

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ТРЕЩИН В ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ

Статья посвящена математическому моделированию разрушения дискретной среды. Установлены закономерности формирования микротрещин по границам зерен материала и разработан критерий роста неустойчивых трещин с учетом диаметра зерна.

Разрушение является основным процессом при добыче полезных ископаемых, бурения нефтяных и газовых скважин. Горные породы представляют собой хрупкие, неоднородные зернистые материалы. Деформирование и разрушение зернистой структуры отличается от сплошных материалов. Экспериментальные исследования по разрушению керамики, металла, горных пород показали, что диаметр зерна оказывает влияние на прочность материала, а формирование микротрещин осуществляется по границам зерен, занимающих большую объемную долю тела.

В настоящее время существуют различные подходы при моделировании разрушения зернистых материалов. Один из подходов основан на вероятностных законах образования микротрещин по границам зерен материала, в которых не рассматриваются закономерности развития микротрещин, а в основу положена концентрация микротрещин. Однако при разработке критерия роста трещины, учитывающего диаметр зерна, требуется привлечение математических методов и моделей, описывающих явное образование микротрещин в материале.

Результаты моделирования развития устойчивых трещин в зернистых структурах были приведены в работе [1]. Развитие неустойчивых трещин в крепких породах, имеющих зернистую структуру, исследовано недостаточно.

Целью данной работы является разработка математической модели роста неустойчивых трещин в зернистом материале и установление зависимости коэффициента интенсивности напряжений первого рода от диаметра зерна, без учета слияния микротрещин.

В основу модели развития неустойчивой трещины в зернистой структуре была положена усовершенствованная модель Троллопа, когда микротрещина разрыва по границе зернистого материала формируется под действием сжимающих напряжений.

Для выяснения картины образования микротрещин и направления движения трещины в дискретной среде предлагается модель, изображенная на рисунке 1.

Данная модель представляет собой плоскость, разбитую на две полуплоскости, где верхняя полуплоскость моделирует дискретную среду, изображенную в виде набора зерен, расположение которых характеризуется номером строки и столбца зерна. Вдоль оси  $Oy$  и  $Ox$  показана нумерация строк и столбцов соответственно.

В нижней полуплоскости, изображающей сплошную среду, рассматривается трещина, окрестность одной из вершин которой представляет собой зернистую структуру. В исследованиях рассматривалась дискретная среда с диаметром зерна  $d = 0,001$  м, а длина трещины варьировалась от 0,005 до 0,015 м. Упругие характеристики зерна и заполнителя имели одни и те же значения: модуль Юнга  $E = 4,4 \cdot 10^4$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,1$ . Ширина заполнителя между зёрнами породы  $h = 0,0001$  м.

Краевые условия имели вид:  $\sigma_s = 0$ ;  $\sigma_n = \sigma_n^0$  на АВ, где  $\sigma_s, \sigma_n$  – соответственно касательные и нормальные напряжения,  $\sigma_n^0$  – задаваемое нормальное напряжение.

Реализация модели осуществляется методом граничных элементов [2].

Граничные интегральные уравнения этого метода в процессе дискретизации границ микротрещин представляются в виде следующей системы линейных уравнений:

$$\sigma_s^i = K_{si} D_{si} + \sum_{j=1}^N [B_{ssij} D_{sj} + B_{snij} D_{nj}],$$

$$\sigma_n^i = K_{ni} D_{ni} + \sum_{j=1}^N [B_{nsij} D_{sj} + B_{nnij} D_{nj}], \quad i = \overline{1, N},$$

где  $N$  – количество всех граничных элементов;  $D_{nj}, D_{sj}$  – компоненты разрывов смещений  $j$ -го отрезка трещины в нормальном и касательном направлениях соответственно;  $\sigma_s^i, \sigma_n^i$  – касательные и нормальные напряжения на границе тела соответственно;  $K_{nj}, K_{sj}$  – нормальная и касательная жесткость заполнителя  $i$ -го элемента соответственно;  $B_{ssij}, B_{snij}, B_{nsij}, B_{nnij}$  – фундаментальные решения.

