Павликов С.В.
Камская государственная инженерно-экономическая академия, г. Набережные Челны

МЕТОД ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА В ИСЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной работе исследуется устойчивость и асимптотическая устойчивость нулевого решения неавтономного функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа посредством предельных уравнений и знакопостоянного функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную. Приведен пример.

1. Основные определения. Предельные уравнения.

Пусть R есть действительная ось, R^n есть действительное линейное пространство n-векторов x с нормой |x|, $h = \mathrm{const} > 0$ есть действительное число, C есть банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h,0] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, -h \le s \le 0)$, C_H есть пространство $\{\varphi \in C : \|\varphi\| < H, H > 0\}$. Для непрерывной функции $x :]-\infty, +\infty[\to R^n$ и каждого $t \in R$ функция $x_t(s) \in C_H$ определяется равенством $x_t(s) = x(t+s), s \in [-h,0]$. Под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа с конечным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), f(t,0) \equiv 0 \qquad (1)$$

Здесь $f : R^+ \times C_H \to R^n$ есть некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям существования и непрерывной зависимости решений (1) от начальных данных.

Вводятся следующие предположения относительно правой части (1).

Предположение 1. Для каждого числа r, 0<r<H, существует монотонно неубывающая функция $\mu_r(0) = 0$, такая, что для любой непрерывной функции $u : [a,b] \to \overline{C}_r, \overline{C}_r = \{\varphi \in C : \|\varphi\| \le r\}$ при любых $t_1, t_2 \in [a,b]$ выполняется неравенство:

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s))ds\right| \le \mu_r(|t_2 - t_1|)$$

Из этого предположения следует сглаживание решений уравнения (1) при возрастании t, в частности, если $x = x(t,\alpha,\varphi), (\alpha,\varphi) \in R^+ \times C_H$ есть решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $x_\alpha = \varphi$, то для значений $t \ge \alpha + h$, функция $x_t \in \Gamma$, где $\Gamma \subset C_H$ есть объединение семейства вложенных компактных множеств, $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_n \subset ...$ [1].

Предположение 2. Функция $f = f(t,\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица по φ на каждом компактном множестве $K \subset C_H$, то есть для любых $t \in R^+$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ справедливо неравенство:

$$|f(t,\varphi_1) - f(t,\varphi_2)| \le l(K)\|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

Из предположения 2 следует единственность решения уравнения (1) $x = x(t,\alpha,\varphi), (\alpha,\varphi) \in R^+ \times C_H$ [5].

Предположение 3. Для каждого компактного множества $K \subset C_H$ функция $f = f(t,\varphi)$ ограничена и равномерно непрерывна по $(t,\varphi) \in R^+ \times K$.

При предположении 3 семейство сдвигов $\{f^\tau(t,\varphi) = f(t+\tau,\varphi)\}$ предкомпактно в некотором метризуемом функциональном пространстве F непрерывных функций $f : R^+ \times \Gamma \to R^n$ с компактно открытой топологией [1].

Функция $f^* : R^+ \times \Gamma \to R^n$ называется предельной к $f(t,\varphi)$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая что $f(t + t_n, \varphi)$ сходится к $f^*(t,\varphi)$ в F.

Уравнение

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t) \qquad (2)$$

называется предельным к (1). Областью определения предельного уравнения можно принять область $R \times \Gamma$. Из предположения 2 следует единственность решения уравнения (2).

Взаимосвязь решений уравнений (1) и (2) определяется следующей теоремой [1].

