Павленко А.Н.
ГОУ ВПО «Оренбургский государственный университет»

ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ

Статья посвящена получению различных обратных неравенств вида $\|Ax_i; E_{\alpha,\beta}\| \le 1/i$. Рассмотрено приложение доказанных обратных неравенств к исследованию системы дифференциальных уравнений $Ax = \lambda f(t, x, x', \ldots, x^{(m-1)}) + y$. Для приведенной системы устанавливается существование решений $x_\lambda(\lambda \ge 0)$, $X_\lambda(\lambda > 0)$, удовлетворяющих довольно широкому классу граничных краевых условий.

В работе устанавливаются обратные неравенства вида $\|x; E_1\| \le V(\|x; E_2\|)$, где E_1, E_2 – банаховы пространства вектор-функций действительного переменного, E_1 компактно вложено в E_2, $V: R_+ \to R_+$ – возрастающая функция, $x \in \aleph \subset E_1$. Основное внимание уделяется случаю, когда множество $\aleph$ состоит из вектор-функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям и поточечным дифференциальным неравенствам. В качестве приложения рассматривается система дифференциальных уравнений

$$Ax=\lambda f(t, x, x',\ldots,x^{(m-1)})+y, \qquad (1)$$

где A – линейный дифференциальный оператор порядка m. Вектор-функция f имеет сверхлинейный характер роста по x, y – заданная вектор-функция. Для широкого класса граничных краевых условий доказывается существование решений $x_\lambda(\lambda\ge0)$, $X_\lambda(\lambda>0)$ системы (1), удовлетворяющих этим условиям и требованиям $x_\lambda \to x_0$, X_λ неограниченно растет при $\lambda\to0$.

1. В статье будут использоваться следующие обозначения. R^n – действительное n-мерное векторное пространство, $R^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \ge 0\}$. Для x, y из R^n введем следующие обозначения $x\ge y$, если $x - y \in R^n_+$, и $x>>y$, если $x - y \in \operatorname{int} R^n_+$. Через [x] будем обозначать вектор $(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. Скалярное произведение $x\cdot y$ двух векторов $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ и $y=(y_1, y_2,\ldots, y_n)$ определим равенством $x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$; $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ – евклидова норма элемента x из R^n. Если a – матрица размерности $n\times n$, то $\|a\| = \sup_{|x|\le1}|ax|$ – операторная норма матрицы a. Всюду далее $0<T<\infty$, $I=[0, T]$, $\overset{0}{I} = (0, T)$. Так как все функциональные пространства, рассматриваемые ниже, заданы только на I, то всюду ниже множество I будет опускаться из обозначения функциональных пространств. α, β – неотрицательные целые числа; $\rho(t)=t^\alpha(T-t)^\beta$, $t\in \overset{0}{I}$; $E_{\alpha,\beta}$ – банахово пространство измеримых на $\overset{0}{I}$ вектор-функций $u: I\to R^n$ с нормой

$$\|u, E_{\alpha,\beta}\| = \int_0^T |u(t)|\rho(t)dt,$$

как обычно, функции, совпадающие п.в. (почти всюду), отождествляются. $E^m_{\alpha,\beta}(m > \alpha, m > \beta)$ – совокупность вектор-функций, производные Соболева которых существуют до порядка m включительно и принадлежат пространству $E_{\alpha,\beta}$.

$$\|u, E^m_{\alpha,\beta}\| = \sum_{i=0}^{m} \|u^{(i)}; E_{\alpha,\beta}\|.$$

Помимо пространств $E^m_{\alpha,\beta}$ в статье используются пространства Соболева L^k_p ([1], [2]) и пространства C^k со стандартными нормами

$$\|u; L^k_p\| = \sum_{i=0}^{k} \|u^{(i)}; L_p\|, \|u; C^k\| = \sum_{i=0}^{k} \|u^{(i)}; C\|.$$

Теоремы вложения для пространств $E^m_{\alpha,\beta}$ рассмотрены в [3], [4]. Ниже будут приведены некоторые следствия теорем вложения.

Предложение 1. Пусть $k=0,1,\ldots,m-1$; $\gamma=\max\{\alpha-m+k,0\}$, $\delta=\max\{\beta-m+k,0\}$. Тогда $E^m_{\alpha,\beta}$ компактно вкладывается в $E^k_{\alpha,\beta}$ и непрерывно в $E^k_{\gamma,\delta}$.

Предложение 2. Пусть

$$\alpha_i=\max\{\alpha+i+1-m, 0\}, \beta_i= \max\{\beta+i+1-m, 0\}, \qquad (2)$$

$$\rho_i(t) = t^{\alpha_i}(T - t)^{\beta_i}, (i = 0,1,\ldots,m-1; t \in I). \qquad (3)$$

Тогда существует такая константа c, что

$$\sum_{i=0}^{m-1} \operatorname{vrai\,max} \rho_i(t)|u^{(i)}(t)| \le c\|u; E^m_{\alpha,\beta}\|. \qquad (4)$$

Предложение 1 есть одномерный вариант многомерных аналогов, приведенных в [1], [2]. Предложение 2 есть простое следствие предложения 1. В требуемой форме оно доказано в [3].

Рассмотрим дифференциальный оператор, определяемый равенством

$$Ax=x^{(m)}+a_{m-1}x^{(m-1)}+\ldots+a_1x'+a_0x, \qquad (5)$$

где a_i (i=0,1,…,m-1) – матричные функции размерности $n\times n$. Старшую часть оператора A обозначим далее A_0 и определим ее следующим образом: $A_0x=x^{(m)}$. Очевидно, что A_0 – непрерывный оператор из $E^m_{\alpha,\beta}$ в $E_{\alpha,\beta}$. Младшая часть $A_1=A-A_0$ оператора A при определенных ограничениях, налагаемых на коэффициенты a_i, оказывается вполне непрерывным оператором из $E^m_{\alpha,\beta}$ в $E_{\alpha,\beta}$.

