

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ РАЗРЕЗАМИ С ЗИЯЮЩИМИ ТРЕЩИНАМИ

Статья посвящена разработке приложения метода разрывных смещений для определения коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго родов для полубесконечного разреза упругой плоскости, к берегам которого приложены переменные нормальные и сдвиговые смещения, с зияющей трещиной.

Класс статических задач по определению коэффициентов интенсивности напряжений первого рода для полубесконечного разреза, к берегам которого приложены постоянные нормальные смещения, с зияющей трещиной рассмотрен в работах Г.П. Черепанова [1]. Данные задачи установили влияние внешних напряжений сжатия и растяжения плоскости на процесс разрушения материала при резании гладким абсолютно жестким полубесконечным тонким клином.

Задачи, связанные с установлением коэффициентов интенсивности напряжений при направленном разрушении и сдвиге пластов в условиях сдвига и растяжения, требуют знания коэффициентов интенсивности напряжений первого и второго родов от совместного действия нормального и сдвигового смещения берегов полубесконечного разреза упругой плоскости с зияющей трещиной.

Для решения такого типа задач был проведен анализ определения коэффициентов интенсивности напряжений относительно нормальных и сдвиговых смещений берегов трещины [2]:

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{G}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{D_n}{\sqrt{1-x}}, \quad (1)$$

$$K_{II} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{G}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{D_s}{\sqrt{1-x}}, \quad (2)$$

где  $K_I$ ,  $K_{II}$  – коэффициенты интенсивности напряжений первого и второго рода соответственно,  $H/M^{3/2}$ ;

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} - \text{модуль сдвига, } H/M^2;$$

$E$  – модуль Юнга,  $H/M^2$ ;

$l$  – длина трещины, м;

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$D_n = u_n(x, 0_-) - u_n(x, 0_+)$  – нормальные раскрытия берегов трещины, м;

$D_s = u_s(x, 0_-) - u_s(x, 0_+)$  – касательные раскрытия берегов трещины, м;

$u_n(x, 0_-), u_n(x, 0_+)$  – нормальные смещения нижнего и верхнего берегов трещины, м;

$u_s(x, 0_-), u_s(x, 0_+)$  – касательные смещения нижнего и верхнего берегов трещины, м.

На рис. 1 приведен разрез ОА бесконечной упругой плоскости, с зияющей трещиной.

Суммарное раскрытие зияющей трещины в аналитическом решении задачи имело следующий вид [1]:

$$D_n = -\frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}} \right). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем коэффициент интенсивности напряжений первого рода для полубесконечного разреза упругой плоскости с зияющей трещиной

$$K_I = \frac{G \cdot h \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{l \cdot \pi \cdot (1-\nu)}}, \quad (4)$$

установленный в работе [1] на основе асимптотического критерия

$$K_I = \lim_{x \rightarrow 1} \sigma_y \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot (x-1)}.$$

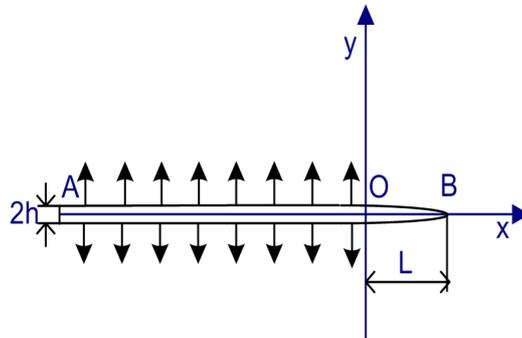


Рисунок 1. Математический разрез упругой плоскости с зияющей трещиной отрыва

Рассмотрим решение данной задачи методом разрывных смещений [3] с краевыми условиями

$$u_n=h, \sigma_s=0 \text{ при } y=0, A \leq x \leq O;$$

$$\sigma_s=0, \sigma_n=0 \text{ при } y=0, O \leq x \leq B,$$

где  $u_n$  – нормальные смещения берегов разреза;

$\sigma_n, \sigma_s$  – нормальные и касательные напряжения соответственно;

$h$  – заданная величина.