Теорема 1. Пусть функция $f^* : R^+ \times \Gamma \to R^n$ – предельная к f в F относительно последовательности $t_n \to +\infty$, а последовательности $\{\alpha_n \in R^+\}$ и $\{\varphi_n \in \Gamma\}$ таковы, что $\alpha_n \to \alpha \in R^+$, $\varphi_n \to \varphi \in \Gamma$ при $n \to \infty$. Тогда, если $x = x(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ – решения уравнения (1), а $x^* = x^*(t,\alpha,\varphi)$ есть решение предельного уравнения (2), определенное для $t \in [\alpha - h, \beta[$, то последовательность функций $x = x(t + t_n, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ сходится к

$x^* = x^*(t,\alpha,\varphi)$ равномерно по $t \in [\alpha - h, \gamma[$ для каждого $\gamma < \beta$.

2. Теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости.

Рассмотрим вначале задачу об устойчивости нулевого решения (1) при условии существования знакопостоянного функционала Ляпунова.

Для этого введем следующие определения.

Определение 1. Решение x=0 устойчиво относительно множества $\Lambda \subset \Gamma$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in R$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon,\alpha) > 0$ такое, что для $\varphi \in \Lambda \cap \{\|\varphi\| < \delta\}$ следует $|x_t^*(t,\alpha,\varphi)| < \varepsilon$ для каждого решения $x^*(t,\alpha,\varphi)$ любого уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)$ при всех $t \ge \alpha$.

Определение 2. Решение x=0 называется асимптотически устойчивым относительно множества $\Lambda \subset \Gamma$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$, если оно устойчиво относительно $\Lambda \subset \Gamma$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$, и для каждого $\alpha \in R$, существует $\Delta = \Delta(\alpha)$, такое, что из $\varphi \in \Lambda \cap \{\|\varphi\| < \Delta\}$ следует, что решение $x^*(t,\alpha,\varphi)$ каждого уравнения (3) стремится к 0 при $t \to \infty$.

Определение 3. Множество $\Lambda \subset \Gamma$ содержит решения, асимптотически устойчивые равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$, если решение x=0 асимптотически устойчиво относительно множества $\Lambda \subset \Gamma$ равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$ и, кроме того, $x_t^*(\alpha,\varphi) \in \Lambda, \forall \varphi \in \Lambda, t \in R^+$.

Функционалом Ляпунова назовем скалярную непрерывную функцию $V: R^+ \times C_H \to R^+$ [5].

Обозначим через $\omega_i(u)$ непрерывные, строго монотонно возрастающие функции $\omega_i: R^+ \to R^+, \omega_i(0) = 0$.

Пусть $x = x(t,\alpha,\varphi), (\alpha,\varphi) \in R^+ \times C_H$, – некоторое решение (1), определенное для всех $t \ge \alpha - h$. Вдоль этого решения функционал V представляет собой непрерывную функцию времени $V(t) = V(t, x_t(\alpha,\varphi))$. Для этой функции можно определить верхнюю правостороннюю производную $\dot{V}(t,\varphi)$.

Определение 4.

Для функционала $V(t,\varphi)$ и некоторого числа $c \in R$ определим множество

$$V^{-1}(\infty,c) = \{\varphi \in C_H : \exists \varphi_n \in C_H, \exists t_n \to +\infty : \varphi_n \to \to \varphi, V(t_n,\varphi_n) \to c, n \to +\infty\}.$$

Определение 5 [5]. Функционал $V(t,\varphi)$ называется определенно-положительным, если $V(t,0) \equiv 0$ и при некотором $H_0, 0 < H_0 < H$ найдется функция $\omega_1(u)$, такая что для всех $\varphi \in \{\|\varphi\| \le H_0\}$ справедливо неравенство:

$$V(t,\varphi) \ge \omega_1(|\varphi(0)|)$$

Если $0 \le V(t,\varphi), \forall (t,\varphi) \in R^+ \times \overline{C}_{H_0}, V(t,\varphi) \equiv 0$, тогда V называется постоянно-положительным.

Докажем следующую теорему об устойчивости нулевого решения x=0 уравнения (1) с использованием знакопостоянного функционала V.