Лемма 1. Пусть матричная функция $a_i(t)$ (i=0,1,…,m-1) суммируема с весом $\rho(t)/\rho_i(t)$ по отрезку I, тогда оператор $A_1: E^m_{\alpha,\beta}\to E_{\alpha,\beta}$ является вполне непрерывным.

Доказательство.

Пусть $S=\{x\in E^m_{\alpha,\beta}; \|x, E^m_{\alpha,\beta}\|\le 1\}$ – единичный шар в пространстве $E^m_{\alpha,\beta}$, $S^{(i)}=\{x^{(i)}; x\in S\}$ (i=0,1,…,m-1) – образ шара при i-кратном дифференцировании. Так как $S^{(i)}$ – ограниченное множество в пространстве $E^{m-1}_{\alpha,\beta}$, то оно является относительно компактным в пространстве $E_{\alpha,\beta}$, что непосредственно следует из предложения 1. Последнее влечет относительную компактность $S^{(i)}$ (i=0,1,…,m-1) по мере. Отсюда следует, что множество функций $\rho(t)a_i(t)x^{(i)}(t)$, где $x\in S$, также относительно компактно по мере.

Если $x\in S$, из неравенства (4) имеем $\rho_i(t)|x^{(i)}(t)|\le c$, поэтому $|a_i(t)x^{(i)}(t)|\le$ $\le\|a_i(t)\|\cdot|x^{(i)}(t)|\le c\|a_i(t)\|/\rho_i(t)$. Вектор-функция $\rho(t)a_i(t)x^{(i)}(t)$ удовлетворяет неравенству $|\rho(t)a_i(t)x^{(i)}(t)|\le c\dfrac{\rho(t)}{\rho_i(t)}\|a_i(t)\|$, правая часть которого есть суммируемая функция, не зависящая от x из S.

Из приведенных рассуждений вытекает, что множество функций $\rho(t)a_i(t)x^{(i)}(t)$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Отсюда по признаку компактности Красносельского следует относительная компактность множества функций $\rho(t)a_i(t)x^{(i)}(t)$ в пространстве L_1. Таким образом, оператор $A_1: E^m_{\alpha,\beta}\to E_{\alpha,\beta}$ вполне непрерывен.

Равенства (2) влекут оценки $\alpha_i\le\alpha$, $\beta_i\le\beta$ (i=0,1,…,m-1). В частности, если $\alpha=\beta=0$, то $\alpha_i=\beta_i=0$. В этом случае требования к коэффициентам α_i сводятся к их суммируемости по отрезку I. Рассмотрим теперь случай $\alpha>0$, $\beta>0$, $m\ge 2$, тогда

$$\alpha_i=\begin{cases}\alpha+1+i-m, i>m-\alpha-1\\ 0, 0\le i\le m-\alpha-1\end{cases},$$

$$\beta_i=\begin{cases}\beta+1+i-m, i>m-\beta-1\\ 0, 0\le i\le m-\beta-1\end{cases}.$$

Требование суммируемости коэффициента a_{m-1} сохраняется и в этом случае, а младшие коэффициенты $a_i(0\le i<m-1)$ суммируемы с весом, обращающимся в нуль вблизи концов отрезка I. Таким образом, лемма 1 охватывает случаи, когда некоторые коэффициенты не являются суммируемыми на I.

Если оператор A рассматривать как отображение L^m_p на L_p, то для оператора $A_1: L^m_p\to L_p$ верна

Лемма 1'. Если $a_i\in L_p$ (i=0,1…, m-1; $1\le\rho\le\infty$), то тогда оператор $A_1: L^m_p\to L_p$ является вполне непрерывным.

Доказательство при $1\le\rho\le\infty$ полностью аналогично доказательству леммы 1, а при $\rho=\infty$ утверждение леммы следует из компактности вложения L^m_p в L_p.

Всюду далее требования леммы 1 относительно коэффициентов считаются выполненными (иногда требования будут усиливаться). В условиях леммы 1 оператор $A: E^m_{\alpha,\beta}\to E_{\alpha,\beta}$ непрерывен; его норму обозначим символом $\upsilon(A)$.

Наряду со стандартной нормой $\|\cdot; E^m_{\alpha\beta}\|$ далее будет использоваться норма вида

$$\|x\|_h=\|Ax; E_{\alpha,\beta}\|+h(x),$$

оказывающаяся эквивалентной исходной норме при выполнении условия следующей леммы.

Лемма 2. Пусть $h: E^m_{\alpha\beta}\to R$ – полунорма, обладающая свойствами:

1) h подчинена норме $\|\cdot; E^m_{\alpha\beta}\|$ в том смысле, что $h(x)\le\upsilon(h)\|x; E^m_{\alpha,\beta}\|$ ($\upsilon(h)$ не зависит от R^n из $E^m_{\alpha\beta}$);

2) $h(\upsilon)\ne 0$, если υ – ненулевое решение уравнения Ax=0. Тогда норма $\|\cdot\|_h$ эквивалентна норме $\|\cdot; E^m_{\alpha,\beta}\|$.

