Лисицкая Е.Л., Резник А.Е.
Саратовский государственный социально-экономический университет

ПРИНЯТИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО РЕШЕНИЯ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ ЭФФЕКТИВНОСТИ И РИСКА

Рассматривается методика принятия инвестиционного решения, исходя из прогноза эффективности вложений и риска ее изменения. Используется статистический метод анализа и прогнозирования доходности активов и стоимости привлечения пассивов.

Принятие инвестиционного решения – чрезвычайно ответственный процесс, он требует всестороннего учета множества факторов, которые могут повлиять на результаты инвестирования. Неудачное решение чревато очень серьезными последствиями для инвестора. Поэтому при принятии инвестиционного решения инвестор в обязательном порядке должен оценить результативность своей предыдущей инвестиционной деятельности, финансовое состояние предприятий – кандидатов на инвестирование, объем возможных инвестиций и общее состояние финансового рынка. Причем желательно для принятия решений использовать только общедоступную информацию, например обязательную бухгалтерскую отчетность предприятий, биржевую информацию и пр. В результате исследований авторы пришли к выводу, что процесс принятия инвестиционного решения условно можно разделить на четыре этапа.

Первый этап. Прогнозируется эффективность инвестиционных вложений на следующий инвестиционный период и риск ее изменения. Эффективность имеющихся активов может быть оценена их ожидаемой доходностью, а риск изменения доходности активов – ожидаемой дисперсией доходности. Соответственно эффективность пассивов может быть оценена стоимостью их привлечения и дисперсией этой стоимости. Интегральными оценками ожидаемой эффективности инвестиций могут являться прогнозируемая норма прибыли и дисперсия изменения этой нормы.

Второй этап. Оценивается финансовая устойчивость предприятий - кандидатов на инвестирование на следующий инвестиционный период. Для этого прогнозируется вероятность дефолта предприятия-кандидата за следующий инвестиционный период. Эта задача может решаться на основе модели Р. Мертона и результатов Блека - Шоулза по опционам колл и пут.

Третий этап. Определяется лимит кредитования, исходя из финансового состояния предприятия - кандидата на инвестирование, с целью обеспечения определенного минимума вероятности дефолта за следующий период инвестирования.

Четвертый этап. Формируется оптимальный портфель инвестиций с использованием теории оптимального портфеля Марковица, исходя из прогноза доходности финансовых инструментов портфеля на следующий инвестиционный период и риска изменения доходности, определяемого ее дисперсией.

Укрупненную схему принятия инвестиционного решения можно представить в виде, изображенном на рисунке.

Рассмотрим подробно каждый из этапов принятия решения.

Первый этап. Применим статистический подход к построению модели доходности i-го актива. При этом, следуя Марковицу [6], будем считать, что риск изменения доходности характеризуется ее дисперсией. Детерминированная составляющая доходности может изменяться по достаточно сложным законам, но при анализе относительно небольших временных интервалов ее можно считать изменяющейся по линейному закону [2]:

$$X_{it} = X_{i0} + \alpha_i t, \qquad (1)$$

где X_{it} – значение доходности i-го актива в момент времени t; X_{t0} – начальное значение доходности i-го актива; α_i – коэффициент линейного изменения доходности i-го актива во времени.

Будем считать, что параметры X_{t0}, α_i за моменты времени $t_1, t_2, ..., t_i, ..., t_k$ известны. Однако распределение этих значений во времени представляет собой случайный процесс. Среднее значение изменения доходности i-го актива во времени можно выразить зависимостью [2]:

$$\overline{X_{it}} = \overline{X_{i0}} + \overline{\alpha_i}\, t, \qquad (2)$$

где $\overline{X_{it}}$ – математическое ожидание значения доходности i-го актива в момент времени t; $\overline{X_{i0}}$ – математическое ожидание начального значения доходности i-го актива; $\overline{\alpha}_i$ – математическое ожидание линейного изменения доходности i-го актива во времени.

