Реннер А.Г., Ерофеев А.В.
Оренбургский государственный университет

АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ В КОЛЛЕКТИВНЫХ МОДЕЛЯХ РИСКА

Вычисление вероятности неразорения страховой компании зачастую требует от исследователя знание закона распределения размера выплат страховой компании клиентам. В статье предлагается подход к построению вероятности неразорения при определенных условиях, инвариантный относительно распределения размера выплат компании.

Страховой рынок РФ демонстрирует не только высокие темпы развития, но и увеличение конкуренции среди страховых компаний. Одним из средств конкурентной борьбы является корректное формирование страхового тарифа на основе более совершенных методов оценки риска функционирования страховой компании. Таким образом, задача оценки риска страховой компании является актуальной. В качестве меры риска в страховании зачастую используется вероятность неразорения компании. Одной из моделей оценки вероятности неразорения является модель коллективного риска Крамера-Лундберга. Построенная в предположении пуассоновского характера процесса поступления исков, она имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda\psi(u) = c\psi'(u) + \lambda\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx \\ \psi(\infty) = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

где $\psi(u)$ – функция вероятности неразорения страховой компании, имеющей капитал u, $\psi(u) = P\{Y_t \geq 0, Y_0 = u, t \geq 0\}$;

$Y_t = u + c \cdot t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ – капитал страховой компании в момент времени t;

c– интенсивность поступления страховых премий;

$\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин размера выплат страховой компании клиентам с математическим ожиданием μ и плотностью распределения f(x);

N(t)– пуассоновский процесс числа выплат за временной промежуток $[0, t)$;

λ – параметр пуассоновского процесса поступления исков.

Получить явное аналитическое выражение вероятности неразорения удается только для некоторых частных случаев, к примеру, если выплаты по искам имеют экспоненциальное распределение. Для других типов распределений существуют различного рода оценки, полученные при определенных ограничениях. Так, широко известная аппроксимация Крамера-Лундберга не существует для распределений Парето и лог-нормального [1].

Реализуемый в данной работе подход к решению задачи (1) основан на использовании преобразования Лапласа, при этом плотность распределения размера выплат компании по искам нами предложено брать из класса функций, представимых в виде обобщенного ряда Фурье по системе ортогональных функций, имеющих явное преобразование Лапласа [2,3]. При этом плотность распределения аппроксимируется отрезком $S_n(x)$ обобщенного ряда Фурье на промежутке $[0, h^*]$, а за пределами этого промежутка полагаем f(x) равной нулю и, стало быть, $S_n(x)=0$.

Таким образом, задача (1) преобразуется в задачу:

$$\begin{cases} \lambda\psi^*(u) = c\psi'^*(u) + \lambda\int_0^u \psi^*(u-x)S_n(x)dx \\ \psi^*(u) = 1, u \geq h^* \end{cases}, \qquad (2)$$

где $\psi^*(u)$ – вероятность неразорения компании при замене f(x) на $S_n(x)$.

Плотность распределения размера выплат страховой компании клиентам аппроксимируем с помощью системы ортогональных полиномов Лежандра на промежутке (0,120], поскольку выплата по одному иску по договору ОСАГО не превышает величины 120 тыс. рублей.

На основе выборочных данных о полисах ОСАГО объемом 417 наблюдений о значении размера выплат находим по методике [4] оценку $S_n(x)$:

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i^* L_i\left(\frac{2x - h^*}{h^*}\right) \qquad (3)$$

где β_i^* – оценка коэффициентов Фурье β_i: $\beta_i = \int_0^{h^*} f(x) L_i(x) \mu(x) dx$;

$L_i(x)$ – ортогональные на промежутке [-1; 1] многочлены Лежандра;

$\mu(x)$ – весовая функция, для многочленов Лежандра на промежутке [-1; 1] $\mu(x)=1$.

Длину отрезка обобщенного ряда Фурье n полагаем равной 10 на основании численных экспериментов для различных распределений, в том числе с «тяжелыми» хвостами, по имитированным выборкам аналогичного объема.

На рисунке 1 представлен полигон распределения и функция, аппроксимирующая плотность распределения размера выплат.

Статистический анализ данных о потоке исков подтвердил пуассоновский характер распределения поступающих исков с параметром λ=5,65 исков в декаду. Интенсивность поступления премий с оценим как среднюю арифметическую величину объема страховых премий, поступивших в декаду. Оценка интенсивности поступления премий составила c=193,092 тыс. руб. в декаду. С учетом того, что регистрируется поступившая брутто-премия, а по правилам ОСАГО нетто-премия составляет 77%, скорость поступления нетто-премий составит 148,681 тыс. руб..

Применяя преобразование Лапласа к задаче (2), получим изображение $G(p)$ в виде:

$$G(p) = \frac{c\psi^*(0)}{cp - \lambda + \lambda\varphi^*(p)}, \qquad (4)$$

где $\varphi^*(p)$ – изображение функции $S_n(x)$.

