Ахундов А.Я.
НАН Азербайджанской Республики, Институт математики и механики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА В ПРАВОЙ ЧАСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В работе для полулинейного параболического уравнения исследуются вопросы корректности обратной задачи об определении компонента правой части, не зависящего от одной пространственной переменной. Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения.

Примем следующие обозначения: D' – ограниченная область из $R^{n-1}, D = D' \times (a,b) \subset R^n$, a, b – некоторые числа, $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1})$, $x = (x', x_n)$ – произвольные точки областей D' и D соответственно, $Q = D \times (0,T]$, $Q' = D' \times (0,T]$, $S = \partial D \times [0,T]$, $0 < T = \mathrm{const}$.

Рассмотрим задачу об определении $\{f(x',t), u(x,t)\}$ из условий:

$$u_t - \Delta u = f(x't)g(u), \quad (x,t) \in Q \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{D} = D \cup \partial D;$$

$$u(x,t) = \psi(x,t), \quad (x,t) \in S \tag{2}$$

$$\int_a^b u(x', x_n, t)dx_n = h(x',t), \quad (x',t) \in \overline{Q} \tag{3}$$

где $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа, $g(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, $h(\cdot)$ – заданные функции.

Подобные задачи, как правило, некорректны в смысле Адамара и изучались в работах [1-6 и др].

Если в уравнении (1) функция $f(x',t)$ задана, то, естественно, условие (3) не задается. Вопросы разрешимости задачи (1)-(2) в более общей постановке рассмотрены, например, в работах [7-9 и др].

Относительно входных данных сделаем следующие предположения:

$1^0 \cdot g(\cdot) \in Lip_{(loc)}(R^1)$, $|g(\cdot)| \geq m > 0$, m – некоторое число;

$2^0 \cdot \varphi(\cdot) \in C^{2+\alpha}(\overline{D})$, $\psi(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(S)$, $\varphi(x) = \psi(x,0)$, $x \in \partial D$;

$3^0 \cdot h(x',t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}')$,

$4^0 \cdot [\psi_t(x,0) - \Delta\varphi(x)] \cdot \int_a^b g(\varphi(x)dx_n) = [h_t(x',0) - \Delta h(x',0) - \psi_{x_n}(x',b,0) + \psi_{x_n}(x',a,0)] \times g(\varphi(x))$, $x \in \partial D$, $x' \in \partial D'$

(определение пространств $C^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\cdot)$, $k = 0,1,2$, $0 < \alpha < 1$ и соответствующих норм см. [7, с.16])

Определение 1. *Функции* $\{f(x',t), u(x,t)\}$ *назовем решением задачи (1)-(3), если: 1)* $f(x',t) \in C(Q')$; *2)* $u(x,t) \in C^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$; *3) для них удовлетворяются соотношения (1)-(3)*

Пусть $K = \{(f,u) | f(x',t) \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}')$, $u(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $1^0 - 3^0$. *Тогда, если решение задачи (1)-(3) существует и принадлежит множеству К, то оно единственно и верна оценка устойчивости:*

$$\|u - \overline{u}\|_0 + \|f - \overline{f}\|_0 \leq M_1 \big[\|g - \overline{g}\|_0 + \|\varphi - \overline{\varphi}\|_2 + \|\psi - \overline{\psi}\|_{2,1} + \|h - \overline{h}\|_{2,1}\big], \tag{4}$$

где $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{C^k}$, $\{\overline{f}(x',t), \overline{u}(x,t)\}$ *– решение задачи (1)-(3) из множества К с данными* $\overline{g}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, $\overline{h}$, *которые удовлетворяют условиям* $1^0 - 3^0$, *соответственно,* $M_1 > 0$ *зависит от данных задачи и множества К.* Ниже всюду положительные постоянные, которые зависят и от данных задачи и от множеств *К*, будем обозначать через M_i, а которые зависят только от данных задачи-через N_i.