Используя метод наименьших квадратов (МНК), можно рассчитать значение коэффициентов модели (2):

$$\overline{\alpha}_i = \frac{k\sum_{i=1}^{k} X_i t_i - (\sum_{i=1}^{k} X_i)(\sum_{i=1}^{k} t_i)}{k\sum_{i=1}^{k} t_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} t_i)^2};$$

$$\overline{X_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i - \sum_{i=1}^{k} t_i \overline{\alpha}_i}{k}. \qquad (3)$$

Используя математическую модель (2) изменения доходности, можно прогнозировать доходность и риск изменения доходности i-го актива предприятия-инвестора. Для этого необходимо определить дисперсию i-го актива в момент времени t, которая может быть вычислена по известной формуле:

$$D(X_{it}) = M(X_{it} - \overline{X_{it}})^2 =$$
$$= D(X_{i0}) + 2t\, r\sqrt{D(X_{i0})\, D(\alpha_i)} +$$
$$+ t^2 D(\alpha_i), \qquad (4)$$

где $D(X_{i0})$, $D(\alpha_i)$ – соответственно дисперсии X_{i0} и α; а r – коэффициент корреляции этих величин.

Из выражения (4) следует, что в случае использования линейной модели изменения доходности (2) дисперсия доходности изменяется по параболическому закону:

$$D_t = D_0 + t\,R + t^2 D_\alpha, \qquad (5)$$

где

$$D_t = D(X_{it}),\; D_0 = D(X_{i0}),$$
$$R = 2\,r\sqrt{D(X_{i0})\, D(\alpha_i)},$$
$$D_\alpha = D(\alpha_i)$$

Используя МНК, определим коэффициенты уравнения (4):

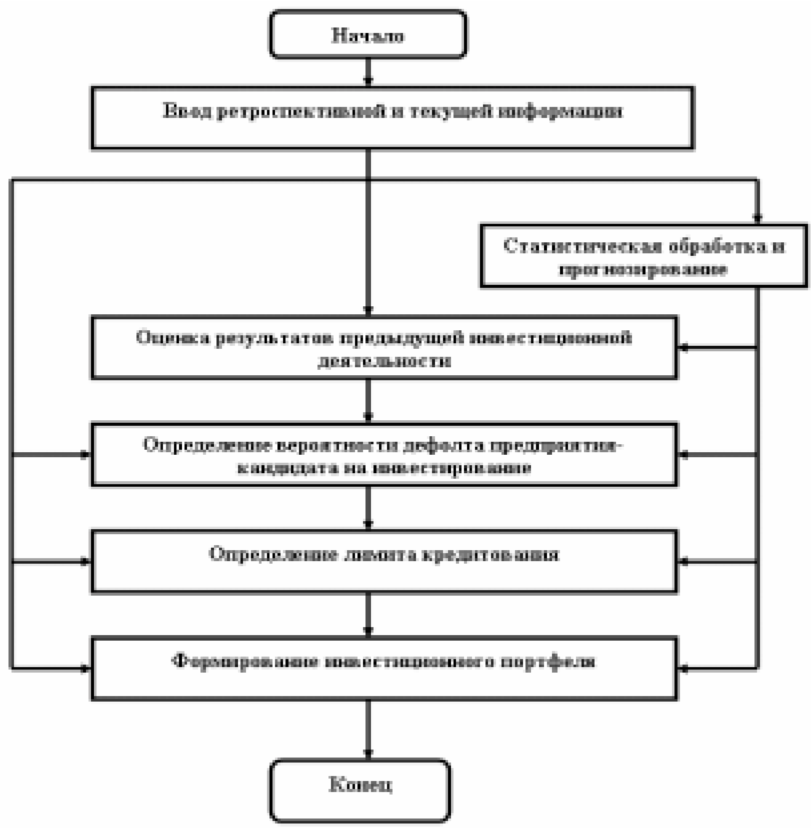

Рисунок. Укрупненная схема принятия инвестиционного решения

$$D_0 = (-AR - BD_\alpha + E)/k;$$
$$D_\alpha = (kG - BE + ABR - kCR)/(kD - B^2); \qquad (6)$$
$$R = \frac{(kF - AE)(kD - B^2) - (kG - BE)(kC - AB)}{(AB - kC)(kC - AB) - (A - kB)(kD - B^2)},$$

где введены следующие обозначения:

$$\sum_{i=1}^{k} t_i = A;\; \sum_{i=1}^{k} t_i^2 = B;\; \sum_{i=1}^{k} t_i^3 = C;\; \sum_{i=1}^{k} t_i^4 = D;$$
$$\sum_{i=1}^{k} D_i = E;\; \sum_{i=1}^{k} D_i t_i = F;\; \sum_{i=1}^{k} D_i t_i^2 = G.$$

Выражения (5), (6) позволяют прогнозировать дисперсию доходности на любой необходимый момент времени, в том числе и на конец периода инвестирования. Но для этого из исходного ретроспективного ряда доходности i-го актива необходимо предварительно сформировать ретроспективный ряд дисперсии этого актива. Для этого очень удобно использовать метод, предложенный в работе [3].