Доказательство. Так как $\|x\|_h\le(\nu(A)+$ $+\upsilon(h))\|x, E^m_{\alpha,\beta}\|$, то очевидно, что норма $\|\cdot\|_h$ подчинена норме $\|\cdot;E^m_{\alpha\beta}\|$. Докажем, что норма $\|\cdot;E^m_{\alpha\beta}\|$ подчинена норме $\|\cdot\|_h$. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{x_i\}$, для которой выполняется $\|x_i;E^m_{\alpha,\beta}\|=1$, $\|x_i\|_h\le 1/i$. Так как последовательность $\{x_i\}$ ограничена в $E^m_{\alpha\beta}$, а оператор $A_1: E^m_{\alpha\beta}\to E_{\alpha\beta}$ вполне непрерывен и вложение $E^m_{\alpha\beta}\subset E^{m-1}_{\alpha\beta}$ компактно, то тогда последовательности $\{A_1x_i\}$, $\{x_i\}$ относительно компактны соответственно в $E_{\alpha\beta}$ и $E^{m-1}_{\alpha\beta}$. Так как оба пространства полные, то из обеих последовательностей $\{A_1x_i\}$ и $\{x_i\}$ можно извлечь сходящиеся подпоследовательности.

С целью упрощения обозначений будем считать, что сами последовательности являются сходящимися: $A_1x_i\to y_0$ в $E_{\alpha\beta}$; $x_i\to x_0$ в $E^{m-1}_{\alpha\beta}$. Последняя сходимость влечет сходимость $x_i\to x_0$ по мере. Отсюда следует, что $A_1x_i\to A_1x_0$ по мере и $y_0=A_1x_0$.

Из $\|x_i\|_h\le 1/i$ следует, что $\|Ax_i;E_{\alpha,\beta}\|\le 1/i$, но тогда $Ax_i\to 0$ в пространстве $E_{\alpha\beta}$. Эта сходимость вместе со сходимостью $A_1x_i\to A_1x_0$ в $E_{\alpha\beta}$ влечет $x_i^{(m)}=A_0x_i\to -A_1x_0$ в пространстве $E_{\alpha\beta}$. Отсюда по теореме 5 ([11], с. 141) получаем, что $x_i^{(m)}\to x_0^{(m)}$ в $E_{\alpha\beta}$. Так как по доказанному выше $x_i\to x_0$ в $E^{m-1}_{\alpha\beta}$, то $x_i\to x_0$ и в $E^m_{\alpha\beta}$. Тогда получаем, что $Ax_0=0$, $h(x_0)=0$, $\|x_0;E^m_{\alpha,\beta}\|=1$. Из последнего равенства следует, что $x_0\neq 0$. Получили противоречие с условием 2) леммы.

Лемма доказана.

Лемма 2 аналогична известным теоремам об эквивалентных нормах [1], [2]. Ниже будет использоваться еще один вариант подобных теорем.

Лемма 3. Пусть коэффициенты оператора A принадлежат L_p ($1\le p\le\infty$). Тогда существует такая постоянная υ_0, что

$$\|x;L^m_p\|\le \upsilon_0\left(\|Ax;L_p\|+\|x;E_{\alpha,\beta}\|\right). \qquad (6)$$

Доказательство следует из леммы 1' и полностью аналогично доказательству леммы 2.

Оценки типа (6) принято называть неравенствами коэрцетивности. Вместо нормы $\|\cdot;E_{\alpha,\beta}\|$ можно использовать и более слабые нормы. Кроме того, если на некотором подпространстве E пространства a_i оператор A невырожден, то есть $\mathrm{Ker}A=\{x\in L^m_p;\, Ax=0\}=0$, то имеет место неравенство

$$\|x;L^m_p\|\le \upsilon_0\|x;E_{\alpha,\beta}\|,\ x\in E, \qquad (7)$$

также являющееся неравенством коэрцетивности.

2. Положим $l=m-1-\alpha$, $r=m-1-\beta$. Очевидно, что $0\le l\le m-1$, $0\le r\le m-1$. Из неравенства (4) вытекает, что если $0\le j\le l$, то оператор взятия следа $x\to x^{(j)}(0)$ непрерывен из $E^m_{\alpha\beta}$ в R^n. Аналогично, если $0\le j\le r$, то оператор $x\to x^{(j)}(T)$ непрерывен из $E^m_{\alpha\beta}$ в R^n. Проведенные рассуждения влекут непрерывность на $E^m_{\alpha\beta}$ функционала

$$B(x)=\sum_{j=0}^{l}c_jx^{(j)}(0)+\sum_{j=0}^{r}d_jx^{(j)}(T), \qquad (8)$$

где c_j, $d_j\in R^n$. Старшую часть B_0 функционала B определим равенством $B_0(x)=c_lx^{(l)}(0)+$ $+d_rx^{(r)}(T)$, а младшую часть – равенством $B_1(x)=B(x)-B_0(x)$.

Если функционал $h:E_{\alpha\beta}\to R$ есть норма, подчиненная норме $\|\cdot;E_{\alpha,\beta}\|$, то в силу результатов общего характера ([5], с. 126) справедливо неравенство

$$\|x;E^{m-1}_{\alpha\beta}\|\le\delta\|x,E^m_{\alpha\beta}\|+c(\delta)h(x). \qquad (9)$$

В неравенстве (9) и аналогичных ему параметр δ может быть сколь угодно малым; $c(\delta)$, $c_1(\delta)$, $c_2(\delta)$ и т. д. – убывающие функции параметра $\delta>0$. Непосредственным следствием (9) является оценка

$$|B_1(x)\le\delta\|x;E^m_{\alpha,\beta}\|+c_1(\delta)h(x), \qquad (10)$$

означающая усиленную непрерывность младшей части $B_1(x)$ функционала (8).