В результате анализа результатов расчета было установлено, что величиной разреза ОА, не теряя точности, можно ограничиться и принять ее равной 0,1 м.

Таблица 1. Результаты моделирования нормального раскрытия зияющей трещины

К	х, см	D <sub>n</sub> , см	
		аналитическое решение	численное решение
1	0,05	-0,0002055	-0,0001956
2	0,15	-0,0001792	-0,0001725
3	0,25	-0,0001599	-0,0001544
4	0,35	-0,0001432	-0,0001384
5	0,45	-0,0001276	-0,0001235
6	0,55	-0,0001123	-0,0001089
7	0,65	-0,0000966	-0,0000942
8	0,75	-0,0000799	-0,0000788
9	0,85	-0,0000607	-0,0000617
10	0,95	-0,0000344	-0,0000403

Таблица 2. Результаты моделирования нормального раскрытия зияющей трещины

К	х, см	D <sub>n</sub> , см	
		аналитическое решение	численное решение
1	0,01	-0,0002246	-0,0002199
2	0,03	-0,0002134	-0,0002098
3	0,05	-0,0002055	-0,0002022
4	0,07	-0,0001991	-0,0001958
5	0,09	-0,0001934	-0,0001901
...	.....	.....	.....
16	0,31	-0,0001497	-0,0001460
17	0,33	-0,0001465	-0,0001427
18	0,35	-0,0001432	-0,0001395
19	0,37	-0,0001400	-0,0001363
20	0,39	-0,0001369	-0,0001332
...	.....	.....	.....
31	0,61	-0,0001029	-0,0000968
32	0,63	-0,0000998	-0,0000966
33	0,65	-0,0000966	-0,0000935
34	0,67	-0,0000934	-0,0000904
35	0,69	-0,0000901	-0,0000872
...	.....	.....	.....
46	0,91	-0,0000464	-0,0000455
47	0,93	-0,0000408	-0,0000403
48	0,95	-0,0000344	-0,0000344
49	0,97	-0,0000265	-0,0000274
50	0,99	-0,0000152	-0,0000182

В таблице 1 приведены результаты расчетов раскрытия берегов трещины нормального разрыва, вычисленные аналитически и численно, при следующих входных значениях:  $L=0,01$  м;  $h=0,0000012$  м;  $K$  – количество граничных элементов, на которые разбивалась зияющая трещина;  $\nu=0,3$ ;  $E=3 \cdot 10^4$  МПа.

Знак «-» перед  $D_n$  соответствует раскрытию трещины.

Анализ результатов, приведенных в таблице 1, показал, что значения нормального раскрытия зияющей трещины в аналитических и численных решениях практически совпадают и отличаются друг от друга на 3,5%.

Сопоставление раскрытия зияющей трещины в аналитическом и численном решениях приведено на рис. 2.

В таблице 2 и рис. 3 приведены результаты численных расчетов, когда зияющая трещина делилась на 50 граничных элементов.

Анализ данных зависимостей показал, что результаты численного решения при увеличении количества граничных элементов зияющей трещины отличаются от аналитического на 2,2%.

Таким образом, результаты численных расчетов приближаются к точному с увеличением количества граничных элементов  $K$ .

Схема поперечного сдвига разреза упругой плоскости касательными смещениями с зияющей трещиной приведена на рисунке 4.

Краевые условия для рис. 4 имели следующий вид:

$$u_s=h, \sigma_s=0 \text{ при } y=0, A \leq x \leq O;$$

$$\sigma_s=0, \sigma_n=0 \text{ при } y=0, O \leq x \leq B,$$

где  $u_s$  – касательные смещения берегов разреза;

$h$  – заданная величина.

Входные данные имели те же численные значения, что и для схемы, приведенной на рис. 1. В таблице 3 приведены результаты сопоставления двух задач, когда на берегах разреза заданы отдельно нормальные и касательные смещения.