Теорема 2. Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V: R^+ \times C_H \to R^+$, такой, что:

$$V(t,\varphi) \ge 0, V(t,0) \equiv 0, \dot{V}(t,\varphi) \le 0, \quad (t,\varphi) \in R^+ \times C_H$$

2) решение x=0 асимптотически устойчиво относительно множества $\Lambda_0 = V^{-1}(\infty,0)$ равномерно по семейству предельных уравнений $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$;

Тогда решение x=0 уравнения (1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство.

Предположим, что положение равновесия x=0 уравнения (1) неустойчиво. Тогда при некотором $\varepsilon_0 : 0 < \varepsilon_0 < H$ найдется момент $\alpha > 0$, последовательность $\{\varphi_n : \|\varphi_n\| \to 0, n \to \infty\}$, такие, что для решений (1) $x^n(t) = x(t,\alpha,\varphi_n)$, верно:

$$\|x_{t_n}^n(\alpha,\varphi_n)\| = \varepsilon_0 \tag{3}$$

при некотором $t = t_n$. Из единственности x=0 следует, что $t_n \to +\infty$. Можно считать, что $|x^n(t)| < \varepsilon_0$ для $t \in [\alpha, t_n)$.

Из условия $V(t,\varphi) \equiv 0$, следует, что существуют числа $\lambda_n \to 0$, такие, что $V(t,\varphi_n) \le \lambda_n$. В силу $\dot{V}(t,\varphi) \le 0$, получаем, что:

$$V(t, x_t^n(\alpha,\varphi_n)) \le \lambda_n, t > \alpha \tag{4}$$

Определим $\delta_0 = \delta\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ из условия 2) теоремы. Положим $\delta_1 = \frac{\delta_0}{2}$. Тогда, учитывая (3), получаем, что существует последовательность $t_n^{\delta_1} \to +\infty, n \to \infty$, такая, что $\|x_{t_n^{\delta_1}}^n\| = \delta_1$ и при $t_n^{\delta_1} \le t \le t_n$ выполняется:

$$\delta_1 \le \|x_t^n\| \le \varepsilon_0 \tag{5}$$

Из предположения 1 следует, что семейство функций $\{x_s^n(\alpha,\varphi_n)\}, s = t_n^{\delta^1}$ предкомпактно в C_{ε_0}, поэтому существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{\delta_1}$) и функция φ_{δ_1}, такие, что $x_{t_n^{\delta_1}}^n \to \varphi_{\delta_1}$, где $\|\varphi_{\delta_1}\| = \delta_1$. При этом, в силу (4) и условия для производной V имеем: $V(t_n^{\delta_1}, x^n_{t_n^{\delta_1}}(\alpha,\varphi_n)) \to 0$ при $n \to \infty$ и значит $\varphi_{\delta_1} \in V^{-1}(\infty, 0)$.

Кроме того, существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{\delta_1}$) такая, что $f(t+t_n^{\delta_1},\varphi) \to f^*_{\delta_1}(t,\varphi)$. По теореме 1 получаем, что $x^n(t+t_n^{\delta_1},\alpha,\varphi_n) \to x^*(t,0,\varphi_{\delta_1})$, где $x^*(t,0,\varphi_{\delta_1})$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*_{\delta_1}(t,x_t)$.

Но тогда по определению числа δ_1 имеем, что $| x^*(t,0,\varphi_{\delta_1}) | \le \frac{\varepsilon_0}{2}, t \ge 0$ и $| x^*(t,0,\varphi_{\delta_1}) | \to 0, t \to +\infty$. Обозначим: $T_n = t_n - t_n^{\delta_1}$. Рассмотрим $x^* = x^*(T_n,0,\varphi_{\delta_1})$. Если $T_n \le T < +\infty$ для любого n=1,2..., тогда получаем, что существует T_0, такое, что $x^*_{T_0} = \varphi_{\varepsilon_0}$. Если $T_n \to +\infty$, тогда в силу (5) для каждого T=const>0 $| x^*(T,0,\varphi_{\delta_1}) | \ge \delta_1 > 0$. И то и другое свойство противоречит выбору δ_1. Таким образом получаем устойчивость нулевого решения (1).