Введем обозначения: $K(A)=\{u\in E^m_{\alpha,\beta};$ $Au\ge 0\}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – стандартная билинейная форма, задающая двойственность между $E_{\alpha,\beta}$ и сопряженным к нему пространством $E^*_{\alpha,\beta}$ которое можно отождествить с пространством измеримых вектор-функций $\nu:I\to R^n$, имеющих конечную норму

$$\|\nu,E^*_{\alpha,\beta}\|=\mathrm{vrai\,max}|\nu(t)/\rho(t)|.$$

$$\langle u,\nu\rangle=\int_I u(t)\nu(t)dt\ \left(u\in E_{\alpha,\beta};\nu\in E^*_{\alpha,\beta}\right). \qquad (11)$$

Через $\bar{1}$ обозначим вектор, все компоненты, которого тождественно равны 1.

Теорема 1. Пусть функционал $B:E^m_{\alpha,\beta}\to R$ определен равенством (8), причем $0\le r\le m-1$, $d_r>>0$. Пусть h есть норма, подчиненная норме $\|\cdot;E_{\alpha,\beta}\|$. Тогда найдутся такие постоянные k_0, k, что для всех вектор-функций x из конуса K(A) имеет место неравенство

$$\|x;E^m_{\alpha,\beta}\|\le k_0B(x)+kh(x). \qquad (12)$$

Доказательство. Фиксируем $\tau\in(0,T/2)$ и введем вектор-функцию $\nu_0:I\to R^n$ следующим образом

$$\nu_0(t)=\frac{t^\alpha}{\alpha!}c_1(-1)^{\alpha+1}(0\le t\le\tau),$$

$$\nu_0(t)=\frac{(T-t)^\beta}{\beta!}d_r(T-\tau\le t\le T)$$

на интервал (τ, T-τ), вектор-функция $\nu_0(t)$ продолжается таким образом, чтобы $\nu_0\in C^m$ и $\nu_0(t)>>0\left(t\in \overset{0}{I}\right)$.

Очевидно, что функция $\nu_0(t)$ обладает свойствами

$$\nu_0^{(\alpha)}(0)=c_1(-1)^{\alpha+1},\nu_0^{(j)}(0)=0\,(j\ne\alpha);$$

$$\nu_0^{(\beta)}(0)=d_r(-1)^\beta,\nu_0^{(j)}(T)=0\,(j\ne\beta);$$

$$\kappa_1\rho(t)l\le\nu_0(t)\le$$

$$\kappa_1\rho(t)\bar{l}\le\nu_0(t)\le\kappa_2\rho(t)\bar{l}, \qquad (13)$$

где κ_1, κ_2 – положительные постоянные, $\nu_0\in E^*_{\alpha,\beta}$.

Если x∈K(A), то Ax≥0 и согласно (13) из элементарного неравенства $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2}\le$ $\le|\xi_1|+|\xi_2|+...+|\xi_n|$ следует неравенство $\kappa_1\|Ax;E_{\alpha,\beta}\|\le\langle Ax,\nu_0\rangle$, а применив неравенство $|\xi_1|+|\xi_2|+...+|\xi_n|\le\sqrt{n}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2}$ и компактность оператора A_1, получим

$$\langle A_1x,\nu_0\rangle\le\kappa_2\sqrt{n}\|A_1x,E_{\alpha,\beta}\|\le$$

$$\le\delta\|x;E^m_{\alpha,\beta}\|+c_2(\delta)h(x)\ . \qquad (14)$$

Проведя интегрирование по частям выражения $\langle A_0x,\nu_0\rangle$, получаем равенство

$$\langle A_0x,\nu_0\rangle=B_0(x)+(-1)^m\langle x,\nu_0^{(m)}\rangle\le B_0(x)+\kappa_3\|x;L_1\|.$$

Используя компактность вложения $E^m_{\alpha,\beta}$ в L_1, получаем неравенство

$$\|x;L_1\|\le\delta\|x;E^m_{\alpha,\beta}\|+c_3(\delta)h(x).$$

Тогда

$$\langle A_0x,\nu_0\rangle\le B_0(x)+\delta\kappa_3\|x;E^m_{\alpha,\beta}\|+c_3(\delta)\kappa_3h(x). \qquad (15)$$

Объединяя (14) и (15), получим

$$\kappa_1\|Ax;E_{\alpha,\beta}\|\le\langle Ax,\nu_0\rangle=$$

$$=\langle A_0x,\nu_0\rangle+\langle A_1x,\nu_0\rangle\le B_0(x)+\delta_1\|x;E^m_{\alpha,\beta}\|+c_4(\delta_1)h(x).$$

Прибавив к полученному неравенству неравенство (10), получим

$$\kappa_1\|Ax;E_{\alpha,\beta}\|\le B_0(x)-|B_1(x)|+\delta_2\|x;E^m_{\alpha,\beta}\|+$$

$$+c_5(\delta_2)h(x)\le B(x)+\delta_2\|x,E^m_{\alpha,\beta}\|+c_5(\delta_2)h(x),$$

используя оценку

$$\|x;E^m_{\alpha,\beta}\|\le M(\|Ax;E_{\alpha,\beta}\|+h(x)),$$

следующую из леммы 2, получаем выполнимость неравенства

$$\|x;E^m_{\alpha,\beta}\|\le\kappa_0B(x)+\kappa h(x).$$

Теорема доказана.

Следствие. Если функционал B обращается в нуль на некотором подпространстве $E\subset E^m_{\alpha,\beta}$, то $\|x;E^m_{\alpha,\beta}\|\le\kappa h(x)$ $x\in K(A)\cap E$.

Функционал $h:E_{\alpha,\beta}\to R$ можно, например, определить равенством $h(x)=\|\psi_1x;E_{\alpha,\beta}\|$. Если ψ_1 – положительная п.в. функция из L∞, то h удовлетворяет условиям леммы 2.

