(0) = 0$, то $\Phi(1) > 0$, и, следовательно, $(c_i(g^{-1}(x_2)) - c_i(g^{-1}(x_1))) \neq 0$ хотя бы для одного i, чем и доказана взаимная однозначность отображения c.

В частном случае тождественного отображения g из теоремы 1 получается известный результат Гейла и Никайдо, связанный с положительной или отрицательной квазиопределенностью матрицы Якоби [3, с. 477].

Кроме того, можно показать, что в $\boldsymbol{R}^2$ для случая прямоугольной области эта теорема является улучшением другого результата Гейла и Никайдо, основанного на аппарате Р-матриц [3, с. 472]. В самом деле, пусть $c(w) = u(x,y) + iv(x,y)$ задана и непрерывно дифференцируема в D_w – прямоугольнике со сторонами, параллельными осям координат, а ее матрица Якоби $c' = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$ – P-матрица, т. е. $u'_x > 0$, $v'_y > 0$, $u'_x v'_y - u'_y v'_x > 0$. Последнее условие означает [4, с. 131], что, взяв произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат D_z, можно построить такой гомеоморфизм $w = w(z)$, $w{:}D_z \to D_w$, что $C(z) = c(w(z))$ – функция аналитическая в D_z. Если $z = s + it$, $U = U(s,t) = u(x(s,t), y(s,t))$, $V = V(s,t) = v(x(s,t), y(s,t))$, то в силу аналитичности $C = U + iV$ имеем $U'_s = V'_t$, $U'_t = -V'_s$. Поэтому матрица Якоби $C' = \begin{pmatrix} U'_s & U'_t \\ V'_s & V'_t \end{pmatrix}$ положительно квазиопределена, если $U'_s > 0$. Действительно,

$$(C'z^{\mathrm{T}}, z) = \left(\begin{pmatrix} U'_s & U'_t \\ V'_s & V'_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, (s,t) \right) =$$

$$= U'_s s^2 + U'_t ts + V'_s st + V'_t t^2 = (s^2 + t^2) U'_s$$

и, если точка $(0,0) \notin D_z$, то положительная квазиопределенность очевидна.

Выразим U'_s через u'_x и v'_y:

$$U'_s = \frac{y'_t x'_s - y'_s x'_t}{y'_s x'_s + y'_t x'_t} (u'_x x'_t + v'_y y'_s) \qquad (1)$$

Зафиксируем прямоугольник D_z в плоскости z так, что $w(z_i)=w_i$, $i=1,2,3,4$, причем сторона I при отображении $w(z)$ перейдет в I′, II – в II′, III – в III′, IV – в IV′ (рис. 2).

Заметим теперь, что U'_s – гармоническая функция: $(U'_s)''_{ss}+(U'_s)''_{tt}=(U''_{ss})'_s+(U''_{tt})'_s=$ $=(U''_{ss}+U''_{tt})'_s=0$, так как $u=U(s,t)$ – гармоническая функция как действительная часть аналитической функции. Поэтому для доказательства неравенства $U'_s>0$ в D_z достаточно проверить неравенство $U'_s\ge 0$ на границе D_z, то есть на сторонах I, II, III, IV.

На стороне I имеем y=const. Поэтому $y'=0$, а x возрастает, то есть $x'_s\ge 0$. Значит (см. (1)),

$$U'_s=\frac{x'_s}{x'_t}u'_x x'_t=u'_x x'_s\ge 0\,.$$

Исследуя остальные три стороны аналогичным образом, получим, что U'_s на границе D_z неотрицательна, следовательно, $U'_s>0$ в D_z, что и требовалось доказать.

Отметим, что теорема 1, представляя собой самостоятельный интерес, может также быть использована и при исследовании других проблем. Поставим следующую задачу: пусть ситуация на рынке находится в равновесии, а цены на факторы производства выравнены. Возникает вопрос о допустимых колебаниях мировых цен на товары, при которых соответствующие наборы цен на факторы будут одинаковыми для всех стран. Частичный ответ на этот вопрос дает

Теорема 2. Пусть $c:D\to\boldsymbol{R}^n$ непрерывно дифференцируемое в выпуклой области D отображение, $p_0=c(w_0)$, $w_0\in D$, и в D с любым $h\in\boldsymbol{R}^n$ выполняется неравенство $(J_c(w)h,h)\ge\sigma>0$. Тогда для каждого p такого, что $\|p-p_0\|<\frac{\sigma}{\delta}$, существует единственный вектор $w\in D$, $\|w-w_0\|<\delta$, удовлетворяющий равенству $c(w)=p$, где $\delta=\mathrm{dist}(\partial D,w_0)$ – евклидово расстояние от w_0 до ∂D (границы D).