Теорема доказана.

Аналогично теореме 2 доказывается следующая теорема о равномерной устойчивости.

Теорема 3. Предположим, что дополнительно к условиям теоремы 2 выполняется:

$$0 \le V(t,\varphi) \le \omega(\|\varphi\|)$$

Тогда решение x=0 (1) равномерно устойчиво.

Исследуем теперь равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения (1) посредством предельных уравнений с использованием знакопостоянного функционала Ляпунова со знакопостоянной производной.

Допустим, что для производной функционала Ляпунова имеет следующая оценка:

$$\dot{V}(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0.$$

Предположим, что непрерывная функция $W = W(t,\varphi)$ ограничена и равномерна непрерывна на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset C_H$ есть компактное множество. Как и в случае с $f(t,\varphi)$ к функции $W = W(t,\varphi)$ можно определить предельную функцию $W^*(t,\varphi)$. Докажем теорему о равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1).

Теорема 4. Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V: R^+ \times C_H \to R^+$, такой, что:

$$0 \le V(t,\varphi) \le \omega(\|\varphi\|), \quad V(t,0) \equiv 0$$
$$V(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0, (t,\varphi) \in R^+ \times C_H;$$

2) множество $\{W^*(t,\varphi) = 0\}$ содержит из решений каждого предельного уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)$ только те, которые асимптотически устойчивы равномерно по $\{\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)\}$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство.

Докажем вначале равномерную устойчивость нулевого решения $x = 0$.

Предположим, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (1) не является равномерно устойчивым. Тогда при некотором $\varepsilon_0 : 0 < \varepsilon_0 < H$ найдутся последовательности $\{\alpha_n > 0\}$, $\{\varphi_n : \|\varphi_n\| \to 0, n \to \infty\}$ и $\{T_n\}$ такие, что для решений (1) $x^n(t) = x(t,\alpha_n,\varphi_n)$ верно:

$$\left\| x^n_{\alpha_n + T_n}(\alpha_n,\varphi_n) \right\| = \varepsilon_0 \tag{6}$$

Из единственности $x = 0$ следует, что $\alpha_n + T_n \to +\infty$. Можно считать, что $|x^n(t)| < \varepsilon_0$ для $t \in [\alpha_n, \alpha_n + T_n]$.

В силу дополнительного условия $V(t,\varphi) \le \omega(\|\varphi\|)$ получаем, что существуют числа $\Delta_n \to 0$, такие, что $V(\alpha_n,\varphi_n) \le \omega(\|\varphi_n\|) \le \Delta_n$. В силу $\dot{V}(t,\varphi) \le 0$ получаем, что:

$$V(t, x^n_t(\alpha_n,\varphi_n)) \le \Delta_n, \ t > \alpha_n \tag{7}$$

Определим $\delta_0 = \delta\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ из условий 2) теоремы. Положим $\delta_1 = \frac{\delta_0}{2}$. Из предположения 1 существует последовательность $t_n^{\delta_1} \to +\infty$, $n \to \infty$, $t_n^{\delta_1} \ge 0$ функция φ_{δ_1} такие, что $x^n_{t_n^{\delta_1}+\alpha_n} \to \varphi_{\delta_1}, \delta_1 \le \|x_t\| \le \varepsilon_0$ для $t \in [t_n^{\delta_1} + \alpha_n, T_n + \alpha_n)$, где $\|\varphi_{\delta_1}\| = \delta_1$.

Кроме того, существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{\delta_1}$) такая, что $f(t+t_n^{\delta_1}+\alpha_n,\varphi) \to f^*_{\delta_1}(t,\varphi)$. По теореме 1 получаем, что $x^n(t+t_n^{\delta_1}+\alpha_n,\alpha,\varphi_n) \to x^*(t,0,\varphi_{\delta_1})$, где $x^*(t,0,\varphi_{\delta_1})$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*_{\delta_1}(t,x_t)$.

