

## ОШИБКИ АППРОКСИМАЦИИ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕННОЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТЯХ

Рассматриваются результаты аппроксимации сигналов во временной и спектральной областях. Приводятся полиномиальные модели параметрического прогноза, полученные методом наименьших квадратов и методом Д. Брандона во временной и спектральной областях.

Построим матрицу исследования с параметрами-столбиками:

1. Время –  $x$
2. Сигнал –  $2\cos(x-1,57)+1$
3. Сигнал –  $3\cos(x)+2$

Строчками-наблюдениями в этой матрице будут значения времени и соответствующие значения сигналов.

Рассматривался временной отрезок  $[0, 6, 28]$  с шагом разбиения  $dx = 0,06343$ .

Количество отсчетов, строчек-наблюдений, при выбранном шаге – 100.

Амплитудный и фазовый спектры [1] рассматриваемых сигналов:

$$\text{сигнал } y = 2\cos(x-1,57)+1$$

Максимальная по амплитуде гармоника – 1

Модель по максимальной гармонике

$$y = 1,000125+(1,999940)*\cos((2*\pi*t/tp)*1+(-1,569994)), \quad (1)$$

где  $\pi = 3,14\dots tp$  – период процесса – 6,283, период гармоника – 6,283, фаза = -1,570.

Модель с 100 гармониками (фрагмент):

$$\begin{aligned} y = & 1,000125+(1,999940)*\cos((2*\pi*t/tp)*1+(-1,569994)) \quad (2) \\ & +(0,000113)*\cos((2*\pi*t/tp)*2+(-4,7124)) \\ & +(0,000171)*\cos((2*\pi*t/tp)*3+(-1,5708)) \\ & +(0,000039)*\cos((2*\pi*t/tp)*4+(-1,5708)) \\ & +(0,000083)*\cos((2*\pi*t/tp)*5+(-4,7124)) \\ & +(0,000122)*\cos((2*\pi*t/tp)*6+(-0,2167)) \\ & +(0,000085)*\cos((2*\pi*t/tp)*7+(-4,7124)) \\ & +(0,000111)*\cos((2*\pi*t/tp)*8+(-6,2263)) \\ & +(0,000131)*\cos((2*\pi*t/tp)*9+(-0,2280)) \\ & +(0,000080)*\cos((2*\pi*t/tp)*10+(-1,5708)) \\ & +(0,000092)*\cos((2*\pi*t/tp)*11+(-4,7124)) \end{aligned}$$

Средняя абсолютная ошибка аппроксимации сигнала  $y = (2\cos(x-1,57)+1)$  моделью со ста гармониками составила 0,00036434.

Средняя относительная ошибка аппроксимации сигнала  $y = (2\cos(x-1,57)+1)$  моделью со ста гармониками составила 0,025448%.

$$\text{Сигнал } y = 3\cos(x)+2.$$

Максимальная по амплитуде гармоника – 1

Модель по максимальной гармонике

$$y = 1,999959+(3,000240)*\cos((2*\pi*t/tp)*1+(-0,000101)), \quad (3)$$

где  $\pi = 3,14$ ,  $tp$  – период процесса = 6,283, период гармоника = 6,283, фаза = 0,0001

Модель со 100 гармониками(фрагмент):

$$\begin{aligned} y = & 1,999959+(3,000240)*\cos((2*\pi*t/tp)*1+(-0,000101)) \quad (4) \\ & +(0,000546)*\cos((2*\pi*t/tp)*2+(-0,5691)) \\ & +(0,000576)*\cos((2*\pi*t/tp)*3+(-0,2995)) \\ & +(0,000455)*\cos((2*\pi*t/tp)*4+(-0,2535)) \\ & +(0,000479)*\cos((2*\pi*t/tp)*5+(-0,1341)) \\ & +(0,000507)*\cos((2*\pi*t/tp)*6+(-0,0615)) \\ & +(0,000506)*\cos((2*\pi*t/tp)*7+(-0,0723)) \\ & +(0,000528)*\cos((2*\pi*t/tp)*8+(-0,0741)) \\ & +(0,000524)*\cos((2*\pi*t/tp)*9+(-0,0959)) \\ & +(0,000503)*\cos((2*\pi*t/tp)*10+(-0,1085)) \\ & +(0,000500)*\cos((2*\pi*t/tp)*11+(-0,0701)) \end{aligned}$$

Средняя абсолютная ошибка аппроксимации сигнала  $y = 3\cos(x)+2$  моделью со ста гармониками составила 0,0012966.

Средняя относительная ошибка аппроксимации сигнала  $y = 3\cos(x)+2$  моделью со ста гармониками составила 0,054496%.

Для определения сигнала  $y = 3\cos(x)+2$  по сигналу  $y = 2\cos(x-1,57)+1$  были построены полиномиальные модели методом наименьших квадратов [2] и упрощенным методом Д. Брандона [3].

Параметром-аргументом в этих моделях был сигнал  $y = 2\cos(x-1,57)+1$ , а зависимым параметром - сигнал  $y = 3\cos(x)+2$ .