Неравенство (12) влечет соотношение

$$\|Ax;E_{\alpha,\beta}\|\le\nu(A)\|x,E^m_{\alpha,\beta}\|\le\kappa_0\nu(A)B(x)+\kappa\nu(A)\|\psi_1x,E_{\alpha,\beta}\|$$
$$(x\in K(A)),$$

поэтому, если на некотором пространстве E функционал B обращается в нуль, то имеет место неравенство

$$\|Ax;E_{\alpha,\beta}\|\le\kappa\nu(A)\|\psi_1x,E_{\alpha,\beta}\|\quad x\in K(A)\cap E. \qquad (16)$$

Этим замечанием можно воспользоваться, например, если

$$E=\{x\in E^m_{\alpha,\beta};x^{(m-1)}(0)=x^{(m-1)}(T)\},\alpha=\beta=0.$$

Подпространство такого типа возникает при рассмотрении периодических краевых задач.

В качестве второго примера рассмотрим подпространство

$$E=\left\{x\in E^m_{\alpha,\beta};x^{(l)}(0)+\sum_{j=0}^{l-1}b_0^jx^{(j)}(0)=\right.$$

$$\left.)=x^{(r)}(T)+\sum_{j=0}^{r-1}b_1^jx^{(j)}(T)=0\right\},$$

где b_l^j – матрицы размера n×n. Подпространство такого типа возникает при рассмотрении краевых условий типа Штурма - Лиувилля, многоточечных краевых условий и др.

Остановимся на усилениях неравенства (12), связанных с заменой нормы h в правой части неравенства полунормой $h_0(x)=$ $=\|\psi_0x;E_{\alpha,\beta}\|$, где ψ_0 – неотрицательная функция из L∞ с носителем $I_+=\{t\in I,\psi_0(t)>0\}$, который может быть множеством неполной меры, то есть $mes_1I_+<T$ (mes_1 – линейная мера Лебега).

Такого рода усиление возможно, если оператор A допускает мультипликативное представление вида A=PQ, где $Qx=q_0x+\ldots+q_{m-1}x^{(m-1)}$, $P\nu=q_{m-1}^{-1}\nu'$, где $q_i(t)$ (i=0,1,…, m-1) – абсолютно непрерывные матрицы-функции на I, $q_{m-1}(t)\ge0$ и $\det q_{m-1}(t)\ne0$ п.в., возможность такого рода хорошо изучена для скалярного случая n=1 при n>1 соответствующий класс операторов заведомо не пуст.

Теорема 2. Пусть функционал $B: E^m_{\alpha,\beta} \to R$ удовлетворяет условиям теоремы 1, дифференциальный оператор A допускает мультипликативное представление указанного вида, функционал h_0 определен равенством $h_0(x) = \|\psi_0 x; E_{\alpha,\beta}\|$ ($x \in E^m_{\alpha,\beta}$), где $\psi_0 \in L_\infty$, $\psi_0(t) \ge 0$ п.в. и для любого t из $\overset{0}{I}$ выполняются неравенства

$$mes_1(I_+ \cap [0,t]) > 0,\ mes_1(I_+ \cap [t,T]) > 0, \quad (17)$$

тогда имеет место неравенство

$$\|x; E^m_{\alpha,\beta}\| \le \kappa_4 B(x) + \kappa_5 h_0(x) \ (x \in K(A)),$$

где κ_4, κ_5 – некоторые постоянные.

Доказательство. Рассмотрим множество

$\aleph(\delta)$={$x \in K(A)$, $\|x, E^m_{\alpha,\beta}\| = 1, \|x, E_{\alpha,\beta}\| \ge \delta$ } (δ>0).

Установим оценку вида μ_0=inf{$h_0(x)$, $x \in \aleph(\delta)$}>0. Предположим противное, то есть что $\mu_0=0$, тогда существует последовательность $\{x_i\} \subset \aleph(\delta)$, для которой $h_0(x_i)<1/i$. Так как $\{x_i\}$ – ограниченная последовательность в $E^m_{\alpha,\beta}$, то в $E^{m-1}_{\alpha,\beta}$ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую для упрощения обозначений отождествим с $\{x_i\}$.

Из сходимости $x_i \to x_0$ в $E^{m-1}_{\alpha,\beta}$ следует, что $x_i^{(k)} \to x_0^{(k)}$ (k=0,1,…,m-1) в пространстве $E_{\alpha,\beta}$ и $\|x_0; E_{\alpha,\beta}\| \ge \delta > 0$. Кроме того, отсюда следуют сходимости по мере и существование такой подпоследовательности (ее мы снова отождествим с $\{x_i\}$), что $x_i^{(k)}(t) \to x_0^{(k)}(t)$ п.в. на I и, следовательно, $\nu_i = Q(x_i) \to \nu_0$ п.в., на I. Обозначим множество, на котором эти сходимости имеют место, I_1 ($mes_1 I_1$=T). Тогда тем более $h_0(x_i) \to h_0(x_0)$, что влечет равенство $h_0(x_0)=0$ и, следовательно, $\psi_0 x_0=0$ п.в. (на I_2, $mes_1 I_2$=T) на I. Таким образом, на $I_2 \cap I_+$ выполняется $x_0=0$.

Докажем, что $\nu_0 = Q(x_0) = 0$ п.в. на $\overset{0}{I}$. Для этого докажем, что $\nu_{0_0}= 0$ п.в. на произвольном отрезке $[t_1, t_2] \subset \overset{0}{I}$. Так как $\nu_0 = Q(x_0)$, $P(\nu_0)=PQ(x_0)$, $q^{-1}_{m-1}\nu_0' = Ax_0$, $\nu_0' = q_{m-1}Ax_0 \ge 0$, то $\nu_0(t)$ – вектор-функция с неубывающими компонентами п.в. на I (на I_3, $mes_1 I_3$=T).

