Корецкая Т.В.
Оренбургский государственный институт менеджмента

КРАТКОСРОЧНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА БРАУНА

В статье рассматривается понятие адаптивных методов прогнозирования, а также рассмотрено применение комплексных переменных в экономических процессах и их возможное прогнозирование с использованием метода Брауна.

При использовании традиционных подходов и методов для прогнозирования важнейших экономических показателей на макро-, мезо- и микроуровнях часто выдвигается гипотеза о том, что основные тенденции и факторы, выявленные из предыстории, сохранятся и для периода упреждения (на прогнозируемый период). Таким образом, процесс экстраполяции выявленных закономерностей, тенденций базируется на предположении об инерционности анализируемых экономических систем. В последнее время в процессе коренных социально-экономических преобразований в России подвижность этих систем возрастает, возрастает быстрота реакции на конъюнктуру внешнего и внутреннего рынка, на правительственные решения, на новые социально-экономические условия. Даже наиболее инерционные макроэкономические характеристики становятся более подвижными.

В связи с этим для прогнозирования таких сложных процессов требуется гибкий и современный статистический инструментарий. В настоящее время одними из наиболее перспективных в исследовании и прогнозировании одномерных временных рядов считаются адаптивные методы. К одной из важных областей применения адаптивных методов в сфере финансов можно отнести прогнозирование ситуации на фондовом рынке. В связи с этим необходимо рассмотреть применение адаптивных методов как наиболее адекватных моделей для краткосрочного прогнозирования динамики акций [1].

Для достижения данной цели мы ставим перед собой следующие задачи. Во-первых, рассмотреть обоснованность применения адаптивных методов прогнозирования в экономических процессах и их сущность. Во-вторых, выявить возможность краткосрочного прогнозирования цены и объема акций, коэффициенты которых представлены с помощью комплексных переменных.

Цель адаптивных методов заключается в построении самокорректирующихся (самонастраивающихся) моделей. Отличие адаптивных моделей от других прогностических моделей состоит в том, что они отражают текущие свойства ряда и способны непрерывно учитывать эволюцию динамических характеристик изучаемых процессов. Именно поэтому такие модели предназначаются прежде всего для краткосрочного прогнозирования.

Адаптация в данных моделях слагается из небольших дискретных сдвигов. В основе процедуры адаптации лежит метод проб и ошибок. Последовательность процесса адаптации в основном выглядит следующим образом. Пусть модель находится в некотором исходном состоянии (т.е. определены текущие значения ее коэффициентов) и по ней делается прогноз. Выжидаем, пока истечет одна единица времени (шаг моделирования), и анализируем, насколько далек результат, полученный по модели, от фактического значения ряда. Ошибка прогнозирования через обратную связь поступает на вход системы и используется моделью в соответствии с ее логикой для перехода из одного состояния в другое с целью большего согласования своего поведения с динамикой ряда. На изменения ряда модель должна отвечать «компенсирующими» изменениями. Затем делается прогноз на следующий момент времени, и весь процесс повторяется. Таким образом, адаптация осуществляется рекуррентно с получением каждой новой фактической точки ряда. Быстроту реакции модели на изменения в динамике процесса характеризует так называемый параметр адаптации. Процесс «обучения» модели состоит в наборе наилучшего параметра адаптации на основе проб на ретроспективном материале. При наличии тенденции в стохастическом процессе наилучшей реакцией модели является определенный компромисс между двумя крайними ситуациями, обеспечивающий отражение тенденции и одновременно фильтрацию случайных отклонений от нее. После выбора параметра адаптации самообучение модели происходит в процессе переработки новых статистических данных.

Адаптивные модели достаточно гибки, однако не универсальны. Поэтому при построении и объяснении конкретных моделей необходимо учитывать наиболее вероятные закономерности развития реального процесса, динамические свойства ряда соотносить с возможностями модели.

Выявление и анализ тенденции динамического ряда часто производится с помощью его выравнивания или сглаживания. Экспоненциальное сглаживание – один из простейших и распространенных приемов выравнивания ряда. В его основе лежит расчет экспоненциальных средних [2].

Экспоненциальное сглаживание ряда осуществляется по рекуррентной формуле (1):

$$S_t = \alpha x_t + \beta S_{t-1}, \quad (1)$$

где S_t – значение экспоненциальной средней в момент t;

α – параметры сглаживания α = const, $0<\alpha<1$;

$\beta = 1 - \alpha$.

x_t – значение временного ряда в момент t.