Рассмотрим:

$$V(t_n^{\delta_1} + t + \alpha_n, x_{l_n^{\delta_1}+t+\alpha_n}(\alpha_n,\varphi_n)) - V(t_n^{\delta_1} + \alpha_n, x_{l_n^{\delta_1}+\alpha_n}(\alpha_n,\varphi_n)) \le$$
$$\le -\int_0^t W(s + t_n^{\delta_1} + \alpha_n, x_{s+t_n^{\delta_1}+\alpha_n}(\alpha_n,\varphi_n))ds \le 0$$

В силу (7) получаем, что $\varphi_{\delta_1} \in \{W^*(t,\varphi) = 0\}$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве теоремы 2, получаем противоречие условия 2) с (6).

Докажем теперь равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения $x = 0$ уравнения (1).

Пусть $\overline{C}_r = \{\varphi : \|\varphi\| \le r < H\}$ лежит в области равномерной устойчивости. Покажем, что $\overline{C}_r$ содержится в области равномерного притяжения x=0 для (1).

Предположим противное, а именно, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, произвольной последовательности $T_k \to +\infty$ существует последовательность $(\alpha_k, \varphi_k) \in R^+ \times \overline{C}_r$, такая, что для решений $x = x(t, \alpha_k, \varphi_k)$ выполняется:

$$\|x_{\alpha_k + T_k}(\alpha_k, \varphi_k)\| = \varepsilon_0 .$$

Определим число $\delta_0 = \delta\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ из свойства равномерной устойчивости нулевого решения (1) x=0. Тогда для всех $\alpha_k \le t \le \alpha_k + T_k$ будем иметь:

$$\|x_t(\alpha_k, \varphi_k)\| > \delta_0 .$$

Положим $\{\psi_k = x_{\beta_k} : \beta_k = \alpha_k + \frac{T_k}{2}\}$. Значит для решений (1) $x = x(t + \beta_k, \alpha_k, \varphi_k)$ выполняется:

$$\|x_{t+\beta_k}(\alpha_k, \varphi_k)\| > \delta_0 \tag{8}$$

для всех $0 \le t \le T_k/2$.

Без ограничения общности, можно считать, что $\psi_k \to \psi, k \to +\infty$.

По теореме 1 последовательность $x(\beta_k + t, \beta_k, \psi_k)$ сходится равномерно по $t \in [0, T]$ к решению $y = y(t, 0, \psi)$ уравнения $\dot{y} = f^*(t, x_t)$.

Тогда в силу (8) имеем:

$$\|y_t(0, \psi)\| \ge \delta_0 \tag{9}$$

для всех $t \ge 0$.

Вдоль решения $x = x(t + \beta_k, \beta_k, \psi_k)$ для $\tau > 0$ имеем:

$$V(\beta_k + \tau, x_{\beta_k+\tau}(\beta_k, \psi_k)) - V(\beta_k, x_{\beta_k}(\beta_k, \psi_k)) \le -\int_0^\tau W(\beta_k + s, x_{\beta_k+s}(\beta_k, \psi_k))ds \le 0 .$$

Значит для любых $\tau \ge 0$, β_k получаем:

$$0 \le \int_0^\tau W(\beta_k + s, x_{\beta_k+s}(\beta_k, \psi_k))ds \le m = const .$$

Устремляя $k \to \infty$ получаем:

$$0 \le \int_0^\tau W^*(s, y_s(0, \psi))ds \le m \tag{10}$$

Следовательно $\int_0^\infty W^*(s, y_s(0, \psi))ds$ сходится и для каждого $\tau \ge 0$:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{t-\tau}^{t+\tau} W^*(s, y_s(0, \psi))ds = \lim_{t\to+\infty} \int_{-\tau}^{\tau} W^*(t + s, y_{t+s}(0, \psi))ds = 0$$