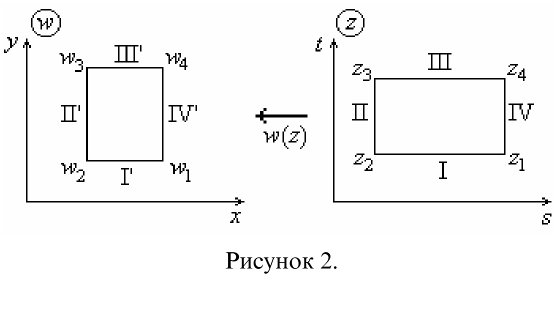

Рисунок 2.

Доказательство.

Прежде всего заметим, что для любого w, такого, что $\|w-w_0\|=\delta$, имеет место

$$\|c(w)-p_0\|=\|c(w)-c(w_0)\|=\|c(w)-c(w_0)\|\cdot\frac{\|w-w_0\|}{\delta}=$$

$$=\frac{1}{\delta}\left\|\left(c(w)-c(w_0)\right)\cdot\left(w-w_0\right)\right\|=$$

$$=\frac{1}{\delta}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(c_i(w)-c_i(w_0)\right)\cdot\left(w-w_0\right)_i\right|=$$

$$=\frac{1}{\delta}|\Phi(1)|=\frac{1}{\delta}|\Phi(1)-\Phi(0)|=\frac{1}{\delta}\int_0^1\Phi'(t)dt\ge\frac{\sigma}{\delta},$$

где функция $\Phi(t)$ из теоремы 1 с $g(w)=w$, а $(w-w_0)_i$ – i-я координата вектора $w-w_0$.

Из установленного вытекает включение

$$\left\{p:\|p-p_0\|<\frac{\sigma}{\delta}\right\}\subset\{\,c(w),w\in W:\|w-w_0\|<\delta\,\},$$

которое, с учетом результата теоремы 1, доказывает теорему 2.

Легко заметить, что требование положительной квазиопределенности не является единственным достаточным условием для получения подобных результатов. В частности, справедлива

Теорема 3. Пусть $D\subset\boldsymbol{R}^n$ такова, что любые точки $w_1,w_2\in D$ можно соединить гладкой кривой $l(w_1,w_2)\subset W$, длина которой $\mathrm{r}(w_1,w_2)$ удовлетворяет условию $\rho(w_1,w_2)\le\lambda\|w_1-w_2\|$, $\lambda\ge 1$. Пусть $c:D\to\boldsymbol{R}^n$ непрерывно дифференцируема в D, $p_0=c(w_0)$, $w_0\in D$ и c удовлетворяет условию

$$\|J_c(w)-aE\|<\frac{|a|}{\lambda^2},\ w\in D,\ a\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\},$$

где E – единичная матрица, $\|A\|=\sup\limits_{w\in D}\frac{\|Aw\|}{\|w\|}$. Тогда для каждого p, такого, что $\|p-p_0\|<|a|\delta\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)$, существует единственный вектор $w\in D$, $\|w-w_0\|<\delta$, удовлетворяющий равенству $c(w)=p$, где $\delta=\mathrm{dist}(\partial D,w_0)$.

Доказательство.

Покажем взаимную однозначность $c(w)$, следуя [5]. Для этого зафиксируем w_1, w_2. Возьмем гладкую кривую $l(w_1,w_2)$, соединяющую w_1 и w_2, длина которой $\rho(w_1,w_2)$ удовлетворяет условию $\rho(w_1,w_2)\le\lambda\|w_1-w_2\|$, и допустим, что $w=w(t)$, $b\le t\le d$ – параметризация $l(w_1,w_2)$, причем $w(b)=w_1$, $w(d)=w_2$.

Тогда

$$c(w_2)-c(w_1)=\int_b^d J_{c\circ w}(t)dt=$$

$$=a\int_b^d w'(t)dt+\int_b^d (J_c(w(t))-aE)\cdot w'(t)dt\,.$$

Отсюда

$$\|c(w_2)-c(w_1)\|\geq |a|\cdot\left\|\int_b^d w'(t)dt\right\|-$$

$$-\left\|\int_b^d (J_c(w(t))-aE)\cdot w'(t)dt\right\|>$$

$$>|a|\cdot\|w_2-w_1\|-\frac{|a|}{\lambda^2}\int_b^d\|w'(t)\|dt\geq$$

$$\geq|a|\cdot\|w_2-w_1\|-\frac{|a|}{\lambda}\|w_2-w_1\|=$$

$$=|a|\cdot\|w_2-w_1\|\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\geq 0\,.$$

Таким образом, $\|c(w_2)-c(w_1)\|>0$, и, следовательно, $c(w)$ взаимно однозначна в D.

