Абдикаликова Г.А.
Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений. Установлены коэффициентные достаточные условия корректной разрешимости рассматриваемой задачи. Предложен алгоритм нахождения решения.

Краевые задачи с нелокальными условиями для различных классов уравнений с частными производными и дифференциально-операторных уравнений исследованы многими авторами, где разными методами получены достаточные условия существования единственного решения, отметим лишь [1]-[2].

В [3]-[4] методом введения функциональных параметров, являющимся развитием метода параметризации [5] на уравнения с частными производными, установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для системы гиперболических уравнений со смешанной производной в терминах исходных данных.

Рассмотрим на $\overline{\Omega}=\{(x,t): t\le x\le t+\omega,\ 0\le t\le T\}$, $T>0$, $\omega>0$ линейную краевую задачу

$$D\left[\frac{\partial}{\partial x}u\right]=A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+P(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+S(x,t)u+f(x,t),\quad u\in R^n, \tag{1}$$

$$B(s)\frac{\partial u}{\partial x}(s,0)+C(s)\frac{\partial u}{\partial x}(s+T,T)=d(s),\quad s\in[0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,t)=\Psi(t),\qquad t\in[0,T], \tag{3}$$

где $D=\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}$; $A(x,t)$, $P(x,t)$, $S(x,t)$ $-(n\times n)$ – матрицы, $f(x,t)$ – n – вектор-функция непрерывны по x и t на $\overline{\Omega}$; $B(s), C(s)$ – $(n\times n)$ – матрицы и n – вектор-функция $d(s)$ – непрерывны на $[0,\omega]$; функция $\Psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, $\|u\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|u_i(x,t)|$, $\|A(x,t)\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}(x,t)|$.

Обозначим через $C(\overline{\Omega},R^n)$ пространство непрерывных по x и t функций $u:\overline{\Omega}\to R^n$ с нормой $\|u\|_1=\max\limits_{x\in[0,\omega]}\max\limits_{t\in[0,T]}\|u(x,t)\|$.

Целью работы является нахождение коэффициентных достаточных условий существования и единственности решения задачи (1)-(3).

Введем новые неизвестные функции $v(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $w(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, и тогда задача (1)-(3) примет вид

$$Dv=A(x,t)v+P(x,t)w+S(x,t)u+f(x,t),\ (x,t)\in\overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$B(s)v(s,0)+C(s)v(s+T,T)=d(s),\quad s\in[0,\omega], \tag{5}$$

$$u(x,t)=\Psi(t)+\int_t^x v(\eta,t)d\eta,\qquad t\in[0,T], \tag{6}$$

$$w(x,t)=\dot{\Psi}(t)+\int_t^x \frac{\partial v}{\partial t}(\eta,t)d\eta,\qquad t\in[0,T]. \tag{7}$$

Если непрерывные функции $u(x,t)$ и $w(x,t)$ известны, то, решая двухточечную краевую задачу (4)-(5), находим $v(x,t)$. Если непрерывная функция $v(x,t)$ является известной, то из (6), (7) определим функции $u(x,t)$ и $w(x,t)$.

Если функция $u(x,t)$ является решением задачи (1)-(3), то $(v(x,t),u(x,t),w(x,t))$ – решение (4)-(7), где $v(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $w(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, и наоборот, если $(v(x,t),u(x,t),w(x,t))$ – решение задачи (4)-(7), то функция $u(x,t)$ будет решением задачи (1)-(3).

Используя метод характеристик, с помощью замены: $\tau=t,\xi=x-t$ получим семейство обыкновенных дифференциальных уравнений на $\overline{H}=\{(\xi,\tau): 0\le\xi\le\omega, 0\le\tau\le T\}$, $T>0$, $\omega>0$:

$$\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\tau}=\widetilde{A}(\xi,\tau)\widetilde{v}+\widetilde{P}(\xi,\tau)\widetilde{w}(\xi,\tau)+$$
$$+\widetilde{S}(\xi,\tau)\widetilde{u}(\xi,\tau)+\widetilde{f}(\xi,\tau),\quad \tau\in[0,T], \tag{8}$$

с граничным условием

$$B(\xi)\widetilde{v}(\xi,0)+C(\xi)\widetilde{v}(\xi,T)=d(\xi),\quad \xi\in[0,\omega], \tag{9}$$

функциональными соотношениями

$$\widetilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)+\int_\tau^{\xi+\tau}\widetilde{v}(\varsigma,\tau)d\varsigma,\qquad \tau\in[0,T], \tag{10}$$

$$\widetilde{w}(\xi,\tau)=\dot{\Psi}(\tau)+\int_\tau^{\xi+\tau}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\tau}(\varsigma,\tau)d\varsigma,\qquad \tau\in[0,T]. \tag{11}$$

где $\widetilde{v}(\xi,\tau)=v(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{A}(\xi,\tau)=A(\xi+\tau,\tau)$,

$\widetilde{P}(\xi,\tau)=P(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{S}(\xi,\tau)=S(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{f}(\xi,\tau)=f(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{w}(\xi,\tau)=w(\xi+\tau,\tau)$, $\widetilde{u}(\xi,\tau)=u(\xi+\tau,\tau)$; $(n\times n)$– матрицы $\widetilde{A}(\xi,\tau)$, $\widetilde{P}(\xi,\tau)$, $\widetilde{S}(\xi,\tau)$ и n – вектор-функция $\widetilde{f}(\xi,\tau)$ непрерывны по ξ и τ на H;