Результаты моделирования, приведенные на рисунке 2, показывают, что развитие трещины осуществляется за счет слияния микротрещин, формирующихся по границам зерен материала. Образование микротрещин происходит преимущественно перед фронтом трещины, образуя треугольную зону с углом заострения  $60^\circ$ . Вне основной

области раскрытия микротрещин появились наклонные полосы раскрытых микротрещин. Причем варьирование длины трещины  $AB$  в заданном диапазоне существенно не влияет на общую картину раскрытия микротрещин.

На рисунке 3 показана картина раскрытия вертикальных микротрещин в направлении движения трещины  $AB$ . Величина раскрытия вертикальных микротрещин при удалении от трещины в перпендикулярном направлении относительно оси абсцисс значительно уменьшается. Раскрытие микротрещины, находящейся в первой строке перед трещиной, превышает по величине остальные, расположенные в выше лежащих строках зерен (с увеличением номера строки зерна) в 100-1000 раз.

Рисунок 4 иллюстрирует, что величина раскрытия вертикальных микротрещин, по мере удаления от трещины  $AB$  в положительном направлении оси ординат, имеет гиперболическую зависимость.

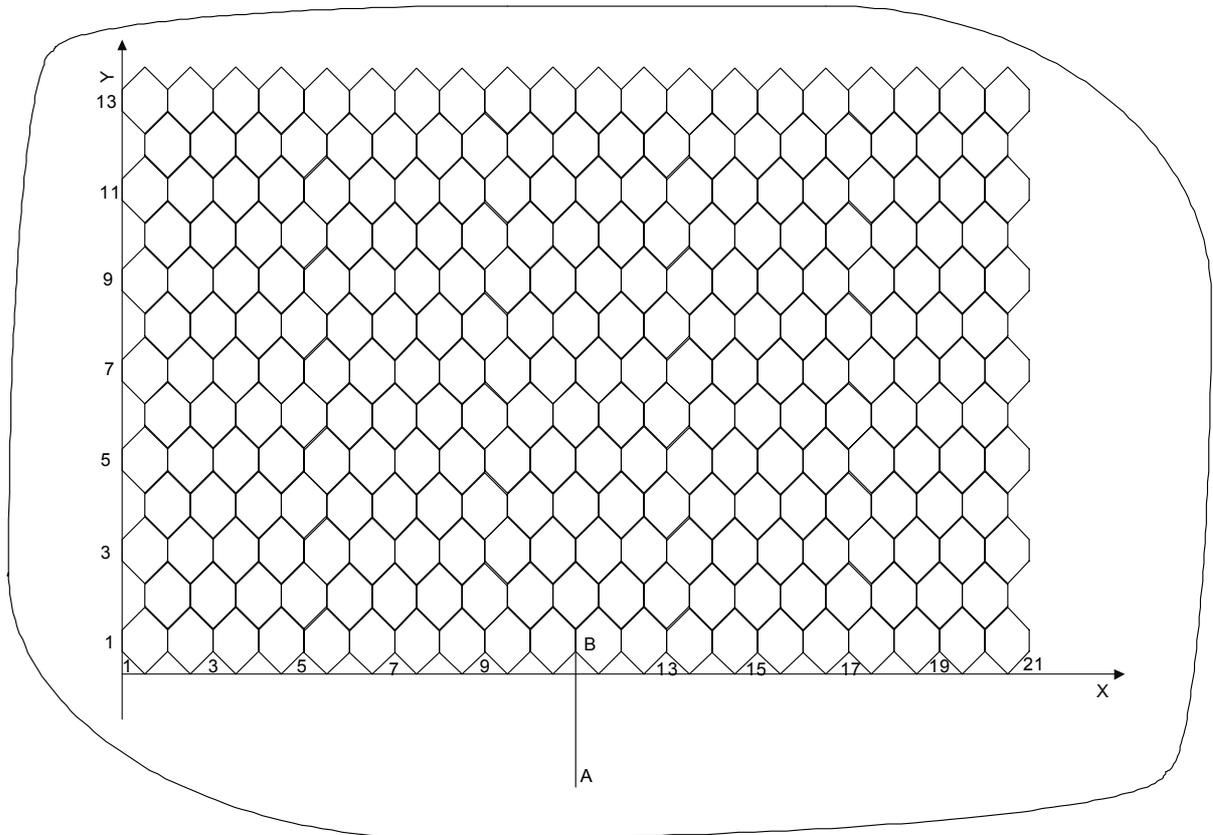


Рисунок 1. Модель дискретной среды

Из приведенных графических зависимостей на рисунках 3 и 4 следует, что:

- ширина раскрытия трещины в зернистой структуре по величине не превосходит 2-3 диаметра зерна;
- направление развития трещины будет формироваться микротрещинами разрыва, образованными параллельно берегам трещины.