Выражение (1) можно переписать следующим образом:

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha) S_{t-1} = S_{t-1} + \alpha (x_t - S_{t-1}). \quad (2)$$

Экспоненциальная средняя на момент t здесь выражена как экспоненциальная средняя предшествующего момента плюс доля α разницы текущего наблюдения и экспоненциальной средней прошлого момента.

Экспоненциальную среднюю S_t можно также выразить через значения временного ряда x:

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i x_{t-1} + \beta^N S_0, \quad (3)$$

где N – количество членов ряда;

S_0 – некоторая величина, характеризующая начальные условия при t=1.

Так как $\beta<1$, то при $N \to \infty$ $\beta^N \to 0$ и сумма коэффициентов $\alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i \to 1$.

Тогда $S_t = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i x_{t-1}$.

Таким образом, величина S_t оказывается взвешенной суммой всех членов ряда. Причем веса падают экспоненциально в зависимости от давности («возраста») наблюдения. Это и объясняет, почему величина S_t названа экспоненциальной средней.

С помощью экспоненциально взвешенного ряда весов легко рассчитать среднее взвешенное показателя Y в момент времени T, которое будет являться прогнозной моделью процесса на следующий момент наблюдения (T+1). Обозначим это прогнозное значение через $\overline{Y}_{t+1}$. Запись приобретет вид [3]:

$$\overline{Y}_{t+1} = \alpha \times Y_t + (1-\alpha) \times \overline{Y}_t. \quad (4)$$

Экспоненциальное сглаживание можно представить как фильтр, на вход которого в виде потока последовательно поступают члены исходного ряда, а на выходе формируются текущие значения экспоненциальной средней. И чем меньше α, тем в большей степени фильтруются, подавляются колебания исходного ряда.

После появления работ Р.Г. Брауна экспоненциальная средняя часто используется для краткосрочного прогнозирования. В этом случае предполагается, что ряд генерируется моделью

$$x_t = a_{1,i} + \varepsilon_i, \quad (5)$$

где $a_{1,i}$ – варьирующий во времени средний уровень ряда;

ε_i – случайные неавтокоррелированные отклонения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 (шум).

Прогнозная модель имеет вид:

$$x_\tau(t) = a_{1,t}, \quad (6)$$

где $x_\tau(t)$ – прогноз, сделанный в момент t на t единиц времени (шагов) вперед;

$a_{1,t}$ – оценка $a_{1,t}$.

Средством оценки единственного параметра модели служит экспоненциальная средняя $a_{1,t} = S_t$ Таким образом, все свойства экспоненциальной средней распространяются на прогнозную модель. В частности, если S_{t-1} рассматривать как прогноз на 1 шаг вперед, то в выражении (2) величина $(x_t - S_{t-1})$ есть погрешность этого прогноза, а новый прогноз S_t получается в результате корректировки предыдущего прогноза с учетом его ошибки. В этом и состоит существо адаптации.

При краткосрочном прогнозировании желательно как можно быстрее отразить изменения $a_{1,t}$ и в то же время как можно лучше «очистить» ряд от случайных колебаний.

Таким образом, с одной стороны, следует увеличить вес более свежих наблюдений, что может быть достигнуто повышением $a_{1,t}$, с другой стороны, для сглаживания случайных отклонений величину $a_{1,t}$ нужно уменьшить. Как видим, эти два требования находятся в противоречии. Поиск компромиссного значения составляет задачу оптимизации модели.

Экспоненциальное сглаживание является простейшим вариантом самообучающейся модели. Такую модель будем называть адаптивной экспоненциального типа, а величину α – параметром адаптации.

Главное достоинство прогнозной модели, основанной на экспоненциальной средней, состоит в том, что она способна последовательно адаптироваться к новому уровню процесса без значительного реагирования на случайные отклонения.

В соответствии с указанными условиями границы области определения постоянной сглаживания лежат в пределах $0<\alpha<1$. Именно эти границы и используются экономистами для краткосрочного прогнозирования экономической динамики как с помощью формулы (4), так и с помощью различных ее модификаций.

На близкую тему опубликовано большое количество работ, например Ю.П. Лукашина, Т.А. Дубровой, Л.Е. Басовского, Т.Г. Морозовой, А.В. Пикулькиной, Р.Ф. Фаткулиной, Муравьева Д.Г., в которых освещены многочисленные методы прогнозирования фондового рынка, в частности использование адаптивных методов краткосрочного прогнозирования.