Доказательство. Интегрируя обе части уравнения (1) по переменной x_n в интервале (a, b) с учетом условий теоремы 1, для функции $f(x',t)$ получим:

$$f(x',t) = \big[h_t(x',t) - \Delta h(x',t) - u_{x_n}(x',b,t) + u_{x_n}(x',a,t)\big] / \int_a^b g(u)dx_n, \quad (x',t) \in \overline{Q}', \tag{5}$$

Определим функцию [8, с.87]

$$p(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}'), p(x,0) = \varphi(x), \ x \in \overline{D},$$

$$p(x,t) = \psi(x,t), (x,t) \in S, \tag{6}$$

Пусть

$) - \overline{f}(x',t)$, $\delta_1(u) = g(u) - \overline{g}(u)$,

$$\delta_2(x)=\varphi(x)-\overline{\varphi}(x),\ \delta_3(x,t)=\psi(x,t)-\overline{\psi}(x,t),\ \delta_4(x',t)=$$
$$=h(x',t)-\overline{h}(x',t)\ \delta_5(x,t)=p(x,t)-\overline{p}(x,t).$$

Нетрудно проверить, что функции $\{\lambda(x',t),\upsilon(x,t)=z(x,t)-\delta_5(x,t)\}$ удовлетворяют системе:

$$\upsilon_t-\Delta\upsilon=\lambda(x',t)g(u)+F(x,t),\ (x,t)\in Q, \tag{7}$$

$$\upsilon(x,0),x\in\overline{D};\ \upsilon(x,t)=0,\ (x,t)\in S, \tag{8}$$

$$\lambda(x't)=\Big[\delta_{4t}(x',t)-\Delta\delta_4(x',t)-z_{x_n}(x',b,t)+$$
$$+z_{x_n}(x',a,t)\Big]/\int_a^b g(u)dx_n+H(x',t),\ (x',t)\in\overline{Q}', \tag{9}$$

где $F(x,t)=\overline{f}(x',t)\ [g(u)-g(\overline{u})]-\delta_{5t}(x,t)+\Delta\delta_5(x,t)$,

$$H(x',t)=\Big\{\big[\overline{h}_t(x',t)-\Delta\overline{h}(x',t)-\overline{u}_{x_n}(x',b,t)+$$
$$+\overline{u}_{x_n}(x',a,t)\big]\int_a^b[g(\overline{u})-g(u)]dx_n\Big\}/\Big[\int_a^b g(u)dx_n\int_a^b g(\overline{u})dx_n\Big]$$

При условиях теоремы следует, что коэффициенты и правая часть уравнения (7) удовлетворяют условию Гельдера. Значит, существует классическое решение задачи (7), (8) и оно может быть представлено в виде [7, с. 468]:

$$\upsilon(x,t)=\int_0^t\int_D G(x,t;\xi,\tau)$$
$$[\lambda(\xi',\tau)g(u)+F(\xi,\tau)]\ d\xi d\tau \tag{10}$$

где $\xi'=(\xi_1,...,\xi_{n-1}),\ \xi=(\xi',\xi_n),\ d\xi=d\xi_1...d\xi_n,G(\cdot)$ – функция Грина задачи (7), (8), для которой верны следующие оценки [7, гл. IV]:

$$|G(x,t;\xi,\tau)|\le N_1(t-\tau)^{-n/2}\exp\left(-N_2|x-\xi|^2/(t-\tau)\right),$$
$$\int_\Omega\left|D_x^kG(x,t;\xi,\tau)\right|d\xi\le N_3(t-\tau)^{-(k-\alpha)/2},\ k=0,1,2, \tag{11}$$

здесь D_x^k – всевозможные производные по $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ порядка *k*.