Возьмем произвольную последовательность $t_n \to +\infty$. Без ограничения общности, можно считать, что $f^*(t + t_n, \varphi) \to f^{**}(t, \varphi)$, $W^*(t_n + t, \varphi) \to W^{**}(t, \varphi)$, а $y(t_k + t, 0, \psi)$ сходится равномерно по $t \in [-T, T]$ к $z(t, 0, \psi^*)$, где $z(t, 0, \psi^*)$ есть решение уравнения $\dot{y}(t) = f^{**}(t, y_t)$, $\psi^* = \lim_{t\to+\infty} y_{t_n}$. В силу (9) для каждого $t \in R$ получаем:

$$\|z_t(0, \psi^*)\| \ge \delta_0 > 0 \tag{11}$$

Из (10) имеем:

$$0 \le \int_{-\tau}^{\tau} W^{**}(s, z_s(0, \psi^*))ds = \lim_{t\to+\infty} \int_{-\tau}^{\tau} W(t_n + s, y_{s+t_n}(0, \psi))ds = 0$$

Следовательно для каждого $t \in R$: $W^{**}(t, z_t(0, \psi^*)) = 0$. Учитывая (11) мы приходим к противоречию с условием 2) теоремы.

Теорема доказана.

Теоремы 2–4 развивают и обобщают результаты работ [2-6].

Пример.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t)g(t, x_t) - 2(x_1(t) + x_1(t-h)) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t)x_2(t) - x_2^3(t) \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $x_t = \begin{pmatrix} x_1(t+s) \\ x_2(t+s) \end{pmatrix}, -h \le s \le 0, h = const > 0$.

Допустим, что функция $g(t, \varphi), g(t, 0) \equiv 0$ удовлетворяет предположениям 1–3 и $g(t, \varphi) \ge c_0 = const > 0$, $\forall (t, \varphi) \in R^+ \times \overline{C}_{H_0}$.

Возьмем функционал Ляпунова в виде:

$$V(t, \varphi_1) = \varphi_1^2(0) + \int_{-h}^{0} \varphi_1^2(s)ds .$$

Такой функционал является знакопостоянным.

Для производной функционала $V(t, \varphi_1)$ в силу системы (12) находим оценку:

$$\dot{V}(t, \varphi_1, \varphi_2) \le -2c_0\varphi_1^2(0) \le 0 .$$

Полагаем $W(t, \varphi) = 2c_0\varphi_1^2(0)$.

Множество $\{W^*(t, \varphi) = 0\} \equiv \{\varphi_1(0) = 0\}$.

Уравнения, предельные к (12) имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t)g^*(t, x_t) - 2(x_1(t) + x_1(t-h)) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t)x_2(t) - x_2^3(t), \end{cases} \tag{13}$$

На множестве $\{\varphi_1(0) = 0\}$ система (13) асимптотически устойчиво относительно $\{\varphi_1(0) = 0\}$.

Таким образом выполнены все условия теоремы 4 и, значит, нулевое решение $x_1 = x_2 = 0$ системы (12) равномерно асимптотически устойчиво.

Список использованной литературы:
1. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения// Дифференц. уравнения. – 1998. – 34, N4. – С.435-440.
2. Андреев А. С., Павликов С. В. Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // МТТ.–2004.–Вып. 34.– С. 112-118.
3. Андреев А.С., Павликов А. С. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально-дифференциального уравнения // ПММ. –1999. – Т.63. Вып.1. – С. 3-12.
4. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости и неустойчивости // Дифференц. уравнения.– 1998. – 34, N7. – С.876-885.
5. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. –М.: Мир, 1984. –421 с.
6. Косов А.А. К теории устойчивости неавтономных систем. – Ленинград, 1995, ВИНИТИ, 11 с.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №05-01-000765).

Статья рекомендована к публикации 05.06.06