Чепасов В.И., Токарева М.А.
Оренбургский государственный университет

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА – ЧЕПМЕНА

Рассмотрена методика получения системы конечно-разностных уравнений для уравнения Колмогорова – Чепмена.

Представлена алгоритмическая реализация методики, дано описание программной реализации алгоритма, приведены результаты решения.

Уравнение Колмогорова - Чепмена имеет вид:

$$A_1\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial^2 t}+A_2\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x\partial t}+A_3\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial^2 x\partial t}-U(x,t)=0, \quad (1)$$

где в (1)

A1, A2, A3 – коэффициенты,

A1=1/q, A2=a/q, A3=b/(2q), b<0, a, b, q задаются.

Для получения системы конечно-разностных уравнений заменим в (1) производные конечно-разностными соотношениями:

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\approx\frac{U(t+\Delta t,x)-U(t,x)}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right)\approx\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{U(t+\Delta t,x)-U(t,x)}{\Delta t}\right]\approx$$

$$\approx\frac{U(t+2\Delta t,x)-U(t+\Delta t,x)-(U(t+\Delta t,x)-U(t,x))}{\Delta t\times\Delta t}=$$

$$=\frac{U(t+2\Delta t,x)-2U(t+\Delta t,x)+U(t,x)}{\Delta t\times\Delta t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right)\approx\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U(t+\Delta t,x)-U(t,x)}{\Delta t}\right]\approx$$

$$\approx\frac{1}{\Delta x\times\Delta t}(U(t+\Delta t,x+\Delta x)-U(t+\Delta t,x)-$$

$$-U(t,x+\Delta x)+U(t,x)), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right)\right)\approx\frac{1}{\Delta x\Delta x\Delta t}[U(t+\Delta t,x+2\Delta x)-$$

$$-U(t+\Delta t,x+\Delta x)-(U(t+\Delta t,x+\Delta x)-U(t+\Delta t,x))-$$

$$-(U(t,x+2\Delta x)-U(t,x+\Delta x))+(U(t,x+\Delta x)-U(t,x))]=$$

$$=\frac{1}{\Delta x\Delta x\Delta t}(U(t+\Delta t,x+2\Delta x)-2U(t+\Delta t,x+\Delta x)+ \quad (4)$$

$$+U(t+\Delta t,x)-U(t,x+2\Delta x)+2U(t,x+\Delta x)-U(t,x))$$

Координаты узлов сетки разбиения:

$$t_i=(i-1)\times\Delta t,\ x_j=(j-1)\times\Delta x,\ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n},$$

m – число точек разбиения по оси времени 0T,

n – число точек разбиения по оси 0X,

Δt – шаг разбиения по оси времени 0T,

Δx – шаг разбиения по оси 0X.

Введем обозначение: $U(t_i,x_i)=U_{i,j}$.

С учетом этого и выражений 2, 3, 4 для производных уравнение (1) приводится к следующему конечно-разностному уравнению в узле (i,j):

$$K_1\times U_{i,j}+K_2\times U_{i+2,j}+K_3\times U_{i+1,j}+K_4\times U_{i+1,j+1}+$$

$$+K_5\times U_{i,j+1}+K_6\times U_{i+1,j+2}+K_7\times U_{i,j+2}=0, \quad (5)$$

где в (5)

i - номер временного отсчета для узла сетки разбиения(отсчет с t = 0),

j - номер отсчета по оси 0X для узла сетки разбиения(отсчет с x = 0),

$$K_1=\frac{A_1}{\Delta t\times\Delta t}+\frac{A_2}{\Delta x\times\Delta t}-\frac{A_3}{\Delta x\times\Delta x\times\Delta t}-1,$$

$$K_2=\frac{A_1}{\Delta t\times\Delta t},$$

$$K_3=\frac{-2A_1}{\Delta t\times\Delta t}-\frac{A_2}{\Delta x\times\Delta t}+\frac{A_3}{\Delta x\times\Delta x\times\Delta t},$$

$$K_4=\frac{A_2}{\Delta x\times\Delta t}-\frac{2A_3}{\Delta x\times\Delta x\times\Delta t},$$

$$K_5=\frac{-A_2}{\Delta x\times\Delta t}+\frac{2A_3}{\Delta x\times\Delta x\times\Delta t},$$

$$K_6=\frac{A_3}{\Delta x\times\Delta x\times\Delta t},$$

$$K_7=-\frac{A_3}{\Delta x\times\Delta x\times\Delta t},$$

Δt – шаг разбиения по оси времени 0T,

Δx – шаг разбиения по оси 0X.