Учитывая, что $\upsilon(x,t)=z(x,t)-\delta_5(x,t)$, из (10) получим:

$$z(x,t)=\delta_5(x,t)+\int_0^t\int_D G(x,t;\xi,\tau)[\lambda(\xi',\tau)g(u)+$$
$$+F(\xi,\tau)]d\xi d\tau \tag{12}$$

Положим $\chi\equiv\|u-\overline{u}\|_0+\|f-\overline{f}\|_0$

При условиях теоремы и из определения множества *K*, с учетом оценок (11), из (12) и (9) получим:

$$|z(x,t)|\le M_2\left[\|\delta_1\|_0+\|\delta_5\|_{2,1}\right]+M_3\chi t,\ (x,t)\in\overline{Q} \tag{13}$$

$$|\lambda(x',t)|\le M_4\left[\|\delta_1\|_0+\|\delta_4\|_{2,1}+\|\delta_5\|_{2,1}\right]+$$
$$+M_5\chi\ t^{(1+\alpha)/2},\ (x',t)\in\overline{Q}' \tag{14}$$

Неравенства (13), (14) удовлетворяются при любых значениях $(x,t)\in\overline{Q}$. Поэтому они должны удовлетворяться также для максимальных значении левых частей. Следовательно,

$$\chi\le M_6\left[\|\delta_1\|_0+\|\delta_4\|_{2,1}+\|\delta_5\|_{2,1}\right]+M_7\chi\ t^{(1+\alpha)/2} \tag{15}$$

Пусть $T_1(0<T_1\le T)$ – такое число, что $M_7T_1^{(1+\alpha)/2}<1$. Тогда из (15) получим, что при $(x,t)\in\overline{D}\times[0,T_1]$ верна оценка устойчивости (4) для решения задачи (1)-(3).

Рассматривая задачу (1)-(3) последовательно в цилиндрах $\overline{D}\times[T_1,2T_1],\overline{D}\times[2T_1,3T_1]$ и т.д., за конечное число шагов получим оценку устойчивости (4) во всем $\overline{D}\times[0,T]$.

Единственность решения задачи (1)-(3) следует из оценки (4) при

$$g(u)=\overline{g}(u),\ \varphi(x)=\overline{\varphi}(x),\ \psi(x,t)=\overline{\psi}(x,t),$$
$$h(x,t)=\overline{h}(x',t)$$

Существование решения задачи (1)-(3), в смысле определения 1, доказывается методом последовательных приближений. Для нахождения $\{f^{(s)}(x',t),u^{(s)}(x,t)\},\ s=1,2,...$ используется следующий алгоритм:

$$u_t^{(s+1)}-\Delta u^{(s+1)}=f^{(s)}(x',t)g(u^{(s)}),\quad (x,t)\in Q \tag{16}$$

$$u^{(s+1)}(x,0)=\varphi(x),x\in\overline{D};\ u^{(s+1)}(x,t)=\psi(x,t)\quad (x,t)\in S \tag{17}$$

$$f^{(s+1)}(x',t)=\Big[h_t(x',t)-\Delta h(x',t)-u_{x_n}^{(s+1)}(x',b,t)+$$
$$+u_{x_n}^{(s+1)}(x',a,t)\Big]/\int_a^b g(u^{(s+1)})dx_n,\ (x',t)\in\overline{D}' \tag{18}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1^0-4^0 *и* $\partial D\in C^{2+\alpha}$. *Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение при* $(x,t)\in D\times[0,T]$.

Доказательство. Сперва докажем существование решения задачи (1)-(3) из класса $f(x',t)\in C(\overline{Q}'),\ u(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q})$.