Используя эти формулы, можно легко найти ожидаемое значение доходности i-го актива и риск изменения доходности на момент окончания периода инвестирования. Сравнивая найденные значения этих параметров с некоторыми заранее заданными величинами, можно судить о правильности инвестиционной политики.

То есть, если выполняется условие:

$$(D(X_{it}) < D_{a}^{*}) \wedge (\overline{X}_{it} \geq X_{a}^{*}), \qquad (7)$$

где X_{a}^{*}, D_{a}^{*} – соответственно заданные предельные значения доходности и риска изменения доходности активов, то *i*-й актив вложен правильно, если не выполняется – нужно изменить объект инвестирования.

Выражения (2–6) можно использовать и для анализа изменения стоимости привлечения *j*-го пассива, но при этом критерий отбора изменится:

$$(D(X_{jt}) < D_{п}^{*}) \wedge (\overline{X}_{jt} \leq X_{п}^{*}), \qquad (7)$$

где $X_{п}^{*}$, $D_{п}^{*}$ – соответственно заданные предельные значения стоимости привлечения пассивов и риска изменения стоимости привлечения.

Аналогичный подход можно использовать и для анализа нормы прибыли кредитно-финансовой организации и риска ее изменения. Для этого предварительно, используя известные ретроспективные ряды стоимости активов и стоимости привлечения пассивов, необходимо сформировать ретроспективный ряд изменения нормы прибыли организации.

Результатом этого этапа являются суммированные капиталы неверно вложенных активов, которые используются на последующих этапах анализа для более эффективного вложения.

Второй этап. Определяются вероятность дефолта предприятия, в которое инвестируют, за период инвестирования. В данной работе поставленную задачу предлагается решать точными методами в рамках модели фирмы, предложенной Р. Мертоном [7]:

$$dA = \mu \cdot A_{0} \cdot dt + \sigma \cdot A_{0} \cdot d\overline{w}, \qquad (8)$$

где dA – изменение стоимости активов заемщика; μ, σ – соответственно непрерывные среднее и стандартное отклонение «рентабельности» активов; dt – прирост времени; $d\overline{w}$ – стандартный винеровский процесс.

Вероятность дефолта заемщика – это вероятность того, что рыночная стоимость активов предприятия будет меньше, чем бухгалтерская стоимость его обязательств (*D*) через определенный период времени, а именно:

$$p = P\,[A_{t} \leq D], \qquad (9)$$

где *p* – вероятность дефолта на момент времени *t*; A_t – рыночная стоимость активов заемщика на момент времени *t*.

Используя результаты Блэка - Шоулза [1], в предположении, что бухгалтерская стоимость обязательств за период инвестирования остается постоянной, несложно показать, что вероятность дефолта на момент времени *t* в рамках модели (8) определяется выражением:

$$p = N\left[-\frac{\ln(\frac{A_{0}}{D}) + m \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}\right], \qquad (10)$$

где $m = \mu - \frac{\sigma^{2}}{2}$; *N* – интегральная функция стандартизированного нормального распределения.

Если вероятность дефолта в момент времени *t* не превышает некоторой заранее оговоренной величины, то предприятие может быть включено в список кандидатов на инвестирование.

Использование модели (8) предполагает предварительную ее идентификацию, т.е. определение численных значений параметров μ и σ, которые могут быть определены по МНК с использованием метода [3].

Третий этап. Используем для определения лимита кредитования статистический подход, в рамках модели фирмы Р. Мертона [7]. Пусть некоторый инвестор в момент времени $t = 0$ предоставляет заемщику кредит в объеме Limit на срок *t*. Тогда обязательства заемщика возрастут с *D* до *D+Limit*, а общие активы – с A_0 до A_0*+Limit*.

Новый баланс заемщика на момент времени $t = 0$ после получения им кредита приобретает вид:

$$A_{0} + \mathrm{Limit} = D + \mathrm{Limit} + E, \qquad (11)$$

где *E* – акционерный капитал заемщика.