Поскольку количество точек разбиения по оси 0X n, количество точек разбиения по оси 0T m, значения u(t, x) на границах заданы, то общее число неизвестных в системе линейных алгебраических уравнений, получающейся из (5), будет (n-2)*(m-2).

Для конкретизации построения этой системы рассмотрим следующую область разбиения:

```
              | T
(t=1)      5 ._____ . _____._____._____.
             |      |      |     |     |
(t=0.75)  4 ._____*7____*8____*9____.
             |      |      |     |     |
(t=0.50)  3 ._____*4____*5____*6____.
             |      |      |     |     |
(t=0.25)  2 ._____*1____*2____*3____.
             |      |      |     |     |
(t=0)      1 ._____ . _____._____._____.__________X
             1      2      3     4     5
        (x=0)  (x=0.25) (x=0.5) (x=0.75)  (x=1)
```

Согласно представленной области разбиения количество точек разбиения по оси 0X n = 5, количество точек разбиения по оси 0T m = 5.

Значения u(t, x) на границах t = 0, x = 0, t = 1, x = 1 известны.

Тогда неизвестными значениями u(t, x) будут значения в узлах, обозначенных звездочками.

Неизвестные в этих узлах имеют номера 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Для нахождения неизвестных составим систему линейных алгебраических уравнений по (5) для подобласти:

0 < = x < = 0.5, 0 < = t < =0.5.

Координаты узлов этой подобласти и номера уравнений:

(1, 1) -номер уравнения 1,
(1, 2) -номер уравнения 2,
(1, 3) -номер уравнения 3,
(2, 1) -номер уравнения 4,
(2, 2) -номер уравнения 5,
(2, 3) -номер уравнения 6,
(3, 1) -номер уравнения 7,
(3, 2) -номер уравнения 8,
(3, 3) -номер уравнения 9.

Первая координата - номер узла по оси 0T, вторая координата - номер узла по оси 0X.

Номер строчки матрицы системы (номер уравнения в подобласти) будет определяться:

$$nyr = (i-1)*(n-2)+j, \qquad (6)$$

где в (6)

i - номер отсчета узла по оси 0T, i = 1, 2….(m-2)

j - номер отсчета узла по оси 0X, j = 1, 2…. (n-2).

Приведем уравнение для узла с координатами t = 0, x = 0.

Координаты этого узла в номерах отсчетов:

i = 1 - номер отсчета по 0T,
j = 1 - номер отсчета по 0X.

Номер уравнения в этом узле согласно (6):

$$nyr = (i-1)*(n-2)+j = 1.$$

Тогда с учетом (5) уравнение для этого узла:

$$K_1 \times U_{1,1} + K_2 \times U_{3,1} + K_3 \times U_{2,1} + K_4 \times U_{2,2} + \\ + K_5 \times U_{1,2} + K_6 \times U_{2,3} + K_7 \times U_{1,3} = 0, \qquad (7)$$

В уравнении (7) $U_{1,1}, U_{3,1}, U_{2,1}, U_{1,2}, U_{1,3}$ – заданные граничные значения u(t,x).

Соответственно $K_1 \times U_{1,1} + K_2 \times U_{3,1} + K_3 \times U_{2,1} + K_5 \times U_{1,2} + K_7 \times U_{1,3}$ мы переносим в правую часть уравнения 1 в качестве свободного члена.

Неизвестными в уравнении (7) будут $U_{2,2}$, $U_{2,3}$.

Согласно области разбиения неизвестное $U_{2,2}$ будет иметь номер 1, неизвестное $U_{2,3}$ - номер 2.

То есть, если неизвестное имеет координаты узла (i, j), то его порядковый номер будет определяться соотношением:

$$nn = (i-2)*(n-2)+j-1. \qquad (8)$$

С учетом (6) номер строчки (уравнения) в матрице системы линейных алгебраических уравнений для узла (i = 1, j = 1) будет:

$$nyr = (i-1)*(n-2)+j = 0*3+1 = 1$$

Номера неизвестных в этом уравнении согласно (8):

- узел (2,2), nn = (i-2)*(n-2)+j-1 = 1,
- узел (2,3), nn = (i-2)*(n-2)+j-1 = 2.