Учитывая, что изображение функции $G(p)$ представляет собой дробную рациональную функцию и знаменатель выражения (4) имеет простые корни, получим оригинал $\psi^*(u)$ в виде:

$$\psi^*(u) = \\ = \sum_{j=1}^{N+2} \frac{c\psi^*(0)(p_j)^{N+1}}{c(N+2)(p_j)^{N+1} - \lambda\cdot(N+1)\cdot(p_j)^N + \lambda\cdot\sum_{k=0}^{N-1}(N-k)\cdot(p_j)^{N-k-1}\sum_{i=k}^{N}\frac{i!}{(i-k)!}\cdot\frac{\beta_i^*\cdot(-b)^{i-k}}{a^i}} \cdot e^{p_j u} \qquad (5)$$

В итоге аппроксимация вероятности неразорения $\psi^*(u)$ имеет вид (рисунок 2).

На основе построенной функции выживания, график которой представлен на рисунке 2, можно по заданному уровню надежности (вероятности неразорения) определить необходимый для этого собственный капитал. Например, для достижения вероятности неразорения 0,95 компании необходим собственный капитал в размере 89 тыс. рублей.

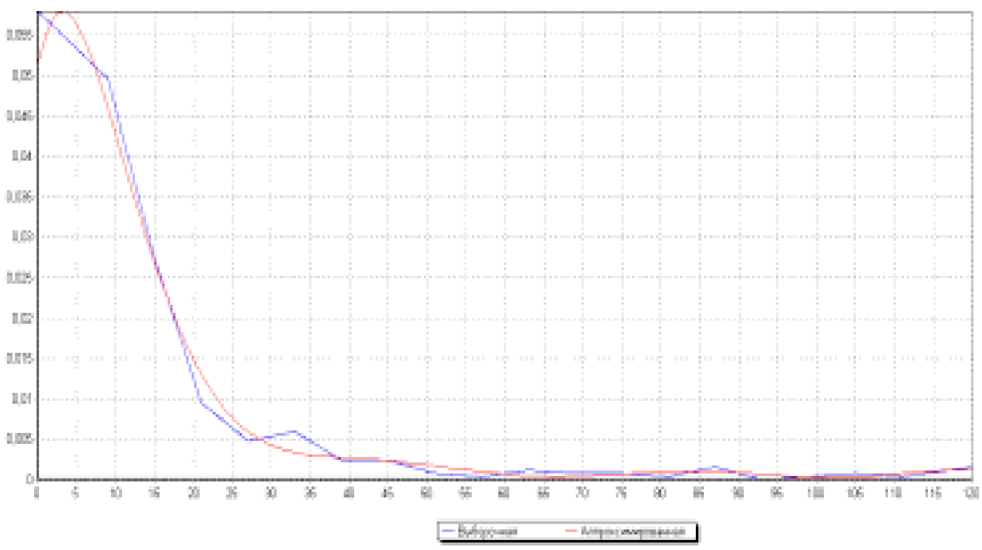

Рисунок 1. Полигон распределения и функция, аппроксимирующая плотность распределения размера выплат при $n = 10$

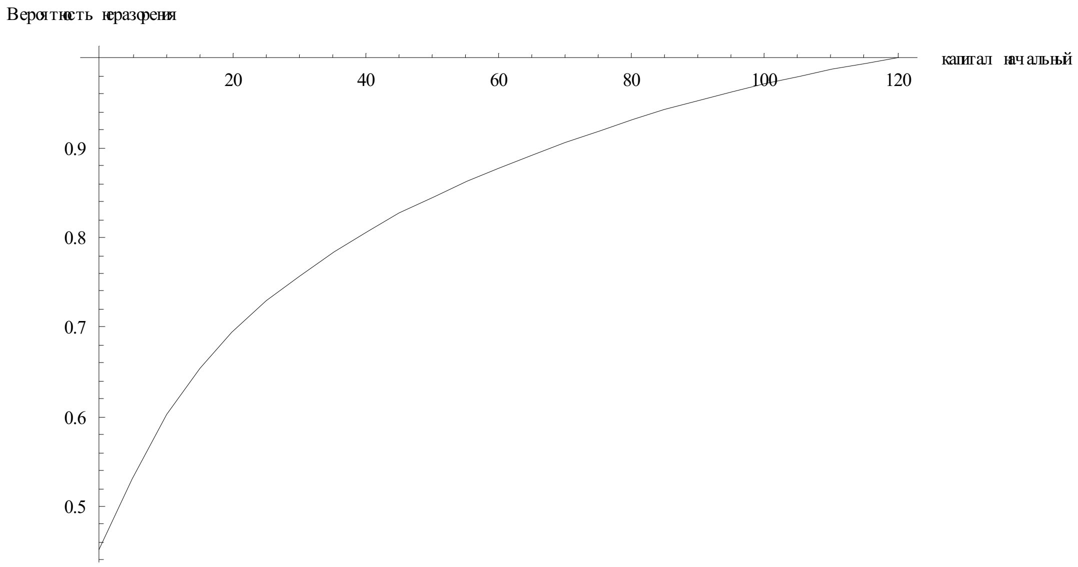

Рисунок 2. Аппроксимация вероятности неразорения

Относительная рисковая надбавка ищется из соотношения:

$$\theta = \frac{c - l \cdot m}{l \cdot m},$$

где c – оценка скорости поступления премий;

l – оценка параметра λ пуассоновского потока поступления исков;

m – оценка математического ожидания выплат по искам клиентов.

