Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.
Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова

К ВОПРОСУ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО МНОГОМЕРНОМУ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ D_A-УРАВНЕНИЙ

В работе вводится понятие периодичности функции $\sigma = t - a\tau$ с многомерным временем $t_0 = \tau \in (-\infty, +\infty) = R$ и переменным периодом $(j = 1, ..., m)$ по аргументам (τ, t, σ), где $\sigma = t - a\tau$ – характеристика дифференциального оператора D_a. Предлагается новое представление периодических решений рассматриваемых линейных систем и основанный на нем метод исследования периодических решений нелинейных систем уравнений многомерного времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим оператор дифференцирования D_a по многомерному времени $(t_0, t_1, ..., t_m)$ в направлении постоянного вектора $(1, a_1, ..., a_m)$. Следовательно, имеем $D_a = \partial_0 + \sum\limits_{j=1}^{m} a_j \partial_j$, где $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial t_j}$, $(j = 1, ..., m)$. В дальнейшем положим $a = (a_1, ..., a_m)$, $t_0 = \tau \in (-\infty, +\infty) = R$, $t = (t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R^m$. Вектор-функцию $\sigma = t - a\tau$ назовем характеристикой оператора D_a.

Теперь введем в рассмотрение систему квазилинейных дифференциальных уравнений вида

$$D_a x = f(\tau, t, \sigma, x), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$.

Вектор-функция $f = (f_1, ..., f_m)$ задана для $(\tau, t, \sigma, x) \in R \times R^m \times R^m \times R^n$ и обладает свойствами периодичности по τ с периодом θ, по t, следовательно, и по $\sigma = t - a\tau$, с вектор-периодом $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$, непрерывности по всем аргументам и непрерывной дифференцируемости по t, σ, x. Следовательно, имеем

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, \sigma + k\omega, x) =$$
$$= f(\tau, t, \sigma\, x) \in C^{(0,1,1,1)}_{\tau, t, \sigma, x}(R \times R^m \times R^m \times R^n),$$
$$\forall k \in Z^m, \qquad (2)$$

где Z^m – множество целочисленных векторов $k = (k_1, ..., k_m)$, $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$ – кратный вектор-период, а $\theta = \theta(\sigma)$ – положительно определенная ω-периодическая и непрерывно дифференцируемая функция

$$0 < \theta(\sigma + k\omega) = \theta(\sigma) \in C^{(1)}_{\sigma}(R^m), \quad \forall k \in Z^m,$$

причем $\theta(0) = \omega_0$, $\omega_1, ..., \omega_m$ – положительные рационально несоизмеримые постоянные.

При этих условиях ставится задача о существовании (θ, ω)-периодических по (τ, t) решений системы (1).

Заметим [1], что для достижения этой цели нам достаточно ограничиться решениями системы (1), удовлетворяющими начальным условиям вида

$$x\,\big|_{\tau=0} = u(t) \in U, \qquad (1_0)$$

где U – пространство непрерывно дифференцируемых ω-периодических n-вектор-функций с нормой $\|u\| = \sup |u(t)|$ при $t \in R^m$:

$$U = \left\{ u(t) \,\middle|\, (u(t + k\omega) = u(t) \in C^{(1)}_t(R^m), \quad \forall k \in Z^m \right\}.$$

Здесь $|\cdot|$ – знак евклидовой метрики.

Под интегралом функции $f(\tau, t, \sigma)$ вдоль характеристики $h_0 = s$, $h = \sigma + as$ оператора D_a от точки (ψ_0, ψ) до точки (φ_0, φ) пространства многомерного времени (τ, t) понимаем соотношение $\int\limits_{(\psi_0, \psi)}^{(\varphi_0, \varphi)} f(h_0, h, \sigma)\, ds = F(\varphi_0, \varphi, \sigma) - F(\psi_0, \psi, \sigma)$, где $F(s, \sigma + as, \sigma)$ – интеграл функции $f(s, \sigma + as, \sigma)$ по параметру S [2]. В частности, решение $x(\tau, t, \sigma)$ задачи (1)-(1_0) определяется интегральным уравнением

$$x(\tau, t, \sigma) = u(\sigma) + \int\limits_{(0, \sigma)}^{(\tau, t)} f(h_0, h, \sigma, x(h_0, h, \sigma))\, ds, \quad (3)$$

где $u(t) \in U$.

Теперь основную задачу исследуем для линейного случая.

