

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИТЕРИЕВ РОСТА ТРЕЩИН В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Статья посвящена разработке численных методов решения смешанных задач теории упругости по определению коэффициентов интенсивности напряжений для трещин, на берегах которых заданы одновременно смещения и напряжения.

**Содержание задачи.** Для решения задач, связанных с разрушением и сдвижением пластов, необходимо знание коэффициентов интенсивности напряжения первого и второго рода от воздействия нормальных и сдвиговых смещений на основную трещину и сжимающих и касательных напряжений на зияющую трещину соответственно.

Коэффициенты интенсивности напряжения в конце трещины являются основными критериями в линейной механике разрушения по оценке роста трещин, поэтому определять их необходимо с большой степенью точности.

Поэтому целью данной работы является разработка нового критерия интенсивности напряжения второго рода для смешанных краевых задач.

Плоскодеформированное состояние упругой среды описывается в декартовой системе координат уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0,$$

уравнением совместности деформаций

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

и законом Гука

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})),$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})),$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}.$$

Компоненты деформаций определяются выражениями

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

В уравнениях использованы следующие обозначения:  $u_x, u_y$  – компоненты вектора перемещений;  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy}$  – компоненты тензора деформаций;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга.

**Постановка первой задачи.** На рис. 1 приведен разрез ОА бесконечной упругой плоскости с зияющей трещиной, которая находится под действием сжимающих напряжений.

Краевые условия имеют вид:

$$u_n = h, \sigma_s = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad A \leq x \leq O;$$

$$\sigma_s = 0, \sigma_n = q \quad \text{при } y = 0, \quad O \leq x \leq B,$$

где  $u_n$  – нормальные смещения берегов разреза;

$\sigma_n, \sigma_s$  – нормальные и касательные напряжения соответственно;

$h, q$  – заданные величины.

Граничные интегральные уравнения [3] для данной задачи приводились к следующей системе линейных уравнений:

$$0 = (\sigma_s^i)_0 = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{1, N};$$

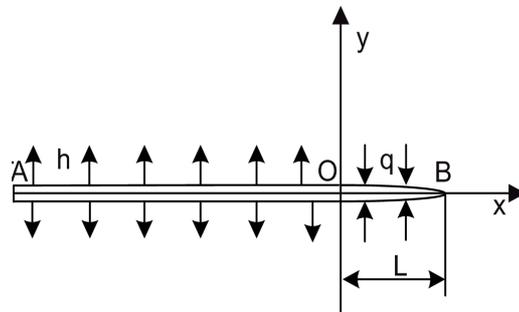


Рисунок 1. Математический разрез упругой плоскости с зияющей трещиной отрыва, которая находится под действием сжимающих напряжений

$$h = (u_n^i)_0 = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j, \quad i = \overline{1, M};$$

$$q = (\sigma_n^i)_0 = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j,$$

$$i = \overline{M+1, N},$$

где  $N$  – количество всех граничных элементов;  
 $M$  – количество граничных элементов на которые разбивается участок АО;

$D_{nj}, D_{sj}$  – компоненты разрывов смещений  $j$ -го отрезка трещины в нормальном и касательном направлениях соответственно;

$u_s^i$  – касательные перемещения;

$u_n^i$  – нормальные перемещения;

$\sigma_s^i, \sigma_n^i$  – касательные и нормальные напряжения на границе тела соответственно;

$B_{ssij}, B_{snij}, B_{nsij}, B_{nnij}, A_{ssij}, A_{snij}, A_{nsij}, A_{nnij}$  – фундаментальные решения.

Расчеты осуществлялись на основе формул (1) и (2), которые позволяют проводить анализ определения коэффициентов интенсивности напряжений, когда берега разреза находятся отдельно под действием нормальных и сдвиговых смещений [1]:

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{G}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{x \rightarrow l} \frac{D_n}{\sqrt{L-x}}, \quad (1)$$

$$K_{II} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{G}{2 \cdot (1-\nu)} \cdot \lim_{x \rightarrow l} \frac{D_s}{\sqrt{L-x}}, \quad (2)$$

где  $K_I, K_{II}$  – коэффициенты интенсивности напряжений первого и второго рода соответственно,  $H / M^{3/2}$ ;

$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$  – модуль сдвига,  $H / M^2$ ;

$E$  – модуль Юнга,  $H / M^2$ ;

$L$  – длина трещины, м;

$\nu$  – коэффициент Пуассона.