Тогда элементы матрицы системы конечно-разностных уравнений (системы линейных алгебраических уравнений) для первого уравнения будут:

$$C_{1,1} = K_4,$$
$$C_{1,2} = K_6.$$

Здесь первый индекс - номер строчки (уравнения), второй индекс - номер столбца (неизвестной).

Аналогично составляются уравнения для остальных восьми узлов подобласти: (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3).

При алгоритмической и программной реализации рассмотренной методики построения системы конечно-разностных уравнений вводились массивы номеров строчек, столбцов, значений граничных узлов.

Если номер строчки (по 0T) и столбца (по 0X) рассматриваемого узла при построении системы совпадали с номером строчки и столбца граничного узла, то соответствующий этому узлу член в уравнении переносился в правую часть уравнения (в свободный член).

Согласно выражениям (6) и (8) для определения номеров уравнений и номеров неизвестных в системе конечно-разностных уравнений минимальная область разбиения будет содержать три точки разбиения по оси 0T и три точки разбиения по оси 0X. То есть m = 3, n = 3.

В этом случае система конечно-разностных уравнений будет содержать всего одно уравнение.

Полученная система линейных алгебраических уравнений решалась методом Гаусса.

Поиск ненулевого диагонального элемента в прямом ходе метода Гаусса осуществлялся как по строчкам, так и по столбцам.

Предусмотрено решение системы, состоящей из одного уравнения.

Осуществляется проверка решения системы.

Составление матрицы системы конечно-разностных уравнений и решение этой системы осуществляет программа pish.exe (исходный модуль pish.cpp).

Для функционирования программы pish.exe необходимо в текстовом редакторе создать файл wwyr следующей структуры:

– в первой строчке через пробел идут значения количества точек по горизонтали (ось OX) и количества точек по вертикали (ось T). При этом значение произведения количества точек по горизонтали на количество точек по вертикали не должно превышать 900. Это связано с максимальным порядком системы конечно-разностных уравнений – 900.

Минимальное количество точек разбиения по оси 0T и по оси 0X будет 3;

– во второй строчке идут через пробел значения коэффициентов уравнения a, b, q. При этом коэффициент b берем со знаком минус. Значения коэффициентов должны обязательно иметь не более четырех знаков (включая сюда знак числа!) до десятичной точки.

То есть шаблон вводимых значений коэффициентов ——.—...

Если шаблон не будет выдержан, то программа pish.exe работать будет, а программа virttext.exe – нет;

– в третьей строчке идут через пробел значения правых границ по координате X>0 (отсчет от нуля! Не более пяти знаков до десятичной точки, включая в эти пять знак числа) и по координате T>0 (отсчет от нуля! Не более пяти знаков до десятичной точки, включая в эти пять знак числа), значение на левой границе по X (левая граница по X = 0), значение на правой границе по X.

Сначала идет правая граница по X, потом через пробел – правая граница по T, далее через пробел значение на левой границе по X (левая граница по X = 0), потом через пробел значение на правой границе по X.

Если шаблон не будет выдержан, то программа pish.exe работать будет, а программа virttext.exe – нет;

– в четвертой строчке идут через пробел значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

Далее в той же структуре (начиная с первой строчки!) в следующих строчках идут данные для других вариантов счета.

После данных по всем вариантам идет обязательная строчка с нулем.

После запуска программы pish.exe появится окно с меню, в котором будет всего один пункт run.

Прожимаем run. В появившихся окнах сообщений нажимаем OK.

Закрываем окно программы pish.exe.

Программа pish.exe создаст два файла yrawn, grafpish.

В файле yrawn находятся результаты счета. Этот файл смотрим любым текстовым редактором.

В файле grafpish находятся данные для построения графиков.

Для вывода графиков на экран и для вывода графиков в EXCEL необходимо после программы pish.exe запустить программу virttext.exe.

После запуска программы virttext.exe появится окно с меню, в котором будут пункты TEXT и START.

Нажимаем пункт TEXT. На экране появится график.

Нажимаем пункт START. График исчезнет.

Опять нажимаем пункт TEXT, потом START.

И так до тех пор, пока на экране не появится сообщение о конце просмотра всех графиков.

После этого закрываем окно программы virttext.exe.

В результате работы программы virttext.exe будет создан файл prograf.xls.

Этот файл открываем в EXCEL и строим графики.