В рамках данного исследования вызывает интерес монография С.Г. Светунькова «Запредельные случаи метода Брауна в экономическом прогнозировании». В этой монографии автор предложил увеличить пределы α до 2. Корректировка предела в монографии объясняется следующим образом.

Исходный ряд весов, предложенный Брауном, представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию, о которой известно, что она сходится к единице, если для члена геометрической прогрессии выполняется единственное условие: модуль члена геометрической прогрессии должен быть меньше единицы. Для предложения С.Г. Светунькова это условие запишется следующим образом:

$$0 < \alpha < 2 \cdot \tag{7}$$

Легко убедиться в том, что при величине постоянной сглаживания, превышающей единицу, ряд весов становится знакочередующимся, сходимым и его сумма равна единице.

Если постоянная сглаживания α равна нулю, то говорят о том, что модель совершенно неадаптивна к новой информации – какими бы ни были фактические значения Y_t, прогнозные значения пересчитываться не будут. Если же постоянная сглаживания α равна единице, то прогнозные значения будут в точности соответствовать фактическим значениям Y_t и не будут учитывать прошлые наблюдения. При этом говорят о полной адаптивности модели к текущим наблюдениям.

Казалось бы, что спектр всех возможных вариантов адаптации полностью исчерпан: от полной неадаптивности до полной адаптивности. Для того чтобы развить указанное толкование на запредельные случаи метода Брауна, следует осуществить некоторые преобразования формулы Брауна.

С учетом того, что запредельные случаи соответствуют условию, при котором постоянная сглаживания всегда не меньше единицы, ее можно представить в следующем виде:

$$\alpha = 1 + \angle, \tag{8}$$

где постоянная β лежит в пределах от нуля до единицы.

Если теперь подставить выражение для постоянной сглаживания (8) в исходную формулу и осуществить элементарные преобразования, можно получить следующее выражение:

$$Y_{t+1} = Y_t + \beta(Y_t - Y_{t+1}) \tag{9}$$

или, используя обозначение (8):

$$Y_{t+1} = Y_t + \beta\,\varepsilon_t . \tag{10}$$

Таким образом, появляется возможность дать смысловое толкование запредельным случаям метода Брауна.

Во-первых, следует сразу отметить, что при этом модель полностью адаптивна к текущей информации, так как в формуле (10) текущая информация учитывается полностью, поскольку первое слагаемое формулы есть не что иное, как текущее наблюдение Y_t.

Во-вторых, модель в той или иной степени становится адаптивной к текущему отклонению расчетных значений от фактических. При этом если постоянная α равна нулю, то прогнозная модель оказывается совершенно неадаптивна к текущим отклонениям фактических значений наблюдения от расчетных значений. Если постоянная равна единице, то в соответствии с условием 4 модель краткосрочного прогноза полностью учитывает величину текущей ошибки отклонения – модель абсолютно адаптивна к текущей ошибке прогноза. Случаям, когда постоянная 0 лежит в пределах от нуля до единицы, соответствует та или иная степень адаптивности модели к текущей ошибке отклонения фактических значений от расчетных.

В кибернетике процессы, которые основаны на использовании и учете текущей информации, называются адаптацией, а те, которые основаны на использовании и учете текущей ошибки, называются процессами самообучения. Поэтому в запредельных случаях метода Брауна модель приобретает более сложные свойства, а именно свойства самообучения.

Исследования показали, что классические пределы изменения постоянной сглаживания будут оптимальными для стационарных процессов, а запредельные – от единицы до двух – для нестационарных процессов [3].

В рамках предыдущих исследований фондового рынка внимание было сосредоточено на прогнозировании курса акций на торгах Московской межбанковской валютной биржи (ММВБ). Для исследования была использована статистическая информация за 2005, 2006, 2007 годы по акции «Аэрофлот». Нами были рассмотрены ситуации торгов на рынке в момент времени *t*, описываемые двумя основными показателями: объемом продаж Q^j_t *j*-го вида товара и ценой P^j_t за единицу этого *j*-го изделия.

Эта пара значений показателей была представлена как комплексная переменная:

$$\dot{Z}^j_t = Q^j_t + iP^j_t , \tag{11}$$

где P_j – цена *j*-го товара, реализованного на рынке;

Q_j – объем *j*-го товара, реализованного на рынке.

Далее комплексное число *Z* записывалось в виде тригонометрической формы комплексного числа (12).

$$Z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{12}$$

здесь φ – полярный угол, *r* – полярный радиус, который в данном случае получил название модуля комплексного числа (длина вектора).