2. Периодические по многомерному времени решения линейных систем. Рассмотрим линейную систему

$$D_a x = A(\sigma)\, x + f(\tau, t, \sigma) \qquad (4)$$

с $n \times n$-матрицей $A(\sigma)$ непрерывно дифференцируемой и ω-периодично определенной на характеристике $\sigma = t - a\tau \in R^m$. Следовательно,

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C^{(1)}_{\sigma}(R^m), \quad \forall k \in Z^m, \qquad (5)$$

причем собственные значения $\lambda(\sigma)$ матрицы $A(\sigma)$ при любых значениях $\sigma \in R^m$ не принимают значения равные $2k\pi i$:

$$\lambda(\sigma) \neq 2k\pi i, \quad \forall \sigma \in R^m. \qquad (6)$$

При предположениях (5) и (6) матрицант $X(\tau,\sigma)=\exp[A(\sigma)\tau]$ однородной системы

$$D_a x = A(\sigma)\, x \qquad (7)$$

обладает свойствами

$$X(\tau,\sigma+k\omega)=X(\tau,\sigma)\in C^{(1,1)}_{\tau,\sigma}(R\times R^m),\quad \forall k\in Z^m,$$

причем матрица монодромии $X(\theta(\sigma),\sigma)$ не имеет единичного мультипликатора $\rho(\sigma)$ при любых $\sigma\in R^m$. Следовательно, в силу обратимости матрицы $[X(\theta(\sigma),\sigma)-E]$ и представления решения $x(\tau,\sigma)$ системы (7) с начальным условием (1_0) в виде

$$x(\tau,\sigma)=X(\tau,\sigma)\,u(\sigma), \qquad (8)$$

она не имеет (θ,ω)-периодического по (τ,σ) решения, кроме тривиального.

Тогда легко показать, что линейная система (4) с вектор-функцией

$$f(\tau+\theta,t+k\omega,\sigma+k\omega)=,$$

$$=f(\tau,t,\sigma)\in C^{(0,1,1)}_{\tau,t,\sigma}(R\times R^m\times R^m),\quad \forall k\in Z^m \qquad (9)$$

имеет единственное (θ,ω,ω)-периодическое по (τ,t,σ) решение $x^*(\tau,t,\sigma)$, представимое в виде

$$x^*(\tau,t,\sigma)=[X^{-1}(\tau+\theta,t,\sigma)-$$

$$-X^{-1}(\tau,t,\sigma)]^{-1}\int\limits_{(\tau,\sigma)}^{(\tau+\theta,t)} X^{-1}(h_0,\sigma)\,f(h_0,h,\sigma)\,ds. \qquad (10)$$

Полученный результат сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (5), (6) и (9). Тогда неоднородная система дифференциальных уравнений (4) с многомерным временем* (τ,t,σ) *имеет единственное* (θ,ω,ω)*-периодическое решение* $x^*(\tau,t,\sigma)$*, представимое в виде (10).*

Единственность периодического решения системы (4) доказывается отсутствием ненулевого периодического решения однородной системы (7).

Далее, введем пространство V непрерывных в $R\times R^m\times R^m$ n-вектор-функций $v(t_0,t,\sigma)$ с аргументом $\sigma=t-a\tau$, изменяющимся на характеристике оператора D_a, и периодических по $t_0=\tau$ и t с периодами $\omega_0=\theta$ и ω:

$$V=\{v(\tau,t,\sigma)\mid v(\tau+\theta,t+k\omega,\sigma+k\omega)=$$

$$=v(\tau,t,\sigma)\in C(R\times R^m\times R^m),\quad \forall k\in Z^m;$$

$$\|v\|=\sup|v(\tau,t,\sigma)|,\quad (\tau,t,\sigma)\in R\times R^m\times R^m\},$$

где $|v|$ – евклидова метрика вектора v. Отсюда ясно, что $U\subset V$ и U является подпространством, пространства V с метрикой индуцированной метрикой пространства V.

Теперь рассмотрим линейный оператор

$$(Qf)(\tau,t,\sigma)=[X^{-1}(\tau+\theta,\sigma)-$$

$$-X^{-1}(\tau,\sigma)]^{-1}\int\limits_{(\tau,\sigma)}^{(\tau+\theta,t)} X^{-1}(h_0,\sigma)\,f(h_0,h,\sigma)\,ds, \qquad (11)$$

где $f(\tau,t,\sigma)\in V$ в силу (9), причем нетрудно показать, что

$$(Qf)(\tau+\theta,t+k\omega,\sigma+k\omega)=$$

$$=(Qf)(\tau,t,\sigma)\in C^{(1,1,1)}_{\tau,t,\sigma}(R\times R^m\times R^m),\quad \forall k\in Z^m. \qquad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) ясно, что оператор Q отображает пространство V в себя.

Пусть $v(\tau,t,\sigma)\in V$ с единичной нормой $\|v\|=1$. Очевидно, что $\|Qv\|\le\eta$. Следовательно, $\|Q\|\le\eta$.

Таким образом, единственное периодическое по (τ,t,σ) решение $x^*(\tau,t,\sigma)$ линейной системы (4) удовлетворяет оценке

$$\|x^*\|\le\eta\,\|f\| \qquad (13)$$

для всех $f\in V$.