Открыть файл prograf.xls можно следующим образом:

1. Загрузить EXCEL
2. Открыть файл prograf.xls в среде EXCEL

При таком открытии файла prograf.xls в EXCEL появится окно:

Мастер текстов шаг 1 из 3

Укажите формат данных

Указываем с разделителем

Нажимаем «Далее»

Появится окно

Мастер текстов шаг 2 из 3

Символом разделителем является

Указываем точку с запятой, знак табуляции не указываем

Нажимаем «Готово»

После такого преобразования записываем преобразованный файл и в мастере диаграмм выводим точечные диаграммы (выбираем графики).

При записи преобразованного файла появится окно, в котором надо выбрать «НЕТ» и далее записать (на все вопросы «Да»).

Если мы подвели курсорную строчку к файлу prograf.xls и нажали «Enter», то далее в среде EXCEL надо опять открыть файл prograf.xls с тем, чтобы появилось окно «Мастер текстов шаг 1 из 3». Далее работаем так, как было описано выше.

После записи преобразованного файла в мастере диаграмм выводим графики для соответствующих сечений по T и по X.

Для этого выбираем для вывода графика два соответствующих столбика с числовыми значениями (выделяем эти столбики).

У нас первый столбик – это значения X, а второй столбик – значения Y.

После выделения двух столбиков запускаем мастер диаграмм, выбираем в этом мастере точечные диаграммы и выводим их на экран.

Например, необходимо вывести график по следующим данным в EXCEL:

```
10
time sec-s=  2 t=    0.04 a=   1.0 b= -11.5 q=   0.2
        0,0000         1,0000
        0,0417         1,1939
        0,0833         1,3828
        0,1250         1,5653
        0,1667         1,7399
        0,2083         1,9052
        0,2500         2,0599
        0,2917         2,2027
        0,3333         2,3323
        0,3750         2,4475
```

Это данные для временного сечения под номером 2, значение t = 0.04.

То есть левый числовой столбец будет содержать значения отсчетов по оси 0X, а правый числовой столбец будет содержать значения u(x,t=0.04) по этим отсчетам.

Соответственно при построении графика по оси 0X будут значения X, а по оси 0Y - значения u(x,t=0.04).

Для построения графика выделяем в EXCEL эти два столбца и в мастере диаграмм, как было указано выше, строим график.

Рассмотрим сечение в EXCEL:

```
10
X sections=  2 x=    0.04 a=   1.0 b= -11.5 q=   0.2
        0,0000         0,2415
        0,0417         1,1939
        0,0833         1,1936
        0,1250         1,1941
        0,1667         1,1936
        0,2083         1,1944
        0,2500         1,1934
        0,2917         1,1950
        0,3333         1,1928
        0,3750         1,1961
```

Здесь рассматривается второе сечение по 0X со значением x = 0.04.

Левый числовой столбец содержит значения отсчетов по оси 0T, а правый числовой столбец содержит значения u(x=0.04,t) по этим временным отсчетам.

Тогда при построении графика по оси 0X будут идти временные отсчеты, а по оси 0Y – значения u(x=0.04,t) по этим временным отсчетам.

Построение идет аналогично в мастере диаграмм в EXCEL.

Так строим все графики.

В результате счета выдавались графики по границам, графики по временным сечениям, по сечениям по X, значения неизвестных с указанием координат узлов.

Рассмотрим результаты решения уравнения Колмогорова - Чепмена.

Исходные данные:

a = 1, 0,b = -11, 5, q = 0, 2,

количество точек по X (горизонталь) = 5, шаг dx = 0, 25,

количество точек по по T (вертикаль) = 5, шаг dt = 0, 25,

граница x = 0 - значение на границе = 1, 0, граница x = 1 - значение на границе = 2, 0,

матожидание = 1, 0, среднее квадратическое отклонение = 1, 0.

Значения неизвестных в узлах:

номер по t = 2, номер по x = 2, значение u = 1, 337,

номер по t = 2, номер по x = 3, значение u = 1, 622,

номер по t = 2, номер по x = 4, значение u = 1, 845,

номер по t = 3, номер по x = 2, значение u = 1, 336,

номер по t = 3, номер по x = 3, значение u = 1, 620,

номер по t = 3, номер по x = 4, значение u = 1, 842,

номер по t = 4, номер по x = 2, значение u = 1, 379,

номер по t = 4, номер по x = 3, значение u = 1, 706,

номер по t = 4, номер по x = 4, значение u = 1, 921.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение используются в программе для определения значений u(t,x) на границах:

t = 0, t = 1.

Список использованной литературы:

1. Бендат Д. Ж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974.
2. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. – Издательство «Наука», Москва, 1973.

Статья рекомендована к публикации 11.04.08