Модуль комплексного числа равен:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} , \tag{13}$$

и полярный угол

$${}^{j}_{t} \quad \mathrm{arc}\,tg\,\frac{P^j_t}{Q^j_t} . \tag{14}$$

Следующим этапом было нахождение цены P и объема Q по нижеприведенным формулам:

$$P = R \cdot Cos \cdot \varphi \qquad Q = R \cdot Sin \cdot \varphi .$$

Для дальнейших исследований применения комплексных переменных на фондовых биржах необходимо полученные значения *P* и *Q* подвергнуть прогнозированию. С точки зрения прогноза будущего движения цен значительный интерес представляет вопрос о том, насколько прогнозируемы комплексные переменные. Далее мы производим все необходимые расчеты для прогнозирования *P* и *Q*.

Предложенные С.Г. Светуньковым пределы постоянной сглаживания $0 < \alpha < 2$ необходимо применить на конкретных примерах, для возможности принять или опровергнуть поставленные цели данной статьи.

В связи с тем, что для прогнозирования будут использованы модуль r и полярный угол φ, прогнозная модель процесса на следующий момент наблюдения (t+1) будет представлена следующим образом:

$$\overline{\varphi}_{t+1} = \alpha \times \varphi_t + (1-\alpha) \times \overline{\varphi}_t, \qquad (15)$$

$$\overline{r}_{t+1} = \alpha \times r_t + (1-\alpha) \times \overline{r}_t, \qquad (16)$$

где α – постоянная сглаживания $0 < \alpha < 2$,

φ_t – полярный угол,

r_t – модуль.

Ряд прогнозируемых данных для каждого года состоял из 246 значений. Расчеты совершались для каждого коэффициента сглаживания (т. е. 0,1 0,2 0,3 и т. д. до 2). Для расчета φ_t и r_t были взяты первые три показателя. Целью статьи не является представление подробных расчетов, необходимых для прогнозирования по методу Брауна, поэтому ниже в таблице 1 представлен фрагмент расчетной таблицы полярного угла за 2005 год.

Для каждого из i значений постоянной сглаживания определяется ошибка ретропрогноза: $\varepsilon_{t1} = Y_t - \overline{Y}_t$, и на ее основе вычисляют дисперсию. То значение α_i, для которого дисперсия является минимальной, и является наилучшим для данного ряда значений. Дисперсию мы находим по формуле (17):

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\sum \varepsilon_t^2}{T-1}. \qquad (17)$$

Далее находим ошибку δ при прогнозировании полярного угла в процентах по формуле (18):

$$\delta = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\overline{\varphi}} * 100\%. \qquad (18)$$

Найденные по минимальной дисперсии оптимальные значения постоянной сглаживания сведены в таблицу 2.

После получения всех прогнозных значений полярного угла и модуля рассчитываются прогнозные значения P и Q по нижепредставленным формулам:

$$Q_{прогн} = r_{прогн} \cdot Cos \cdot \varphi_{прогн} \qquad P_{прогн} = r_{прогн} \cdot Sin \cdot \varphi_{прогн}$$

Для дальнейшего анализа возможностей прогнозирования комплексных переменных были построены графики начальных и прогнозных значений *P* и *Q*.

Полученный график представлен на рисунке 1.

Далее на рисунке 2 представлен график начальных и прогнозных значений P и Q за этот же год, но не преобразованных в комплексные переменные.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что предложенные С.Г. Светуньковым запредельные случаи, при которых постоянная сглаживания находится в пределах $0 < \alpha < 2$, наиболее применимы для прогнозирования действительных чисел, чем для показателей, выраженных с помощью комплексных переменных. Это можно наглядно проследить по оптимальным значениям по-

Таблица 1. Фрагмент прогнозирования полярного угла

t	φ_t	$\alpha \cdot \varphi_t$	$(1-\alpha) \bullet \overline{\varphi}_{t+1}$	$\overline{\varphi}_{t+1}$	$\varepsilon_{t1} = \varphi_t - \overline{\varphi}_t$
1	0,79	0,1*0,79=0,079	(1-0,1)*1,19=**1,07**	0,079+1,07=***1,151***	0,79-1,19= **-0,4063**
2	1,29	0,129	(1-0,1)****1,151***=1,04	0,129+1,04=*1,165*	1,29-***1,151***=0,1345
3	1,50	0,150	(1-0,1)**1,165*=1,05	0,150+1,05=1,199	1,50-*1,165*=0,3397
4	1,46	0,146	1,08	1,224	0,2584
5	1,50	0,150	1,10	1,252	0,2772
6	1,40	0,140	1,13	1,267	0,1498
	…	……	……	……	……
246					