Для вероятности неразорения 0,95 относительная рисковая надбавка составит 75,3%, что является весьма высоким значением для рискового страхования.

Интерес представляет оценка зависимости относительной рисковой надбавки от величины необходимого капитала компании, обеспечивающего заданную вероятность неразорения. Таблица значений такой функции представлена ниже.

График интерполяционного сплайна первого порядка, аппроксимирующего функцию зависимости относительной рисковой надбавки от начального капитала, имеет вид:

Знание зависимости относительной рисковой надбавки от необходимого начального капитала позволит компании либо более оперативно реагировать на изменение рыночной конъюнктуры путем изменения величины тарифа; либо, при сохранении величины тарифа, высвободить свободные средства для целей инвестирования или увеличения капитала.

Если страховая компания является активным участниками фондового рынка, то представляет интерес исследование моделей коллективного риска с возможностью инвестирования.

Например, в случае, если страховая компания размещает свой капитал на банковском счете с процентной ставкой $r \geq 0$, то модель коллективного риска имеет вид[5]:

$$\begin{cases} \psi(u) \cdot \lambda = \psi'(u)(r \cdot u + c) + \lambda \int_0^u \psi(u - x) dF(x) \\ \psi(\infty) = 1 \\ \psi(0)\lambda = c\psi'(0) \end{cases} \tag{6}$$

Таблица 1. Зависимость относительной рисковой надбавки от необходимого начального капитала для вероятности неразорения 0,95

Необходимый начальный капитал u, тыс. руб.	Относительная рисковая надбавка θ, %
88,2	76,8
92	65,0
96	53,3
100	41,5
104,1	29,7
108	17,9
111,4	6,1

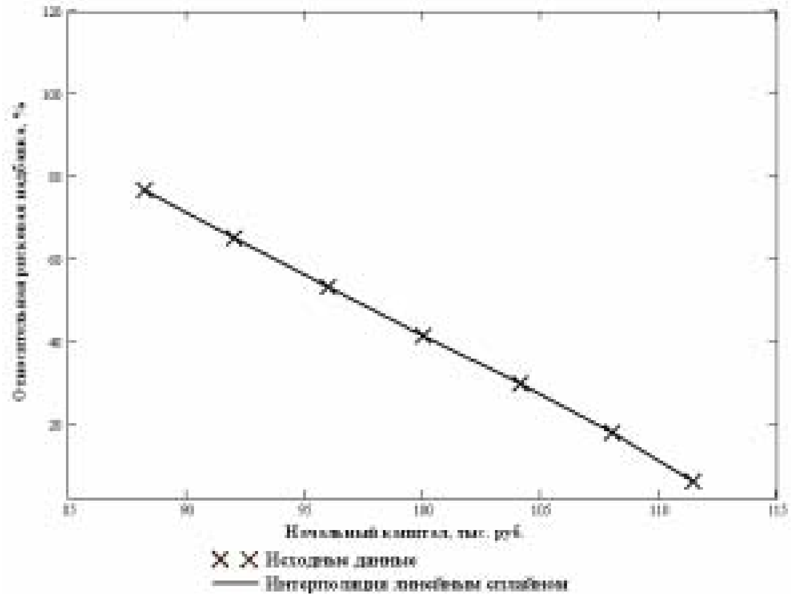

Рисунок 3. Результаты интерполяции

Если капитал компании инвестируется в акции, цены которых управляются стохастическим уравнением в соответствии с моделью Блэка и Шоулса:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$

где S_t – цена акции в момент времени t;

μ и σ – параметры «сноса» и волатильности цены акции;

W_t – стандартный винеровский процесс;

то модель будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2}u^2\psi''(u)+(\mu\cdot u+c)\psi'(u)-\lambda\psi(u)+\lambda\int_0^u\psi(u-x)dF(x)=0 \\ \psi(\infty)=1 \\ \psi(0)\lambda=c\psi'(0) \end{cases} \quad (7)$$

Очевидно, что модели коллективного риска (6) и (7) также допускают применение предлагаемого подхода к оценке вероятности неразорения.

Список использованной литературы:

1. Pavel Cizek, Wolfgang Hardle, Rafal Weron Statistical Tools for Finance and Insurance. – Berlin u.a.: Springer, 2005.
2. Реннер А.Г. Оценка платежеспособности страховой компании Вестник ОГУ №1/Январь 2006, Том 1. Гуманитарные науки
3. Реннер А.Г., Ерофеев А.В. О методике оценки надежности страховой компании II Российская научно-практическая конференция «Совершенствование подготовки экономистов-аналитиков по направлению «Статистика» на основе инновационных технологий»: Сборник научных статей и тезисов научно-методической конференции / Московский Государственный университет экономики, статистики и информатики. – М., 2006. – 120с.
4. Прохоров С.А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп./Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2001. 380 с., ил.
5. Мельников А.В. Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.– 260с.

Статья поступила в редакцию 24.07.07