Полиномиальная модель, полученная методом наименьших квадратов:

**модель для зависимого параметра – сигнал**  
 $y = 3\cos(x)+2$

$$y = (-0,02941293)*(x2)**2+(0,06004385)*$$

$$*(x2)**1+(2,05760789), (5)$$

средняя абсолютная ошибка = 1,92,

где  $y$  – сигнал  $y = 3\cos(x)+2$ , зависимый параметр

$x2$  – сигнал  $y = 2\cos(x-1,57)+1$ , параметр-аргумент

\* – умножение, \*\* – возведение в степень

Полиномиальная модель, полученная методом Брандона:

**модель для зависимого параметра – сигнал**  
 $y = 3\cos(x)+2$

$$y = (2,0575)+(0,0600)*(x2)**1+$$

$$+(-0,0292)*(x2)**2+(-0,0001)*(x2)**3, (6)$$

где  $y$  – сигнал  $y = 3\cos(x)+2$ , зависимый параметр

$x2$  – сигнал  $y = 2\cos(x-1,57)+1$ , параметр-аргумент

\* – умножение, \*\* – возведение в степень

Таблица 1. Характеристики модели (6)

ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛИ	ЗНАЧЕНИЯ
Коэффициент детерминации	10,02
Средняя абсолютная ошибка	1,92
Средняя ошибка в процентах	80,69

Приведенные выше модели были построены во временной области изменения рассматриваемых сигналов.

Для осуществления аппроксимации сигналов через спектральную область после проведенного спектрального анализа была

построена матрица исследования со следующими параметрами-столбиками:

- амплитудный спектр-сигнал  $y = 2\cos(x-1,57)+1$ ,
- фазовый спектр-сигнал  $y = 2\cos(2x-1,57)+1$ ,
- амплитудный спектр-сигнал  $y = 3\cos(x)+2$ ,
- фазовый спектр-сигнал  $y = 3\cos(x)+2$ .

Строчки-наблюдения в этой матрице исследования – это значения амплитудного и фазового спектров для соответствующих гармоник.

По построенной матрице для спектральной области были определены полиномиальные модели параметрического прогноза амплитудного и фазового спектров сигнала  $y = 3\cos(x)+2$  по амплитудному и фазовому спектру сигнала  $y = 2\cos(x-1,57)+1$ .

Модели, полученные методом наименьших квадратов:

**модель для зависимого параметра – амплитудный спектр сигнала  $y = 3\cos(x)+2$**

$$y = (135,81185647)*(x1)**4+$$

$$+(262,25730354)*(x1)**3+$$

$$+(-1067,53147855)*(x1)**2+$$

$$+(1,13552441)*(x1)**1+$$

$$+(0,00000064976)*(x2)**4+$$

$$+(0,00000806426)*(x2)**3+$$

$$+(0,000028874573)*(x2)**2+$$

$$(0,00002380077)*(x2)**1+$$

$$+(0,00039783417) (7)$$

средняя абсолютная ошибка = 0,000003257,

где  $y$  – амплитудный спектр сигнала

$y = 3\cos(x)+2$ , зависимый параметр,

$x1$  – амплитудный спектр сигнала  $y = 2\cos(x-1,57)+2$ , параметр-аргумент,

$x2$  – фазовый спектр сигнала  $y = 2\cos(x-1,57)+2$ , параметр-аргумент,

\* – умножение, \*\* – возведение в степень.

Таблица 2. Вклады параметров-аргументов в модели (7)

Номер	Название параметра	Вклад
1	амплитудный спектр- (2cos(x-1.57)+1)	0,99999
2	фазовый спектр- (2cos(x-1.57)+1)	0,00001

**Модель для зависимого параметра – фазовый спектр сигнала  $y = 3\cos(x)+2$**

$$y = +(111994,891531)*(x1)**4 + (-447603,928752)*(x1)**3 + (449023,169176)*(x1)**2 + (-3589,336230)*(x1)**1 + (-0,42309065)*(x2)**4 + (-5,35348936)*(x2)**3 + (-20,35750129)*(x2)**2 + (-21,42519107)*(x2)**1 + (-2,14013377) \quad (8)$$

средняя абсолютная ошибка = 2,3025,  
 где  $y$  – фазовый спектр сигнала  $y = 3\cos(x)+2$ ,  
 зависимый параметр,  
 $x1$  – амплитудный спектр сигнала  $y = 2\cos(x-1,57)+2$ , параметр-аргумент,  
 $x2$  – фазовый спектр сигнала  $y = 2\cos(x-1,57)+2$ , параметр-аргумент,  
 \* – умножение, \*\* – возведение в степень.

Таблица 3. Вклады параметров-аргументов в модели (8)

Номер	Название параметра	Вклад
1	амплитудный спектр- (2cos(x-1.5:7)+1)	0,99206
2	фазовый спектр- (2cos(x-1.57)+1)	0,00794

Модели, полученные упрощенным методом Брандона:

**модель для зависимого параметра-амплитудный спектр сигнала  $y=3\cos(x)+2$**

$$y = +(0,1342) + (-1322,8470)*(x1)**1 + (-289,7767)*(x1)**2 + (475,9828)*(x1)**3, \quad (9)$$

где  $y$  – амплитудный спектр сигнала  $y=3\cos(x)+2$ , зависимый параметр,  
 $x1$  – амплитудный спектр сигнала  $y=2\cos(x-1,57)+2$ , параметр-аргумент,  
 \* - умножение, \*\* - возведение в степень.