Пусть $[t_1', t_2'] \supset [t_1, t_2]$ и $t_1', t_2' \in I_+ \cap I_1 \cap I_2 \cap I_3$. Такие t_1', t_2' всегда существуют в силу неравенств (17). При этом получаем, что для $t \in I_+ \cap [t_1', t_2']$ выполняется $0 = \nu_0(t_1') \le \ \le \nu_0(t) \le \nu_0(t_2') = 0$. Таким образом, доказано, что $\nu_0(t) = 0$ п.в. на I. Отсюда $Ax_0=P\nu_0=0$. Получаем, что $\|Ax_0; E_{\alpha,\beta}\| + h_0(x_0) = 0$, что влечет из леммы 2 равенство x_0=0. Получаем противоречие с тем, что $\|x_0; E_{\alpha,\beta}\| > 0$. Таким образом доказано, что μ_0>0. Тогда очевидно, что функционал

$$C(x) = \frac{\|x; E_{\alpha,\beta}\| - \delta}{h_0(x)},$$

заданный на $\aleph(\delta)$, ограничен сверху некоторым конечным числом $c(\delta)$. Тогда для $x \in \aleph(\delta)$ выполняется неравенство $\|x; E_{\alpha,\beta}\| \le \delta + c(\delta)h_0(x)$ и, следовательно, для $x \in K(A)$ имеем $\|x; E_{\alpha,\beta}\| \le \delta + \|x; E^m_{\alpha,\beta}\| + c(\delta)h_0(x)$. Из этого неравенства и теоремы 1 следует доказываемое утверждение.

Теорема доказана.

Следствие. Если функционал B обращается в нуль на некотором подпространстве $E \subset E^m_{\alpha,\beta}$, то в условиях теоремы 2 справедливо неравенство $\|x; E^m_{\alpha,\beta}\| \le \kappa_5 h_0(x)$ ($x \in K(A) \cap E$).

Оценки нормы $\|\cdot; E^m_{\alpha,\beta}\|$, гарантируемые теоремами 1, 2 и следствиями из них, носят характер обратных неравенств, поскольку основное их содержание связано с оценкой исходной нормы $\|\cdot; E^m_{\alpha,\beta}\|$ через более слабые нормы (полунормы). Необходимо подчеркнуть, что обратные неравенства относятся лишь к вектор-функциям из конуса K(A) и в определенной мере характеризуют степень узости данного конуса.

Установим нелинейный вариант обратных неравенств. Пусть max{α, β}≥1, k=min{m-α, m-β}, $h \in L_1$,

$$1 < p_i < \frac{m-k+1}{i-k+1}, (i = k,..., m-1), \quad (18)$$

$0<c_0<\infty$, коэффициенты оператора A принадлежат L_1. Обозначим через $\aleph_0$ множество вектор-функций $x: I \to R^n$ из L^m_1, удовлетворяющих п.в. дифференциальному неравенству

$$|Ax| \le c_0\left(1 + \sum_{i=k}^{m-1} |x^{(i)}|^{p_i}\right) + h.$$

Теорема 3. Существует такая неубывающая функция $V: R_+ \to R_+$, что для всех вектор-функций класса $\aleph_0$ справедлива оценка

$$\|x; L^m_1\| \le V(\|x; L^k_1\|).$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \aleph_0$. Фиксируем R_0 так, чтобы $\|x; L^k_1\| \le R_0$. Неравенство (19) влечет соотношение

$$\|Ax; L_1\| \le c_0 T + c_0 \sum_{i=k}^{m-1} \|x^{(i)}; L_1\|^{p_i} +$$

$$+ \|h; L_1\| \le \kappa_6 + c_0 \sum_{i=k}^{m-1} \|x; L^i_{p_i}\|^{p_i}.$$

Теперь воспользуемся неравенствами

$$\|x; L_1^m\| \le \kappa_7\left(\|Ax; L_1\| + \|x; L_1\|\right), \qquad (20)$$

$$\|x; L_{p_i}^i\| \le \kappa(i)\|x; L_1^m\|^{\tau_i}\|x; L_1^k\|^{1-\tau_i}. \qquad (21)$$

Неравенство (20) вытекает из леммы 3. Неравенство (21) следует из мультипликативных неравенств Гальярдо - Ниренберга [6], постоянные κ_7, $\kappa(i)$ не зависят от x из L_1^m, а постоянные τ_i определяются равенством

$$\tau_i = \frac{i-k}{m-k} + \frac{1}{m-k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)(i = k, ..., m\text{ -}1).$$

Тогда

$$\|x; L_1^m\| \le \kappa_7\left(\kappa_6 + c_0\sum_{i=k}^{m-1}\|x, L_{p_i}^i\|^{p_i} + \|x; L_1\|\right) \le$$

$$\le \kappa_8 + \kappa_9\sum_{i=k}^{m-1}\|x, L_{p_i}^i\|^{p_i} \le \kappa_8 + \sum_{i=k}^{m-1}\tilde{\kappa}(i)\|x; L_1^m\|^{p_i\tau_i}\|x; L_1^k\|^{p_i(1-\tau_i)}$$

$$\le \kappa_8 + \kappa_{10}\sum_{i=k}^{m-1}\|x; L_1^m\|^{p_i\tau_i},$$

где κ_{10} не зависит от R_0. Так как $\tau_i p_i<1$, то тогда $\|x; L_1^m\| \le R_1$, причем постоянная R_1 зависит от x и не зависит от $x_0\in \aleph_0$.

Теорема доказана.

Метод доказательства теоремы 3 использовался во многих работах (см., например, [7-9] и приведенную там литературу).