В результате анализа результатов расчета было установлено, что величиной разреза ОА, не теряя точности, можно ограничиться и принять равной 0,1 м.

Решение подобной задачи было приведено в работе [2], где раскрытие зияющей трещины в аналитическом решении задачи имело следующий вид:

$$D_n = -\frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) + \left| \frac{2 \cdot q \cdot (1-\nu)}{G} \cdot \sqrt{x \cdot (L-x)} \right|. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем коэффициент интенсивности напряжений первого рода для полубесконечного разреза упругой плоскости с зияющей трещиной

$$K_I = \frac{G \cdot h \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{L \cdot \pi} (1-\nu)} - q \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot L}{2}}, \quad (4)$$

установленный в работе [1] на основе асимптотического критерия

$$K_I = \lim_{x \rightarrow L} \sigma_y \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot (x-L)}.$$

#### Проведенное численное исследование.

В таблице 1 приведены результаты расчетов раскрытия берегов трещины нормального разрыва, вычисленные аналитически по формуле (3) и численно при следующих входных значениях:  $L = 0,01 \text{ м}$ ;  $h = 0,0000012 \text{ м}$ ;

$q = 9,8 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$ ;  $K$  – количество граничных элементов, на которые разбивалась зияющая трещина;  $\nu = 0,3$ ;  $E = 3 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

Знак «-» перед  $D_n$  соответствует раскрытию трещины.

Анализ результатов, приведенных в таблице 1, показал, что значения нормального раскрытия зияющей трещины в аналитических и численных решениях практически совпадают и отличаются в среднем друг от друга на 6,7%.

Сопоставление раскрытия зияющей трещины в аналитическом и численном решениях приведены на рис. 2.

В таблице 2 и на рис. 3 приведены результаты численных расчетов, когда зияющая трещина делилась на 50 граничных элементов.

Анализ данных зависимостей показал, что результаты численного решения при увеличении количества граничных элементов зияющей трещины отличаются от аналитического в среднем на 5,7%.

Из таблицы 2 следует, что результаты численных расчетов приближаются к точному решению с увеличением количества граничных элементов  $K$ .

Таблица 1. Результаты моделирования нормального раскрытия зияющей трещины

К	x, см	D <sub>n</sub> , см	
		аналитическое решение	численное решение
1	0,05	-0,0002045	-0,0001922
2	0,15	-0,0001775	-0,0001677
3	0,25	-0,0001580	-0,0001487
4	0,35	-0,0001411	-0,0001323
5	0,45	-0,0001253	-0,0001171
6	0,55	-0,0001101	-0,0001026
7	0,65	-0,0000945	-0,0000882
8	0,75	-0,0000780	-0,0000733
9	0,85	-0,0000591	-0,0000569
10	0,95	-0,0000335	-0,0000369

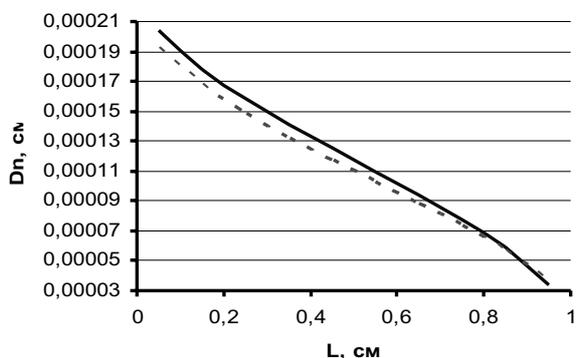


Рисунок 2. Нормальное раскрытие зияющей трещины, вычисленное: — аналитически и ---- численно

Таким образом, приведенное численное решение удовлетворяет аналитическим выкладкам.

**Постановка второй задачи.** Для решения поставленной цели был рассмотрен математический разрез упругой плоскости с зияющей трещиной сдвига, которая находится под действием сдвиговых напряжений. Схема для данной задачи приведена на рисунке 4.