Таблица 2. Оптимальные значения постоянной сглаживания

	α для φ	δ	α для R	δ	α для P	δ	α для Q	δ
2005	0,3	0,36	0,7	1,09	1,3	0,02	0,7	1,61
2006	0,4	0,69	0,3	0,66	1,1	0,02	0,3	0,69
2007	0,2	0,56	0,1	1,03	1,1	0,02	0,1	1,15

стоянной сглаживания α представленным в таблице 2. Из таблицы видно, что только в действительных числах предел сглаживания переваливает за крайний предел, предложенный Р. Брауном. А значения постоянной сглаживая комплексного числа находятся в пределах $0 < \alpha < 1$.

С.Г. Светуньков в своей монографии «Запредельные случаи метода Брауна в экономическом прогнозировании» в главе 6 «Метод Брауна применительно к краткосрочному прогнозированию комплексных переменных» на основании своих исследований сделал нижепредставленный вывод:

«Таким образом, можно сделать вывод о том, что использовать модель Брауна для краткосрочного прогнозирования временного ряда комплексной переменной можно только в том случае, когда размерности, величины и дисперсии исходных рядов относительно их средних близки друг к другу. Эти ограничения существенно сужают возможный ряд случаев, которые встречаются на практике, поэтому применение метода Брауна к краткосрочному прогнозированию комплексных переменных следует признать малоцелесообразным» [3].

Таким образом, на основании проведенных исследований и интерпретации результатов в виде представленных графиков можно сделать вывод, что вопрос о прогнозировании комплексных переменных с использованием метода Брауна не изучен до конца.

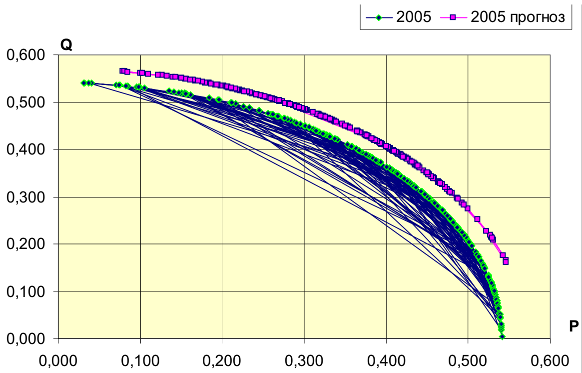

Рисунок 1. Динамика начальных и прогнозных значений P и Q

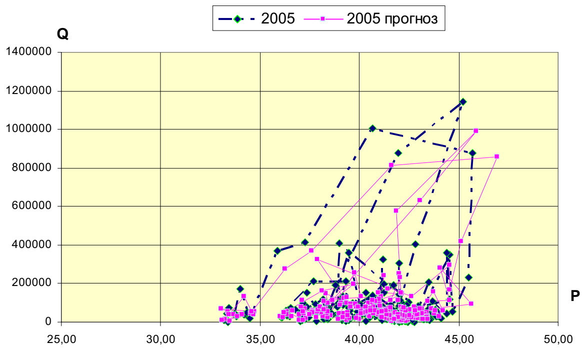

Рисунок 2. Динамика начальных и прогнозных значений реальных цены P и объема Q

Комплексные переменные, выраженные в тригонометрической форме, прогнозные значения которых представлены на рисунке 1, при наглядном изучении динамики наиболее информативны. Для подтверждения визуальной информативности необходимы дальнейшие исследования.

Список использованной литературы:

1. Дуброва Т.А. Прогнозирование социально-экономических процессов. Статистические методы и модели: учеб. пособие / Т.А. Дуброва. – М.: Маркет ДС, 2007. – 192 с.
2. Бамбаева Н.Я. Статистический анализ и прогнозирование конъюнктуры рынка корпоративных ценных бумаг: Дис. ... канд. экон. наук.: 08.00.11 Москва, 1999. 167 с. РГБ ОД, 61:00-8/291-9
3. Светуньков С.Г., Бутуханов А.В., Светуньков И.С. Запредельные случаи метода Брауна в экономическом прогнозировании. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006. – 71 с.
4. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 337 – 340 с. ISBN 5-279-02740-5

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант №07-06-00151-а «Разработка основ экономико-математического моделирования с использованием комплексных переменных»