На основании анализа следует, что нормальные и касательные раскрытия зияющей трещины совпадают. Таким образом, функция суммарного сдвигового раскрытия берегов трещины 1 будет иметь ту же функциональную зависимость (3):

$$D_s = -\frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}} \right). \quad (5)$$

При подстановке (5) в (2) получаем коэффициент интенсивности напряжения второго рода

$$K_{II} = \frac{G \cdot h \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1 \cdot \pi \cdot (1-\nu)}}. \quad (6)$$

Проведенный анализ показал, что данный подход позволяет моделировать задачи под действием и нормальных, и касательных смещений берегов полубесконечного разреза с зияющей трещиной.

Рассмотрим задачу, по условиям которой математический разрез плоскости АО находился под действием и нормальных, и касательных перемещений (рис. 5).

Краевые условия имели следующий вид:

$$u_s = b, u_n = a \text{ при } y = 0, A \leq x \leq O;$$

$$\sigma_s = 0, \sigma_n = 0 \text{ при } y = 0, 0 \leq x \leq B,$$

где a и b – заданные величины.

Граничные интегральные уравнения [3] для данной задачи приводились к следующей системе линейных уравнений:

$$b = (u_s^i)_0 = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{1, M};$$

$$0 = (\sigma_s^i)_0 = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{M+1, N};$$

$$a = (u_n^i)_0 = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{1, M};$$

$$0 = (\sigma_n^i)_0 = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{1, N},$$

где N – количество всех граничных элементов;

M – количество граничных элементов, на которые разбивается участок АО;

$D_{nj}, D_{sj}$  – компоненты разрывов смещений j-го отрезка трещины в нормальном и касательном направлениях соответственно;

$u_s^i$  – касательные перемещения;

$u_n^i$  – нормальные растяжения;

$\sigma_s^i, \sigma_n^i$  – касательные и нормальные напряжения на границе тела соответственно;

$B_{ssij}, B_{snij}, B_{nsij}, B_{nnij}, A_{ssij}, A_{snij}, A_{nsij}, A_{nnij}$  – фундаментальные решения.

В результате расчетов были установлены следующие коэффициенты интенсивности напряжений первого и второго рода:

$$K_I = \frac{G \cdot a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1 \cdot \pi \cdot (1-\nu)}} \cdot f(a, b); \quad (7)$$

Таблица 3. Результаты моделирования нормального и касательного раскрытия зияющей трещины

K	x, см	$u_n$ , см	$u_s$ , см
1	0,05	-0,0001956	-0,0001956
2	0,15	-0,0001725	-0,0001725
3	0,25	-0,0001544	-0,0001544
4	0,35	-0,0001384	-0,0001384
5	0,45	-0,0001235	-0,0001235
6	0,55	-0,0001089	-0,0001089
7	0,65	-0,0000942	-0,0000942
8	0,75	-0,0000788	-0,0000788
9	0,85	-0,0000617	-0,0000617
10	0,95	-0,0000403	-0,0000403

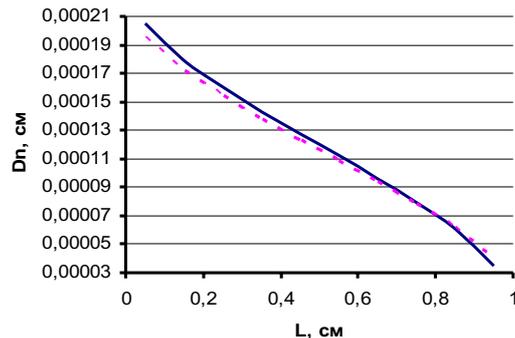


Рисунок 2. Нормальное раскрытие зияющей трещины вычисленное: – аналитически и – численно

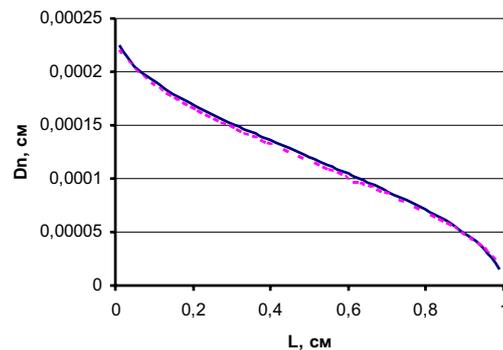


Рисунок 3. Нормальное раскрытие зияющей трещины, вычисленное: - аналитически и - численно