Краевые условия для рис. 4 имели следующий вид:

$$u_s = h, \sigma_n = 0 \text{ при } y = 0, A \leq x \leq O;$$

$$\sigma_s = p, \sigma_n = 0 \text{ при } y = 0, O \leq x \leq B,$$

где  $u_s$  – касательные смещения берегов разреза;

$h, p$  – заданные величины.

Граничные интегральные уравнения [3] для данной задачи приводились к следующей системе линейных уравнений:

Таблица 2. Результаты моделирования нормального раскрытия зияющей трещины

К	x, см	D <sub>n</sub> , см	
		аналитическое решение	численное решение
1	0,01	-0,0002242	-0,0002183
2	0,03	-0,0002126	-0,0002078
3	0,05	-0,0002045	-0,0001998
4	0,07	-0,0001979	-0,0001932
5	0,09	-0,0001921	-0,0001874
...	.....	.....	.....
16	0,31	-0,0001476	-0,0001421
17	0,33	-0,0001443	-0,0001387
18	0,35	-0,0001411	-0,0001355
19	0,37	-0,0001378	-0,0001322
20	0,39	-0,0001347	-0,0001290
...	.....	.....	.....
31	0,61	-0,0001008	-0,0000954
32	0,63	-0,0000976	-0,0000923
33	0,65	-0,0000945	-0,0000893
34	0,67	-0,0000913	-0,0000862
35	0,69	-0,0000881	-0,0000831
...	.....	.....	.....
46	0,91	-0,0000452	-0,0000428
47	0,93	-0,0000397	-0,0000378
48	0,95	-0,0000334	-0,0000322
49	0,97	-0,0000258	-0,0000256
50	0,99	-0,0000148	-0,0000169

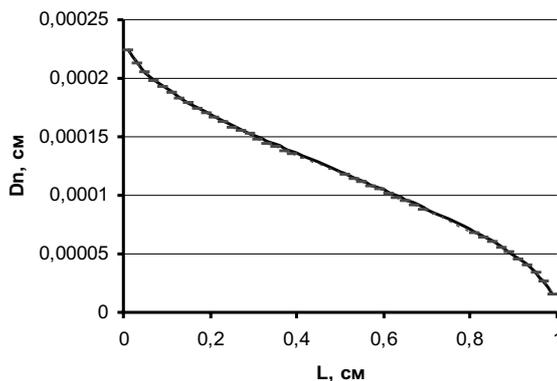


Рисунок 3. Нормальное раскрытие зияющей трещины, вычисленное: — аналитически и ---- численно

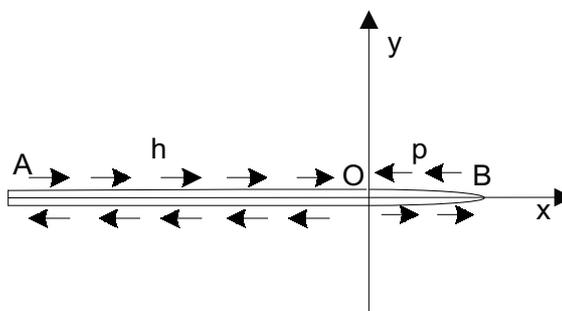


Рисунок 4. Математический разрез упругой плоскости с зияющей трещиной сдвига, которая находится под действием сдвиговых напряжений

$$h = (u_s^i)_0 = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j, i = \overline{1, M};$$

$$p = (\sigma_s^i)_0 = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j, i = \overline{M+1, N};$$

$$0 = (\sigma_n^i)_0 = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j, i = \overline{1, N}.$$

**Проведенное численное исследование.**

Поставленную задачу будем решать методом разрывных смещений. Входные данные имели те же численные значения, что и для схемы, приведенной на рис. 1. В таблице 3 приведены результаты сопоставления двух задач:

- основная трещина находится под действием нормальных смещений, а зияющая - под влиянием сжимающих напряжений;
- основная трещина находится под действием сдвиговых смещений, а зияющая - под влиянием касательных напряжений.