Нетрудно проверить, что если выбрать $u^{(0)}(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}),\ f^{(0)}(x',t)\in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}')$, то при условиях теоремы 2, $u^{(1)}(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$ [7,с. 364]. Тогда из (18), при условиях теоремы 2, следует, что $f^{(1)}(x',t)\in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}')$. Следовательно, можно утверждать, что функции $f^{(s)}(x',t)$ и $u^{(s)}(x,t)$, полученные из системы (16)-(18) при $s=0,1,2,...$, принадлежат функциональным пространствам $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}')$ и $C^{2+\alpha,\ 1+\alpha/2}(\overline{Q})$ соответственно. Покажем равномерную ограниченность последовательностей $\{f^{(s)}(x',t)\}$, $\{D_x^ku^{(s)}(x,t)\},\ k=0,1,2.$

Используя функцию $p(x,t)$, определенную в (6), и представления решения через функции Грина [7, с. 468], найдем выражение для решения задачи об определении $u^{(s+1)}(x,t)$ из условий (16), (17)

$$u^{(s+1)}(x,t)=p(x,t)+\int_0^t\int_D G(x,t,\xi,\tau)\left[f^{(s)}(\xi',\tau)g\left(u^{(s)}\right)+\right.$$

$$\left.+\Delta p-p_\tau\right]\,d\xi d\tau \qquad (19)$$

Поступая таким же образом, как и при доказательстве теоремы 1, с учетом оценок (11) и условий теоремы 2, из (18) и (19) получим:

$$\left|D_x^k u^{(s+1)}(x,t)\right|\le N_4\|p\|_{2,1}+N_5 t^{(2+\alpha-k)/2}\cdot\left|f^{(s)}(x',t)\right|,$$

$$k=0,1,2,\quad (x,t)\in\overline{Q},$$

$$\left|f^{(s+1)}(x',t)\right|\le N_6\|h\|_{2,1}+N_7 t^{\alpha/2}\sum_{k=0}^{2}\left|D_x^k u^{(s+1)}(x,t)\right|,\quad (x,t)\in\overline{Q}',$$

или $\gamma^{(s+1)}\le N_8\left[\|h\|_{2,1}+\|p\|_{2,1}\right]+N_9 t^{\alpha/2}\gamma^{(s)}$

где $\gamma^{(s)}\equiv\sum_{k=0}^{2}\left\|D_x^k u^{(s)}\right\|_0+\left\|f^{(s)}\right\|_0$

Из последнего неравенства имеем:

$$\gamma^{(s+1)}\le N_8\left[\|h\|_{2,1}+\|p\|_{2,1}\right]\left(1-q^s\right)/(1-q)+q^s\gamma^{(0)},\ \ q=N_9 t^{\alpha/2}$$

Пусть $T_2\ (0<T_2\le T)$ такое число, что $N_9T_2^{\alpha/2}<1$. Тогда получим, что последовательности $\left\{f^{(s)}\right\}$, $\left\{D_x^k u^{(s)}\right\}$, $k=0,1,2,\ldots$ равномерно (по норме C) ограничены при $(x,t)\in\overline{D}\times[0,T_2]$.

Таким же образом, как было указано при доказательстве теоремы 1, доказывается равномерная ограниченность последовательностей $\left\{f^{(s)}\right\}$, $\left\{D_x^k u^{(s)}\right\}$, $k=0,1,2$ при всех $t\in[0,T]$

Равностепенная непрерывность последовательностей $\left\{D_x^k u^{(s)}\right\}$, $k=0,1,2$ следует из неравенства

$$\left|D_x^k u^{(s+1)}(x,t)-D_x^k u^{(s+1)}(\bar x,\bar t)\right|\le\left|D_x^k u^{(s+1)}(x,t)-\right.$$

$$\left.-D_x^k u^{(s+1)}(\bar x,t)\right|+\left|D_x^k u^{(s+1)}(\bar x,t)-\right.$$

$$\left.-D_x^k u^{(s+1)}(\bar x,\bar t)\right|\le\left|D_x^k p(x,t)-D_x^k p(\bar x,t)\right|+\left|D_x^k p(\bar x,t)-\right.$$

$$\left.-D_x^k p(\bar x,\bar t)\right|+\int_0^t\int_D\left|D_x^k G(x,t;\xi,\tau)-\right.$$

$$\left.-D_x^k G(\bar x,t;\xi,\tau)\right|\cdot\left|F^{(s)}(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau+\int_0^{\bar t}\int_D\left|D_x^k G(\bar x,t;\xi,\tau)-\right.$$

$$\left.-D_x^k G(\bar x,\bar t;\xi,\tau)\right|\left|F^{(s)}(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau+$$

$$+\int_{\bar t}^{t}\int_D\left|D_x^k G(\bar x,t;\xi,\tau)\right|\left|F^{(s)}(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau$$