Проведенный выше анализ показал, что продвижение трещины по границам зерен происходит поэтапно, т. е. последовательно для каждой раскрытой микротрещины. Поэтому была разработана модель для определения коэффициента интенсивности напряжений первого рода, изображенная на рисунке 5.

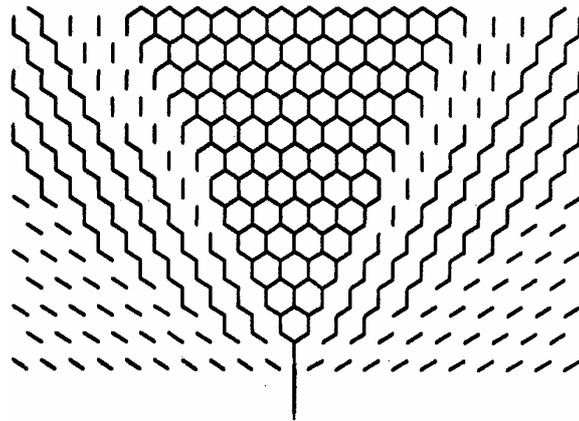


Рисунок 2. Раскрытие микротрещин по границам зерен

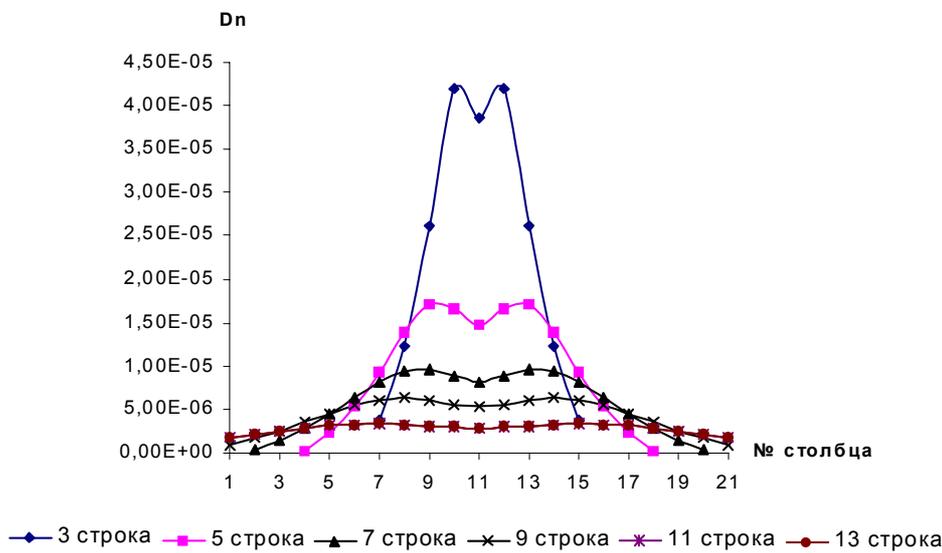


Рисунок 3. Зависимости величины раскрытия вертикальных микротрещин от номера столбца зерна при изменении строк