Пусть теперь $w\in D$, $\|w-w_0\|=\delta$, $w(t)=w_0+t(w-w_0)$, $0\leq t\leq 1$. Тогда

$$\|c(w)-p_0\|=\|c(w)-c(w_0)\|>$$

$$>|a|\cdot\|w-w_0\|\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)=|a|\delta\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Отсюда следует вложение

$$\left\{p:\|p-p_0\|<|a|\delta\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}\subset\{c(w),w\in W:\|w-w_0\|<\delta\}.$$

Теорема доказана.

Доказанные теоремы 2 и 3 позволяют объяснять выравнивание цен на факторы производства в двух случаях. В первом случае считается, что изменение в мировых ценах на товары произошло в силу каких-либо причин. Тогда, если функция издержек удовлетворяет определенным свойствам (см. теоремы 2 и 3), одинаковые цены на факторы производства сохранятся. Во втором случае предполагается, что какая-либо страна меняет для себя мировую цену товара, вводя какие-либо ограничения. Тогда тенденция к выравниванию цен на факторы сохраняется и проявляется в виде близких цен на факторы производства.

Последний случай проиллюстрируем на примере торговли друг с другом двух стран. Предположим, что две страны, первая и вторая, располагают двумя факторами производства, цены которых в первой стране на первый и второй факторы – w_{11} и w_{21}, во второй стране соответственно – w_{12} и w_{22}. Рассматриваемые страны используют факторы для производства двух товаров, мировые цены которых – p_1 и p_2 для первого и второго товаров соответственно. Обозначим через $k = p_1/p_2$ относительную цену первого товара. Тогда (рис. 3) при отсутствии торговли равновесное состояние экономики первой страны будет определяться точкой 1, соответствующей точке пересечения кривых относительного спроса RD и относительного предложения RS. Точка 3 на рис. 3 соответствует точке равновесия экономики второй страны. Через RS* обозначена кривая относительного предложения этой страны. Когда обе страны начинают торговать друг с другом, то значения их относительных цен начинают сближаться. Относительная цена в экономике первой страны растет, а в экономике второй страны падает, и новая относительная мировая цена принимает значение между уровнями относительных цен, существовавших до начала торговли. Это новое значение на рис. 3 соответствует точке 2.

Как уже отмечалось выше, существует прямая зависимость между отношением цен на факторы производства w_1/w_2 и относительной ценой $k=p_1/p_2$ первого товара, причем очевидно, что чем выше относительная цена первого фактора $\lambda=w_1/w_2$, тем выше

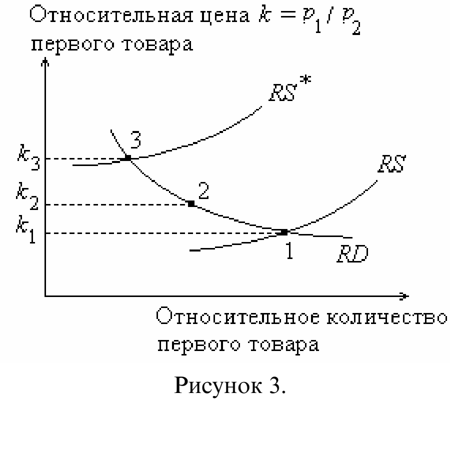

Рисунок 3.

должна быть цена k. Данная зависимость показана кривой SS на рис. 4.

На рис. 4 выделены точки k_1 и k_3 и соответствующие им цены λ_1 и λ_3. После начала торговли эти числа начинают сближаться и занимают соответственно положения k_2 и λ_2. Если одна из стран (и даже обе) меняют для себя мировую относительную цену k_2 в пределах от (k_2–ε) до (k_2+ε), то тем самым изменяется и относительная цена λ. Она колеблется в пределах от (λ_2–δ) до (λ_2+δ), то есть все равно относительные цены на первый фактор λ сближаются в странах, хотя они могут и не совпадать. Таким образом, вывод о тенденции выравнивания цен на факторы остается верным. Отметим, что число δ, фигурирующее в этих рассуждениях, и число δ из теорем 2 и 3 не совпадают. Для нахождения связи между ними нужно выполнить специальные построения, чем мы заниматься не будем. Кроме того, видно, что функцию издержек $c=c(w)$ нужно изучать в обрасти D, соответствующей изменениям относительных цен первого фактора от λ_1 до λ_2. Это означает, что D ограничена в плоском случае отрезками прямых, не параллельными осям координат w_1 и w_2. То есть недостаточно строить условия взаимной однозначности отображения $c=c(w)$ в прямоугольной области с гранями, параллельными координатным плоскостям, как это делалось, например, в [3, с. 472] (см. также [6]). Необходимо и с позиций этого замечания и в связи с доказанными теоремами 2, 3 получать условия взаимной однозначности в более широких классах областей. Теорема 1 фактически позволяет рассматривать выпуклые области. Мы в заключение статьи