(здесь $F^{(s)}(x,t)=f^{(s)}(x',t)g\left(u^{(s)}\right)+\Delta p-p_t$), с учетом равномерной ограниченности $\left\{f^{(s)}(x,t)\right\}$, непрерывности и ограниченности входных данных, оценок (11) и следующих [7, с. 469]

$$\left|D_x^k G(x,t;\xi,\tau)-D_{\bar x}^k G(\bar x,t;\xi,\tau)\right|\le N_{10}|x-\bar x|^{\alpha}(t-\tau)^{-(n+2+\alpha)/2}\times$$

$$\times\exp\left(-N_{11}|x-\xi|^2/(t-\tau)\right);$$

$$\left|D_x^k G(x,t;\xi,\tau)-D_x^k G(x,\bar t;\xi,\tau)\right|\le N_{12}|t-\bar t|^{(2+\alpha-k)/2}(\bar t-\tau)^{-(n+2+\alpha)/2}\times$$

$$\times\exp\left(-N_{13}|x-\xi|^2/(t-\tau)\right)$$

Равностепенная непрерывность последовательности $\left\{f^{(s)}(x',t)\right\}$ следует из неравенства:

$$\left|f^{(s)}(x',t)-f^{(s)}(\bar x',\bar t)\right|\le\left|f^{(s)}(x',t)-f^{(s)}(\bar x',t)\right|+$$

$$+\left|f^{(s)}(\bar x',t)-f^{(s)}(\bar x',\bar t)\right|\le$$

$$\le\left[\left|h_t(x',t)-h_t(\bar x',t)\right|+\left|\Delta h(x',t)-\Delta h(\bar x',t)\right|+\right.$$

$$+\left|u_{x_n}^{(s+1)}(x',b,t)-u_{x_n}^{(s+1)}(\bar x',b,t)\right|+$$

$$\left.+\left|u_{x_n}^{(s+1)}(x',a,t)-u_{x_n}^{(s+1)}(\bar x',a,t)\right|\right]/\left|\int_a^b g\left(u^{(s+1)}(x',x_n,t)\right)dx_n\right|+$$

$$+\left\{\left[h_t(\bar x',t)-\Delta h(\bar x',t)-\right.\right.$$

$$\left.-u_{x_n}^{(s+1)}(\bar x',a,t)+u_{x_n}^{(s+1)}(\bar x',a,t)\right]\left|\int_a^b\left[g\left(u^{(s+1)}(x',x_n,t)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-g\left(u^{(s+1)}(\bar x',x_n,t)\right)\right]dx_n\right|\right\}/$$

$$/\int_a^b g\left(u^{(s+1)}(x',x_n,t)\right)dx_n\int_a^b g\left(u^{(s+1)}(\bar x',x_n,t)\right)dx_n\Bigg|+\left[\left|h_t(\bar x',t)-\right.\right.$$

$$\left.-h_t(\bar x',\bar t)\right|+\left|\Delta h(\bar x',t)-\Delta h(\bar x',\bar t)\right|+$$

$$+\left|u_{x_n}^{(s+1)}(\bar x',b,t)-u_{x_n}^{(s+1)}(\bar x',b,\bar t)\right|+\left|u_{x_n}^{(s+1)}(\bar x',a,t)-\right.$$