Предположим, что полученный кредит в объеме *Limit* заемщик направляет на финансирование активов, которые имеют то же самое качество, что и активы A_0 до предоставления кредита, т. е. параметры $-\mu, \sigma$ а, значит, и *m* модели (8) не изменяются.

Получение заемщиком кредита увеличивает его обязательства и тем самым увеличивает вероятность дефолта заемщика p_t на момент времени *t*:

$$p_t = N\left[-\frac{\ln(\frac{A_0 + Limit}{D + Limit}) + m \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}\right], \qquad (12)$$

соответственно, ухудшается и его кредитный рейтинг.

После несложных преобразований получим выражение, определяющее лимит кредитования, при котором вероятность дефолта гарантированно не превысит определенного заранее оговоренного уровня:

$$Limit \le \frac{A_0 \cdot \exp\left(m \cdot t - h_p \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}\right) - D}{1 - \exp(m \cdot t - h_p \cdot \sigma \cdot \sqrt{t})}, \qquad (13)$$

где h_p – количество стандартных отклонений в квантиле порядка *p*.

Сравнивая для каждого предприятия, занесенного в список кандидатов на инвестирование, величину запрошенных инвестиций с лимитом кредитования, можно принять решение об оставлении его в списке кандидатов или исключении из него. Таким образом, результатом первых трех этапов принятия инвестиционного решения будет являться список предприятий – кандидатов на инвестирование, из которого необходимо сформировать оптимальный в некотором смысле инвестиционный портфель.

Четвертый этап. Для формирования оптимального портфеля инвестиций было принято решение использовать теорию оптимального портфеля Марковица, подробно изложенную в работе [4, 6]. Классическая модель оптимального портфеля Марковица формулируется следующим образом [6]: требуется определить вектор относительных весов инструментов, составляющих портфель $s(s_1, s_2, \cdots ..., s_n)$, такой, чтобы минимизировался риск портфеля, определяемый как дисперсия доходности портфеля

$$V \to \min, \qquad (15)$$

и суммарная доходность портфеля, формально определяемая как сумма математических ожиданий доходностей всех инструментов портфеля, превышала некоторое фиксированное значение:

$$E \ge E_{фикс}. \qquad (16)$$

Кроме того, накладывается дополнительное, так называемое основное ограничение:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = 1, \qquad (17)$$

где $e = (1, 1, ..., 1)$ – вектор-столбец из одних единиц.

На ряд типов портфеля накладывается также дополнительное ограничение:

$$s_i \ge 0, \quad (i = 1, 2, ..., n), \qquad (18)$$

запрещающее покупку финансовых инструментов в кредит.

Теория Марковица оперирует с вероятностными характеристиками случайных величин в предположении стационарности случайного процесса. Представленная модель хорошо зарекомендовала себя в условиях стабильного, «предсказуемого» рынка, когда цена отдельных финансовых инструментов в течение года не выходит за пределы 5-10% коридора. Но для российского финансового рынка характерны весомые, резкие ценовые скачки. Так 20-25% ценовые скачки на фондовом рынке происходят сравнительно регулярно – раз в 1,5-2 месяца. Неоднократно показывалось, насколько нереальные ожидаемые доходности и фантастические риски будут получены, если применить теорию Марковица в неизмененном виде к российским финансовым рынкам.

Кроме того, теория Марковица не учитывает высокий уровень инфляции в России, которая в последние годы колеблется на уровне 15% в год. Такой уровень инфляции значительно превышает стандартные уровни доходности, принятые на Западе, и, конечно, должен учитываться при формировании портфеля.

Желательно также использовать возможность учета инвестором плохо формализуемой информации о финансовых инструментах.

Поэтому предлагается следующий выход. В качестве ожидаемой доходности использовать не математическое ожидание, а прогнозируемую доходность. В качестве риска использовать не дисперсию, а математическое ожидание (среднее) квадрата отклонения реальной доходности от прогнозируемой. То есть математическое ожидание заменяется прогнозируемым значением доходности. Таким образом, риск будет характеризовать степень отклонения прогнозируемой доходности от реализованной. Для прогнозирования доходности можно использовать хорошо зарекомендовавшие себя нейросетевые методы, описанные, например, в работе [5].