Рисунок 4.

докажем теорему, в которой фигурируют звездообразные области (см., например, [7, с. 167]).

Назовем множество D звездообразным относительно точки w_0, если любой луч, проведенный из точки w_0, пересекает границу множества D только в одной точке. Если D звездообразное относительно w_0, то мы определим функцию $R(w)$ следующим образом: $R(w)$ равна расстоянию от точки w_0 до граничной точки t_w области D, которая лежит на луче, проведенном из w_0 в направлении вектора w. Далее мы будем предполагать функцию $R(w)$ дифференцируемой.

Справедлива

Теорема 4. Если отображение $c=c(w)$ задано в звездообразной относительно точки w_0 области D, такой, что $\|grad\ R(w)\| \le \alpha$, $\alpha>0$, $w \in D$, удовлетворяет условию

$$\|J_c(w) - E\| < (2\alpha+3)^{-1},\ w \in D,$$

то отображение $c=c(w)$ взаимно однозначно в области D.

Доказательство.

Не ограничивая общности, будем считать, что $w_0=0$, а отображение $c(w)$ дифференцируемо в $\overline{D}$. Рассмотрим отображение $\Lambda(w) = R^2(w)w/\|w\|^2$, $w \in \boldsymbol{R}^n$. Это отображение точки, лежащие в $\boldsymbol{R}^n \backslash D$, переводит в D и наоборот, оставляя неподвижными граничные точки. Кроме того, вычисления показывают, что

$$\|J_\Lambda(w)\| = \frac{2R^2(w)}{\|w\|^2}\left\|\frac{w^{\mathrm{T}} \cdot (grad\ R(w))}{R} - \frac{w^{\mathrm{T}} \cdot w}{\|w\|^2} + \frac{1}{2}E\right\| \le$$

$$\le 2\left(\|grad\ R(w)\| + 1{,}5\right) \le 2\alpha + 3,\ w \in \boldsymbol{R}^n \backslash D.$$

Поэтому отображение

$$F(w)=c(\lambda(w))+w-\lambda(w),\ w \in \boldsymbol{R}^n \backslash D$$

является непрерывным продолжением отображения $c=c(w)$. Кроме того, любую последовательность, сходящуюся к бесконечности, отображение $F(w)$ переводит в аналогичную. Следовательно, по теореме Адамара (см., например, [8, стр.138]) отображение $c(w)$ взаимно однозначно в D, если матрица Якоби отображения $F(w)$ отлична от нуля. Но, очевидно,

$$\|J_F(w)\| > 1 - \|\Lambda'(w)\| \|c'(\Lambda(w)) - E\| > 0,\ w \in \boldsymbol{R}^n \backslash D.$$

Теорема 4 доказана.

Список использованной литературы:
1. Кругман, П.Р. Международная экономика / П.Р. Кругман, М. Обстфельд. – СПб.: Питер, 2003. – 832 с.
2. Stolper, W.F. Protection and Real Wages / W.F. Stolper, P.A. Samuelson // The Review of Economic Studies. – 1941. – Vol.9, №1. – P. 58-73.
3. Никайдо, Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М.: Мир, 1972. – 518 с.
4. Стоилов, С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций / С. Стоилов. – М.: Наука, 1964. – 228 с.
5. Рогожин, В.С. Достаточные условия однолистности обратных краевых задач / В.С. Рогожин // Прикл. мат. и мех. – 1958. – 22, №6. – С. 804-807.
6. Седодин, М.А., Гаврилова М.О. О свойстве внешней неэкономичности в задаче выравнивания цен на факторы производства / М.А. Седодин, М.О. Гаврилова // Вестник Оренбургского государственного университета, 2007. – №10. – С. 69-73.
7. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин – М.: Наука, 1966. – 628 с.
8. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 560 с.