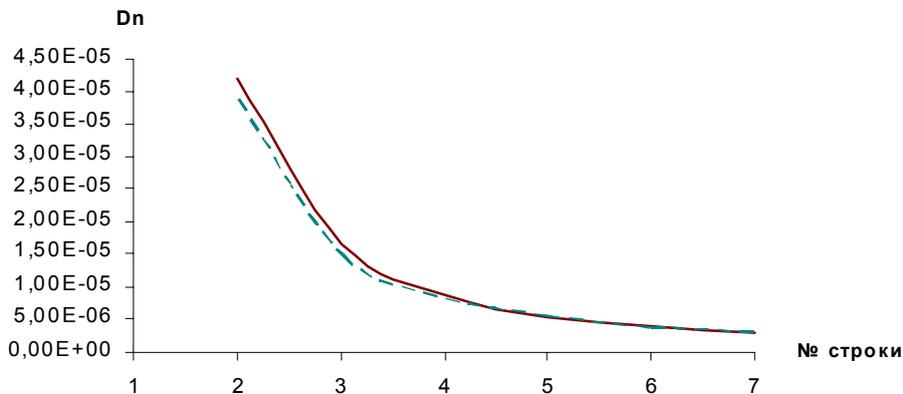


Рисунок 4. Зависимости величины раскрытия вертикальных микротрещин от номера строки при изменении столбца, где 11 столбец, 12 столбец

Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений первого рода в точке В использовали следующий критерий [3]:

$$K_I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{G}{2(1-\nu)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{D_n}{\sqrt{1-x}},$$

где  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений первого рода, Н/м<sup>3/2</sup>;

$l$  – длина трещины, м;

$G$  – модуль сдвига.

В результате расчетов был разработан критерий роста трещины в материале, ослабленном раскрытыми микротрещинами на границах зерен:

$$K_I = p\sqrt{\pi l} \cdot f(d),$$

где  $f(d) = -7,228d^2 + 1,5597d + 1,1952$  – безразмерная величина;

$d$ , м – диаметр зерна ( $0,0001 \leq d \leq 0,001$  м).

На рисунке 6 приведены графики, сопоставляющие зависимости напряжений от длины трещины для сплошной и дискретной сред с различными диаметрами зерна материала. Как видно из рисунка, развитие трещины в дискретной среде происходит при меньшем усилии. Так, напряжения, возникающие в сплошной среде, в 1,21 раза больше (на 17,319%), чем в дискретной среде, при  $d = 0,0001$  м и в 1,28 раза (на 21,831%) – при  $d = 0,001$  м. Таким образом, прочность материала в дискретной среде зависит от диаметра зерна. Проведенные исследования показывают, что увеличение зерна материала уменьшает его прочностные характеристики. Данный факт согласуется с экспериментальными результатами при развитии трещин в керамике, металле, горных породах [4].

**Список использованной литературы:**

1. Герике Б.Л. Математические модели циклического разрушения крепких горных пород дисковым инструментом / Б.Л. Герике, Ю.Г. Полкунов, П.Б. Герике. - Кемерово: Кузбассвузиздат, 2001. – 171 с., ил.
2. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. - М.: Мир, 1987.-328 с.
3. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999.-382 с.
4. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение.- М.: Мир, 1984.-624 с.

Статья рекомендована к публикации 14.05.07

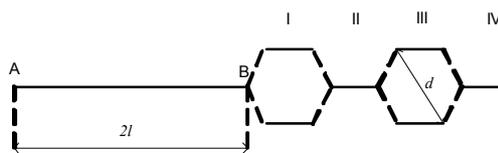


Рисунок 5. Схема раскрытия микротрещин по границам зерен.

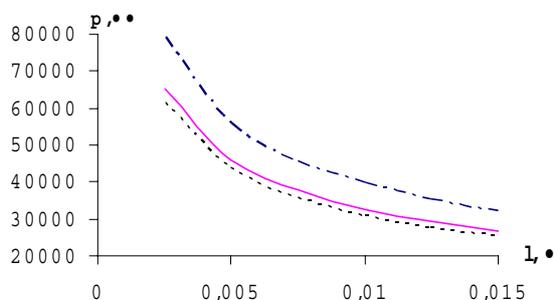


Рисунок 6. Зависимость напряжения от длины трещины, формирующейся в дискретной среде  
- сплошная среда;  
- диаметр зерна  $d = 0,0001$  м;  
- диаметр зерна  $d = 0,001$  м.

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Микротрещины в зернистом материале формируются перед фронтом трещины. Полностью раскрытые трещины по границам зерен образуют фигуру, имеющую форму треугольника с углом заострения 60°.
2. Формирование макротрещины в зернистом материале осуществляется с шириной раскрытия в 2-3 диаметра зерна.
3. Разработанный критерий позволяет прогнозировать развитие неустойчивых трещин в дискретной среде с различными диаметрами зерна.