На основании анализа результатов, приведенных в таблице, следует, что нормальные и касательные раскрытия зияющей трещины совпадают. Таким образом, функция суммарного сдвигового раскрытия берегов трещины

Таблица 3. Результаты моделирования нормального и касательного раскрытия зияющей трещины

K	x, см	$u_n$ , см	$u_s$ , см
1	0,05	-0,0001922	-0,0001922
2	0,15	-0,0001677	-0,0001677
3	0,25	-0,0001487	-0,0001487
4	0,35	-0,0001323	-0,0001323
5	0,45	-0,0001171	-0,0001171
6	0,55	-0,0001026	-0,0001026
7	0,65	-0,0000882	-0,0000882
8	0,75	-0,0000732	-0,0000732
9	0,85	-0,0000569	-0,0000569
10	0,95	-0,0000369	-0,0000369

L будет иметь ту же функциональную зависимость (3):

$$D_s = -\frac{4 \cdot h}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \sqrt{\frac{x}{L-x}} \right) + \frac{2 \cdot p \cdot (1-\nu)}{G} \cdot \sqrt{x \cdot (L-x)}. \quad (5)$$

При подстановке (5) в (2) получаем коэффициент интенсивности напряжения второго рода

$$K_{II} = \frac{G \cdot h \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{L \cdot \pi} (1-\nu)} - p \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot L}{2}}. \quad (6)$$

Таблица 4. Коэффициент интенсивности напряжения первого рода, вычисленный аналитически и численно

$q$ \ $u_n$	$9,8 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$	$39,2 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$	$58,8 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$	$78,8 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$	$98 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$
0,00012	15,137	11,659	9,341	7,023	4,705
	<b>14,529</b>	<b>10,769</b>	<b>8,262</b>	<b>5,576</b>	<b>3,249</b>
0,00024	31,433	27,956	25,637	23,319	21,001
	<b>30,311</b>	<b>26,551</b>	<b>24,045</b>	<b>21,538</b>	<b>19,032</b>
0,0006	80,322	76,845	74,527	72,208	69,890
	<b>77,658</b>	<b>73,898</b>	<b>71,392</b>	<b>68,885</b>	<b>66,378</b>
0,0012	161,804	158,326	156,008	153,689	151,371
	<b>156,570</b>	<b>152,810</b>	<b>150,303</b>	<b>147,797</b>	<b>145,290</b>

Таблица 5. Коэффициент интенсивности напряжения второго рода, вычисленный аналитически и численно

$q$ \ $u_n$	$9,8 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$	$39,2 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$	$58,8 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$	$78,8 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$	$98 \cdot 10^4 \frac{H}{M^2}$
0,00012	15,143	11,665	9,347	7,028	4,710
	<b>14,529</b>	<b>10,769</b>	<b>8,262</b>	<b>5,576</b>	<b>3,249</b>
0,00024	31,447	27,969	25,650	23,331	21,013
	<b>30,311</b>	<b>26,551</b>	<b>24,045</b>	<b>21,538</b>	<b>19,032</b>
0,0006	80,356	76,878	74,559	72,241	69,923
	<b>77,658</b>	<b>73,898</b>	<b>71,392</b>	<b>68,885</b>	<b>66,378</b>
0,0012	161,872	158,394	156,075	153,756	151,438
	<b>156,570</b>	<b>152,810</b>	<b>150,303</b>	<b>147,797</b>	<b>145,290</b>

#### **Анализ результатов моделирования**

В таблице 4 и 5 представлены результаты расчетов коэффициента интенсивности напряжения первого и второго рода соответственно, вычисленные численно по формуле (2) и аналитически с использованием (5), (6). Жирным шрифтом выделено аналитическое решение, которое было выполнено по формулам (4) и (6).

Анализ данных, приведенных в таблицах 4 и 5, показал, что:

– коэффициенты интенсивности напряжений первого и второго родов для поставлен-

ных краевых условий двух задач практически совпадают;

– численный метод дает погрешность вычисления в среднем менее 8,5% и его точность прямо пропорционально зависит от количества разбиения на граничные элементы зияющей трещины.

Таким образом, предложенные методы аппроксимации разрыва смещений зияющей трещины и прямой расчет по формуле (2) позволяют достаточно точно вычислять коэффициенты интенсивности для трещин, на берегах которых заданы смешанные краевые условия.

#### **Список использованной литературы:**

1. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
2. Черепанов Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. – М.: Недра, 1987. – 308 с.
3. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.