3. В качестве приложения рассмотрим задачу о нахождении решений системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющую краевым условиям

$$B_j(x) = 0,\ (j=1,\dots,m), \qquad (22)$$

где $B_j : E_{\alpha,\beta}^m \to R^n$ – непрерывные операторы ($0\le\alpha$, $\beta\le m$-1). Решениями задачи (1), (22) будем называть вектор-функции x класса $E_{\alpha,\beta}^m$, удовлетворяющие системе (1) и краевым условиям (22).

Краевая задача (1), (22) изучается при ряде ограничений на ее данные. Ниже предполагается, что матричные коэффициенты a_i (i=0,1,…,m-1) оператора A суммируемы по отрезку I; функция $f(t, \xi)$ ($t\in I$, $\xi=(\xi_0, \xi_1,\dots, \xi_{m-1})$; $\xi_i\in R^n$) удовлетворяет условию Каратеодори, то есть $f(t, \xi)$ измерима по t при фиксированном ξ и непрерывна по ξ почти при всех t.

Кроме этих предположений общего характера будут использоваться ограничения более специального вида. Первые два условия У1, У2 относятся к линейному варианту задачи (1), (22), возникающему при $\lambda=0$.

Положим: $\mathrm{Ker}A = \{x \in E_{\alpha,\beta}^m;\ Ax = 0\}$,

$$\overset{0}{E} = \{x \in E_{\alpha,\beta}^m;\ B_j(x) = 0;\ j = 1,2,...,m\}.$$

У1. $\mathrm{Ker}A\cap\overset{0}{E}=\{0\}$ – условие невырожденности.

У2. Существует такая неотрицательная функция ψ из L_∞, что для всех функций $x\in K(A)\cap\overset{0}{E}$ имеет место неравенство

$$\|Ax; E_{\alpha,\beta}\| \le \|\psi x; E_{\alpha.\beta}\|. \qquad (23)$$

Условие У1 влечет существование и единственность решения задачи (1), (22) при $\lambda=0$ и любом y из L_1; соответствующее решение обозначим Ky. Определяемый таким образом оператор K действует и непрерывен из L_1 в L_1^m.

Анализ условия У2 содержится в пункте 2. Оценка (16) очевидным образом влечет неравенство (23) с $\psi=\kappa\nu(A)\psi_1$. Теорема 2 и следствие из нее означают, что возможны случаи, когда функция ψ обращается в нуль на множестве положительной меры.

Условия У3, У4 ограничивают рост функции $f(t, \xi)$ снизу и сверху соответственно.

У3. $f(t,\xi) \ge \psi(t)M_0(|\xi_0|)[\xi_0]$, где $M_0{:}R_+\to R_+$ - положительная непрерывная функция, для которой $M_0(u)\to\infty$ при $u\to\infty$, ψ – функция, фигурирующая в условии У2.

У4. Для каждой константы N существует такая постоянная c(N), что если $\rho_0|\xi_0| + \rho_1|\xi_1| + \ldots + \rho_{m-1}|\xi_{m-1}| < N$, то

$$|f(t, \xi)| \le c(N)\left(1 + \sum_{i=k}^{m-1}|\xi_i|^{p_i}\right),$$

где k=min{m-α, m-β}, числа ρ_i (i=k,…, m-1) удовлетворяют оценкам (18).

Теорема 4. Пусть выполнены условия У1-У4. Тогда для каждой функции $y\in L_1$ найдется такое число $\lambda_0>0$, что при любом $\lambda\in(0;\lambda_0)$ существуют два решения x_λ, X_λ задачи (1), (22), причем $x_\lambda\to x_0=Ky$ в L_1^m; $\|X_\lambda;\ L_1^m\| \to \infty$ при $\lambda\to 0$.

Доказательство. Пусть λ – фиксированное положительное число. Так как функция $M_0{:}R_+\to R_+$ непрерывна и $M_0(u)\to\infty$ при $u\to\infty$, то найдется такой вектор $m_0(\lambda)\in R^n$, что $\lambda M_0(|\xi_0|)[\xi_0] \ge k_n[\xi_0] - m_0(\lambda)$, где $k_n = 2\sqrt{n}$. Согласно условию У3 отсюда следует неравенство $\lambda f(t,\ \xi) \ge \lambda\psi(t)M_0(|\xi_0|)[\xi_0] \ge k_n[\xi_0]\psi(t) - m_0(\lambda)\psi(t)$ и следовательно

$$\lambda f(t,\ \xi) + m_0(\lambda)\psi(t) \ge k_n[\xi_0]\psi(t) \ge 0 \qquad (24)$$

Положим $f_\tau(t,\xi)=(1-\tau)(\lambda f(t,\xi)+y)+$
$+\tau(k_n[\xi_0]\psi(t)+\bar{1})$ $(0\le\tau\le 1)$;

$$F(x)=f\left(\,\cdot\,;x,x',...,x^{(m-1)}\right),$$

$$F_\tau(x)=f_\tau\left(\,\cdot\,;x,x',...,x^{(m-1)}\right).$$

Включим задачу (1), (22) в семейство задач

$$Ax=F_\tau(x),\ x\in\overset{0}{E}\ , \tag{25}$$

зависящих от параметра $\tau\in[0;1]$.

Пусть x – решение задачи (25) при некотором τ,

$$y_1=\tau\left(k_n[x]\psi+\bar{1}\right)+(1-\tau)(\lambda F(x)+m_0(\lambda)\psi),$$

$$y_2=(1-\tau)(y-m_0(\lambda)\psi);\ w_i=Ky_i\ \text{(i=1, 2)},$$

тогда $w_1+w_2=x$.