Таблица 4. Вклады параметров-аргументов в модели (9)

НОМЕР	НАЗВАНИЕ ПАРАМЕТРА	ВКЛАД В МОДЕЛЬ
1	амплитудный спектр- (2cos(x-1,57)+1)	1,0000
2	фазовый спектр- (2cos(x-1,57)+1)	0,0000

Таблица 5. Характеристики модели (9)

ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛИ	ЗНАЧЕНИЯ
Коэффициент детерминации	1,00
Средняя абсолютная ошибка	0,01
Средняя ошибка в процентах	10,14

**Модель для зависимого параметра-фазовый спектр сигнала  $y=3\cos(x)+2$**

$$y = +(-0,9296) + (8973,2130)*(x1)**1 + (-10309,2100)*(x1)**2 + (2911,5330)*(x1)**3 + (-1,5900) + (-1,0617)*(x2)**1 + (-0,3768)*(x2)**2 + (-0,0285)*(x2)**3, \quad (10)$$

где  $y$  - фазовый спектр сигнала  $y=3\cos(x)+2$ ,  
 зависимый параметр,  
 $x1$  – амплитудный спектр сигнала  $y = 2\cos(x-1,57)+2$ , параметр-аргумент,  
 $x2$  – фазовый спектр сигнала  $y = 2\cos(x-1,57)+2$ , параметр-аргумент,  
 \* - умножение, \*\* - возведение в степень.

Таблица 6. Вклады параметров-аргументов в модели (10)

НОМЕР	НАЗВАНИЕ ПАРАМЕТРА	ВКЛАД В МОДЕЛЬ
1	амплитудный спектр- (2cos(x-1,57)+1)	0,0417
2	фазовый спектр- (2cos(x-1,57)+1)	0,9583

Таблица 7. Характеристики модели (10)

ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛИ	ЗНАЧЕНИЯ
Коэффициент детерминации	0,28
Средняя абсолютная ошибка	2,33
Средняя ошибка в процентах	130,25

По амплитудному и фазовому спектрам сигнала  $y = 2\cos(x-1,57)+1$  и построенным моделям амплитудного и фазового спектров сиг-

Таблица 8. Ошибки аппроксимации

Восстановление сигнала $y=3\cos(x)+2$ по сигналу $y=2\cos(x-1,57)+1$		Восстановление сигнала $y=\cos(x)$ по сигналу $y=\cos(x-1,57)$		Восстановление сигнала $y=\cos(3x)$ по сигналу $y=\cos(2x-1,57)$	
Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация во временной области)	Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация в спектральной области)	Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация во временной области)	Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация в спектральной области)	Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация во временной области)	Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация в спектральной области)
1,92	0,00161	0,64	0,00048	0,64	0,68
Восстановление сигнала $y=\cos(x)$ по сигналу $y=\exp(-x)*\cos(x)$		Восстановление сигнала $y=\sin(x)$ по сигналу $y=\sin(x)/x$		Восстановление сигнала $y=\sin(x)/x$ по сигналу $y=\sin(x)$	
Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация во временной области)	Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация в спектральной области)	Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация во временной области)	Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация в спектральной области)	Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация во временной области)	Средняя абсолютная ошибка (аппроксимация в спектральной области)
0,38	0,02679	0,0569	0,0206	0,152	0,113

нала  $y=3\cos(x)+2$  были определены амплитудный и фазовый спектры сигнала  $y=3\cos(x)+2$ , а по ним построен сам сигнал  $y=3\cos(x)+2$ .

Средняя абсолютная ошибка при такой схеме построения сигнала  $y=3\cos(x)+2$  оказалась равной 0,00161.

При непосредственном определении сигнала  $y = 3\cos(x)+2$  по сигналу  $y = 2\cos(x-1,57)+1$ , как было показано выше, средняя абсолютная ошибка аппроксимации составила 1,92.

По аналогичной схеме было рассмотрено определение сигнала  $y = \cos(x)$  по сигналу  $y = \cos(x-1,57)$ , сигнала  $y = \cos(3x)$  по сигналу  $y = \cos(2x-1,57)$  и т. д.

Результаты определения сигналов во временной области и результаты определения сигналов при аппроксимации в спектральной области приведены в таблице 8.

Согласно средним абсолютным ошибкам аппроксимации (таблица 8 – ошибки аппроксимации) определение сигналов будет идти более точно в случае аппроксимации амплитудного и фазового спектров в спектральной области.

Приведенные результаты получены при числе гармоник 100, при числе отрезков интегрирования 10000 при нахождении амплитудного и фазового спектров.

#### Список использованной литературы:

1. Бендат Д. Ж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974.
2. Драйпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Статистика, 1973.
3. Brandon D. B. Developing Mathematical Models for Computer Control, USA Journal, 1959, V.S, №7.