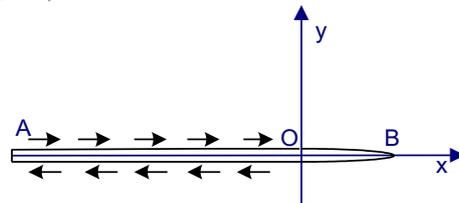


Рисунок 4. Математический разрез упругой плоскости с зияющей трещиной сдвига

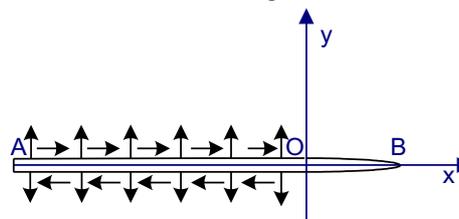


Рисунок 5. Математический разрез упругой плоскости с зияющей трещиной отрыва и сдвига

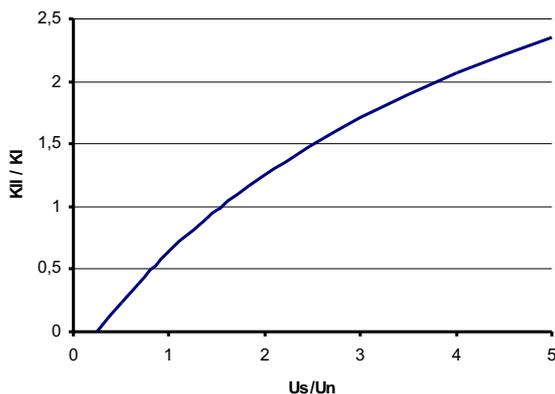


Рисунок 6. Влияние отношения  $\frac{u_s}{u_n}$  на  $\frac{K_{II}}{K_I}$ .

$$K_{II} = \frac{G \cdot b \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{l \cdot \pi \cdot (1-\nu)}} \cdot \psi(a, b). \quad (8)$$

Функции, характеризующие влияние величин  $a$  и  $b$  на коэффициенты интенсивности напряжений первого и второго рода, имели вид:

$$f(a, b) = 1 + 0,2135 \cdot \frac{b}{a},$$

где  $\frac{u_n}{2} \leq a \leq u_n, 0 \leq b \leq u_s$ ;

$$\psi(a, b) = 1,0212 - 0,25 \cdot \frac{a}{b},$$

где  $0 \leq a \leq u_n, \frac{u_s}{2} \leq b \leq u_s$ .

Таким образом, разработанные критерии разрушения разреза плоскости с зияющей трещиной позволяют прогнозировать рост зияющей трещины на плоскости с переменными нормальными и сдвиговыми смещениями точек берегов трещины.

На основе соотношения двух критериев (8) и (7) можно установить графическую зависимость влияния отношения  $\frac{u_s}{u_n}$  на  $\frac{K_{II}}{K_I}$ .

Результаты расчетов приведены на рисунке 6.

Анализ приведенной графической интерпретации показал, что отрыв превалирует, когда  $K_I > K_{II}$  при  $0,25 \leq \frac{u_s}{u_n} < 1,55$ , а сдвиг, — когда  $K_I < K_{II}$  при  $\frac{u_s}{u_n} > 1,55$ .

Таким образом, определение коэффициентов интенсивности напряжений на основе смещений берегов трещины позволяет расширить класс задач о разрушении материалов с зияющими трещинами, когда к берегам разреза (трещины) упругой плоскости приложены одновременно нормальные и касательные смещения.

**Список использованной литературы:**

1. Черепанов Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. – М.: Недра, 1987. – 308 с.
2. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
3. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.

**Статья рекомендована к публикации 11.03.08**