3. Периодические по многомерному времени решения нелинейных систем. Рассмотрим задачу об исследовании периодических по многомерному времени (τ,t) решений системы

$$D_a x = A(\sigma)\,x + F(\tau,t,\sigma,x), \qquad (14)$$

где заданная n-вектор-функция F обладает свойствами периодичности и гладкости вида

$$F(\tau+\theta,t+k\omega,\sigma+k\omega,x)=$$

$$=F(\tau,t,\sigma\, x)\in C^{(0,1,1,1)}_{\tau,t,\sigma,x}(R\times R^m\times R^m\times R^n_\Delta) \qquad (15)$$

для всех $k\in Z^m$, где $\theta=\theta(\sigma)$, $R^n_\Delta=\{x\in R^n \mid |x|\le\Delta=\text{const}>0\}$.

Для решения этого вопроса учтем, что, в соответствии с теоремой 1, исследуемые периодические решения x системы (14) при условиях (15) удовлетворяют интегральному уравнению Вольтера вида

$$x(\tau,t,\sigma)=\int\limits_{(\tau,\sigma)}^{(\tau+\theta,t)} K(\tau,\sigma,h_0)\,F(h_0,h,\sigma,x(h_0,h,\sigma))\,ds, \qquad (16)$$

где ядро $K(\tau,\sigma,s)$ определяется соотношением

$$K(\tau,\sigma,s)=[X^{-1}(\tau+\theta,\sigma)-X^{-1}(\tau,\sigma)]^{-1}X^{-1}(s,\sigma). \qquad (17)$$

Также легко убедиться, что дифференцируемое решение интегрального уравнения (16) с ядром (17) является решением уравнения (14).

Таким образом, задача о периодических решениях системы (14) свелась к решению интегрального уравнения (16) с ядром (17) в подпространстве $V_\Delta \subset V$ вектор-функций $x(\tau, t, \sigma)$, ограниченных по норме величиной $\Delta = \text{const} > 0$.

Для решения этой задачи для $x \in V_\Delta$ определим оператор

$$(Tx)(\tau, t, \sigma) =,$$

$$= \int_{(\tau,\sigma)}^{(\tau+\theta,t)} K(\tau, \sigma, h_0)\, F(h_0, h, \sigma, x(h_0, h, \sigma))\, ds \quad (18)$$

где вектор-функция F в силу условия (15) удовлетворяет условиям:

1) ограниченности числом $M > 0$ при $x = 0$;

2) Липшица относительно X с постоянной $L > 0$.

Тогда нетрудно убедиться, что оператор T при выполнении условий

$$\eta L < 1, \quad \eta M \le (1 - \eta L)\Delta \quad (19)$$

переводит пространство V_Δ в себя и является сжимающим оператором. Следовательно, в силу полноты пространства V_Δ оператор T имеет единственную неподвижную точку $x^*(\tau, t, \sigma) \in V_\Delta : Tx^* = x^*$, которая является единственным периодическим решением интегрального уравнения (16).

Дифференцируемость решения $x^*(\tau, t, \sigma)$ по всем аргументам следует из условия (15).

Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. *При выполнении условий (5), (15) и (19) некритическая система (14) допускает единственное* (θ, ω, ω)*-периодическое решение.*

Данное исследование является продолжением исследований, предложенных в [3-6].

Список использованной литературы:

1. Сартабанов Ж.А. Условия периодичности решений дифференциальных систем с многомерным временем // Известия НАН РК Сер. физ.–мат., 2004, №3. – С.44-48.
2. Сартабанов Ж.А., Кульжумиева А.А., Калыбаева Д.Т. Об интеграле функции многомерного времени // Вестник АГУ, 2004, №4. – С.3-7.
3. Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Многопериодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем и переменным периодом // Материалы Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры». 5-8 октября 2005. ч.1. – Брест. – С.163-165.
4. Kulzhumiyeva A., Sartabanov Zh. On periodic solutions of the nonlinear system of the differential equations with multivariate time and variable period // International Scientific Conf. «Mathematical analysis, differential equations and their applications». September 18-23, 2006. – Uzhgorod. – P.159-160.
5. Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Голоморфность периодических колебаний в нелинейной системе многомерного времени с переменным периодом относительно малого параметра // Матеріали III Міжнародної науково-практичної конф. «Науковий потенціал світу – 2006». 18-29 вересня 2006 року. Т.1. – Дніпропетровск. С.5-8.
6. Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Колебания в квазилинейных системах дифференциальных уравнений многомерного времени с переменными частотами // Материалы XI Междунар. научной конф. им. академика М. Кравчука. 18-20 мая 2006. – Киев. – С.481.

Статья рекомендована к публикации 14.11.06