Очевидна оценка $\left\|w_1;L_1^m\right\|\le R_1$, R_1 не зависит от τ. Функция $w_1=Ky_1$ из E удовлетворяет неравенству $Aw_1=y_1\ge 0$, поэтому согласно условию У2 имеем

$$\left\|Aw_1;E_{\alpha,\beta}\right\|\le\left\|\psi w_1;E_{\alpha,\beta}\right\|.$$

Кроме того, используя элементарные неравенства $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2}\ge\frac{1}{\sqrt{n}}(|\xi_1|+|\xi_2|+$ $+...+|\xi_n|)$, $|\xi_1|+|\xi_2|+...+|\xi_n|\ge\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2}$ и (24), получим

$$\left\|Aw_1;E_{\alpha,\beta}\right\|=\left\|\rho y_1;L_1\right\|\ge\frac{1}{\sqrt{n}}\left\langle\rho y_1,\bar{1}\right\rangle\ge$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{n}}\int_I\tau\rho(t)(k_n|x(t)|\psi(t)+n)dt\ge$$

$$\ge\int_I\left(2\rho(t)|w_1(t)+w_2(t)|\psi(t)+\sqrt{n}\tau\rho(t)\right)dt\ge$$

$$2\left\|\psi w_1;E_{\alpha,\beta}\right\|-2\left\|\psi w_2;E_{\alpha,\beta}\right\|+R_2\ge$$

$$\ge 2\left\|\psi w_1;E_{\alpha,\beta}\right\|-R_3. \tag{27}$$

Используя (26), (27), получим, что $\left\|Aw_1;E_{\alpha,\beta}\right\|\le R_3$, откуда в силу условия У1 вытекает неравенство $\left\|w_1;E_{\alpha,\beta}^m\right\|\le R_4$, где R_4 не зависит от $\tau\in[0;\ 1]$. Используя предложение 2, условие У4 и теорему 3, получим оценку $\left\|w_1;L_1^m\right\|\le R_5$.

Таким образом, $\left\|x;L_1^m\right\|<R=R_1+R_5$, где R не зависит от $\tau\in[0;\ 1]$.

При $\tau=1$ задача (25) не имеет решений. В этом случае y=0, $w_2=Ky_2=0$ и требуемое заключение следует из (26), (27). При произвольном τ множество решений задачи (25) совпадает с множеством особых точек вполне непрерывного в L_1^m векторного поля $\Phi_\tau(x)=x-\lambda KF_\tau(x)$, невырожденного на границе шара $S_R=\left\{x\in L_1^m;\left\|x;L_1^m\right\|<R\right\}$. Отсюда имеем гомотопность на границе ∂S_R шара S_R полей Φ_0, Φ_1. Поскольку гомотопные поля имеют одинаковое вращение ([10], с. 137), то $\gamma(\Phi_0,S_R)=\gamma(\Phi_1;S_R)$. Так как поле Φ_1 не имеет особых точек, то $\gamma(\Phi_0,S_R)=\gamma(\Phi_1;S_R)=0$. Следовательно, вращение поля Φ_0 на сферах больших радиусов пространства ∂S_R равно 0 и $ind(\infty,\Phi_0)=0$. Это равенство справедливо при любом $\lambda>0$.

Фиксируем $R_0>0$ и положим

$$x_0=Ky,\ S(x_0,R_0)=\left\{x\in L_1^m;\left\|x-x_0;L_1^m\right\|<R_0\right\}.$$

Оператор KF ограничен на каждом ограниченном подмножестве пространства L_1^m, поэтому найдется такое число $\lambda_0>0$, что $\lambda_0\left\|KF(x);L_1^m\right\|<R_0$, если $\left\|x-x_0;L_1^m\right\|=R_0$. При любом $\lambda\in(0;\lambda_0)$ векторное поле $\Phi_0(x)=x-x_0-\lambda KF(x)$ не вырождается на границе шара $S(x_0,R_0)$ и $\gamma(\Phi_0,S(x_0,R_0))=1$. Сравнивая это равенство с ранее установленным равенством $ind(\infty,\Phi_0)=0$, получаем, что при любом $\lambda\in(0,\lambda_0)$ выполняется соотношение $\gamma(\Phi_0,S(x_0,R_0))\ne ind(\infty,\Phi_0)$. В силу теоремы об алгебраическом числе особых точек ([10], с. 139) поле Φ_0 имеет хотя бы две особые точки x_λ, X_λ, причем $x_\lambda\in S(x_0,R_0)$, $X_\lambda\notin S(x_0,R_0)$. Отсюда вытекает требуемое заключение о поведении ветвей x_λ, X_λ при $\lambda\to 0$.

Теорема доказана.

Список использованной литературы:

1. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. – 808 с.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. – 455 с.
3. Климов В. С. Одномерные краевые задачи с двумя решениями // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Вып. 3. Ярославль, 1978. - С. 90-111.
4. Климов В. С. О краевых задачах с четным числом решений // Дифференциальные уравнения, 1994, т. 30. С. 630-636.
5. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. - М.: Мир, 1971. – 371 с.
6. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 1959, V. 13, P. 115-162.
7. Клоков Ю. А. Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. Рига, 1963.
8. Похожаев С. И. О нелинейных операторах, имеющих слабо замкнутую область значений, и квазилинейных эллиптических уравнениях // Матем. сб. , 1969, т. 78, № 2. С. 236-258.
9. Похожаев С.И. Об априорных оценках решений квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка // Дифференциальные уравнения, 1983, т. 19, № 1. С. 101-110.
10. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. – 510 с.
11. Избранные главы анализа и высшей алгебры: Учеб. пособие / Фаддеев Д. К., Вулих Б. З. и др. – Л.: Изд. ЛГУ, 1981. – 199 с.