Так как объективным показателем уровня инфляции является ставка рефинансирования Центробанка, предлагается при формировании портфеля с фиксированным уровнем доходности либо выбирать минимально допустимую доходность на 20-25% превышающей ставку рефинансирования, либо, если уровень доходности портфеля определен, увеличивать его на величину ставки рефинансирования.

Для учета неформальной информации о финансовых инструментах предлагается при расчете дисперсии умножать отклонение реализованной доходности от прогнозируемой на весовые коэффициенты, значение которых инвестор может выбирать по собственному усмотрению.

Тогда прогнозируемая доходность портфеля будет вычисляться по формуле:

$$E' = r_1's_1 + r_2's_2 + \ldots + r_n's_n, \qquad (19)$$

или в матричном виде:

$$E' = r'^{T}s, \qquad (20)$$

где $r'(r_1', r_2', \ldots, r_n')$ – вектор прогнозируемой доходности финансовых инструментов.

Ограничение прогнозируемой доходности снизу можно выразить неравенством:

$$E' \ge E_{\text{фикс}}. \qquad (21)$$

Риск портфеля будет определяться следующим образом:

$$V' = \Big(\sum_{k=1}^{N}(E_{\text{реализ}\,k} - E_{\text{прогн}\,k})^2\Big)/N. \qquad (22)$$

Учитывая (19) и весовые коэффициенты, получаем выражение для нахождения риска портфеля:

$$V' = \sum_{i,j=1}^{n} s_i s_j \sum_{k=1}^{N} q_i q_j (r_i^k - r_i'^k)(r_j^k - r_j'^k)/N. \qquad (23)$$

Используя матричную запись, риск портфеля можно представить в виде:

$$V' = s^{T}C_p s, \qquad (24)$$

где C_p – аналог матрицы ковариации, где вместо математического ожидания используется прогнозируемое значение и учитываются весовые коэффициенты, то есть $C_p = \|c_{p\,ij}\|$, причем

$$c_{p\,ij} = \sum_{k=1}^{N} q_i q_j (r_i^k - r_i'^k)(r_j^k - r_j'^k)/N. \qquad (25)$$

Тогда условие (15) можно заменить выражением: $V' \to \min$. (26)

Для полученной модели также верно ограничение (17), и в случае портфеля Марковица вводится дополнительное ограничение (18).

Таким образом, модель портфеля определяется формулами (21), (26), (17) в случае портфеля Блэка и добавляется ограничение (18) в случае портфеля Марковица.

Ход решения задачи в новой постановке практически не отличается от решения в классической постановке, за исключением необходимости предварительного прогнозирования доходности финансовых инструментов и назначения весовых коэффициентов. Если ограничение (18) не учитывается, решение легко найти в аналитической форме, используя метод множителей Лагранжа. Если ограничение (18) учитывается, то задача относится к классу задач квадратичного программирования, и для ее решения удобно использовать метод проекции градиента. Авторами для решения задачи использовались возможности математического инструментария «Matlab».

Описанный алгоритм принятия инвестиционного решения реализован в форме экспертно-консультационной системы и при опытной эксплуатации показал высокую эффективность.

Список использованной литературы:

1. *Альдермейер М.* Опционы КОЛЛ и ПУТТ: Экономическое и математическое содержание опционов. Основы теории и практики. Метод. пособ: пер. с нем.– М.: Финансы и статистика, 2004.-104 с.
2.. *Мостеллер Ф., Тьюки Дж.* Анализ данных и регрессия. М.: Финансы и статистика, 1982. 239 с.
3. Лапшин А.В., Львов А.А. Применение функций с ограниченным изменением к анализу волновых сигналов и изображений // Доклады Российской академии естественных наук. Поволжское межрегиональное отделение. – 1999, №1.– С. 136-153.
4. *Касимов Ю.Ф.* Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг. М.: Филинъ, 1998. 142 с
5. *Яковлева Г.Л., Яковлев В.Л., Лисицкий Л.А.* Применение нейросетевых алгоритмов к анализу финансовых рынков // Информационные технологии. 1999. №8. С. 25-30.
6. Markowitz H. M. Mean Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets, Basil, Blackwell, 1990.
7. Merton R. C. Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty the Continuous – Time Case, The Review of Economic Statistics, August, 1969.

Статья рекомендована к публикации 25.05.07