$$\left.\left.-u_{x_n}^{(s+1)}(\bar x',a,\bar t)\right|\right]/\left|\int_a^b g\left(u^{(s+1)}(\bar x',x_n,t)\right)dx_n\right|+$$

$$+\left\{\left[h_t(\bar x',\bar t)-\Delta h(\bar x',\bar t)-u_{x_n}^{(s+1)}(\bar x',b,\bar t)+\right.\right.$$

$$\left.+u_{x_n}^{(s+1)}(\bar x',a,\bar t)\right]\left|\int_a^b\left[g\left(u^{(s+1)}(\bar x',x_n,t)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-g\left(u^{(s+1)}(\bar x',x_n,\bar t)\right)\right]dx_n\right|\right\}/\left|\int_a^b g\left(u^{(s+1)}(\bar x',x_n,t)\right)dx_n\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_a^b g\left(u^{(s+1)}(\bar x',x_n,\bar t)\right)dx_n\right|$$

с учетом равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности последовательностей $\left\{D_x^k u^{(s)}\right\}$, $k=0,1,2$, непрерывности и ограниченности входных данных.

Равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность последовательности $\left\{u_t^{(s)}\right\}$ следует из (16).

По теореме Арцела [8, с/ 84] из последовательностей $\left\{u_t^{(s)}\right\}$, $\left\{D_x^k u^{(s)}\right\}$, $k=0,1,2$, $\left\{f^{(s)}\right\}$ можно выбрать подпоследовательности, сходящиеся к некоторым функциям $\left\{u_t^*\right\}$, $\left\{D_x^k u^*\right\}$, $k=0,1,2$, $\left\{f^*\right\}$ соответственно и $u^*(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q})$, $f^*(x',t)\in C(\overline{Q}')$.

Тогда переходя к пределу при $s\to\infty$ в соотношениях (16)-(18), нетрудно показать, что функции $\{f^*(x',t), u^*(x,t)\}$ удовлетворяют условиям (1)-(3).

Таким образом, доказано существование решения задачи (1)-(3) из класса $f(x,t) \in C(\overline{Q}'), u(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q})$. Можно утверждать, что такое решение принадлежит множеству *K*. Действительно, из условия $1^0, 3^0$ и соотношения (5) следует, что $f(x,t) \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}')$. Тогда, при условиях теоремы 2, $u(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$ [7, с. 364]. Таким образом выполняются условия теоремы 1, и, следовательно, решение задачи (1)-(3) единственно.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Аналогично задаче (1)-(3) рассмотрена задача об определении $\{f_k(x',t), u_k(x,t), k=1,\overline{m}\}$ из следующей системы параболических уравнений:

$$u_{k_t} - \Delta u_k = f_k(x',t) \cdot g_k(u_1,\dots,u_m), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u_k(x,0) = \varphi_k(x), x \in \overline{D}, u_k(x,t) = \psi_k(x,t) \; (x,t) \in S$$

$$\int_a^b u_k(x',x_n,t)dx_n = h_k(x',t), \quad (x',t) \in \overline{Q}'$$

Для этой задачи также имеют место аналоги вышедоказанных теорем.

Список использованной литературы:

1. Искендеров А.Д. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ. техн. и мат. наук, 1976, №2, с. 58-63.
2. Исаков В.М. ДАН СССР, 1982, т. 263, №6, с. 1296-1299.
3. Прилепко А.И., Костин А.Б. Матем. сб. 1992, т. 183, №4, с. 49-68.
4. Саватеев Е.Г. ДАН, 1995, т. 344, №5, с. 597-598.
5. Соловьев В.В. Диф. уравнения. 1996, т. 32, №4, с. 536-544.
6. Akhundov A.Ya. Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, 2002, v. XVII. p. 3-9.
7. Ладыженская О.А., Солоников В.А., Уральцева Н.И. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
8. Фридман А.Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
9. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., 1985.

Статья рекомендована к публикации 28.12.07