$B(\xi), C(\xi)$ – $(n\times n)$ – матрицы и n – вектор-функция $d(\xi)$ непрерывны на $[0,\omega]$; функция $\Psi(\tau)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Непрерывно дифференцируемая на $\overline{H}$ функция $(\widetilde{v}(\xi,\tau),\widetilde{u}(\xi,\tau),\widetilde{w}(\xi,\tau))$ называется решением задачи (8)-(11) в широком смысле по Фридрихсу [6], если функция $\widetilde{v}(\xi,\tau)$ на $\overline{H}$ непрерывно дифференцируема по переменной τ и удовлетворяет семейству обыкновенных дифференциальных уравнений (8) с граничным условием (9), где функции $\widetilde{u}(\xi,\tau)$ и $\widetilde{w}(\xi,\tau)$ связаны с функцией $\widetilde{v}(\xi,\tau)$ функциональными соотношениями (10) и (11). Непрерывно дифференцируемую на $\overline{\Omega}$ функцию $(v(x,t),u(x,t),w(x,t))$, полученную с помощью замены $t=\tau, x=\xi+\tau$ из функции $(\widetilde{v}(\xi,\tau), \widetilde{u}(\xi,\tau),\widetilde{w}(\xi,\tau))$, будем называть решением в широком смысле задачи (4)-(7). Непрерывно дифференцируемая на $\overline{\Omega}$ функция $u(x,t)=\widetilde{u}(\xi(x,t),\tau)$ называется решением задачи (1)-(3) в широком смысле, если она удовлетворяет уравнению (1) при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$ и выполнены граничные условия (2)-(3).

При известных функциях $\widetilde{u}(\xi,\tau)$, $\widetilde{w}(\xi,\tau)$, решая двухточечную краевую задачу (8)-(9), определим функцию $\widetilde{v}(\xi,\tau)$. Из (10)-(11) по известной функции $\widetilde{v}(\xi,\tau)$ находим функции $\widetilde{u}(\xi,\tau), \widetilde{w}(\xi,\tau)$. Если $(v(x,t),u(x,t),w(x,t))$ – решение задачи (4)-(7), где $v(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $w(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, то с учетом замены $\xi=x-t, \tau=t$ $(\widetilde{v}(\xi,\tau),\widetilde{u}(\xi,\tau),\widetilde{w}(\xi,\tau))$ будет решением (8)-(11). И, наоборот, если $(\widetilde{v}(\xi,\tau),\widetilde{u}(\xi,\tau),\widetilde{w}(\xi,\tau))$ является решением задачи (8)-(11), то, учитывая замены $x=\xi+\tau, t=\tau$, $(v(x,t),u(x,t),w(x,t))$ будет решением задачи (4)-(7) на $\overline{\Omega}$.

Для нахождения решения задачи (8)-(11) строим алгоритм.

Шаг 0: В (8) принимая $\widetilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)$ и $\widetilde{w}(\xi,\tau)=\dot{\Psi}(\tau)$, решив двухточечную краевую задачу (8)-(9), определим начальное приближение $\widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$. Используя $\widetilde{v}(\xi,\tau)=\widetilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$, из соотношений (10)-(11) находим $\widetilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$ и $\widetilde{w}^{(0)}(\xi,\tau)$ соответственно.

Шаг 1: Взяв в правой части (8) $\widetilde{u}(\xi,\tau)=\widetilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$ и $\widetilde{w}(\xi,\tau)=\widetilde{w}^{(0)}(\xi,\tau)$, решая краевую задачу (8)-(9), определим приближение $\widetilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$. Подставляя в (10)-(11) найденную функцию $\widetilde{v}^{(1)}(\xi,\tau)$, находим $\widetilde{u}^{(1)}(\xi,\tau)$ и $\widetilde{w}^{(1)}(\xi,\tau)$. И т. д. Продолжив этот процесс, на k-м шаге получим $(\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau),\widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau),\widetilde{w}^{(k)}(\xi,\tau))$.

Заметим, что на каждом шаге указанного алгоритма применяем метод параметризации [5] для нахождения решения двухточечной краевой задачи.

Одним из основных условий однозначной разрешимости поставленной задачи является обратимость матрицы $Q_\nu(\xi,h)$, $\nu=1,2,...$, $h>0$:

$$Q_\nu(\xi,h)=$$

$$=\begin{bmatrix} hB(\xi) & 0 & 0...0 & hC(\xi)(I+D_{\nu N}(\xi,h)) \\ I+D_{\nu 1}(\xi,h) & -I & 0...0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}(\xi,h) & -I...0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0...I+D_{\nu N-1}(\xi,h) & -I \end{bmatrix},$$

I - единичная матрица размерности n,

$$D_{\nu r}(\xi,h)=$$

$$=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\widetilde{A}(\xi,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\widetilde{A}(\xi,\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}\widetilde{A}(\xi,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+..+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\widetilde{A}(\xi,\tau_1)...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widetilde{A}(\xi,\tau_\nu)d\tau_\nu...d\tau_1.$$

Из непрерывности исходных данных следует, что матрица $Q_\nu(\xi,h)$ является непрерывной по $\xi\in[0,\omega]$ для любого $\nu, \nu=1,2,...$.

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $h>0: Nh=T$, *и* $\nu, \nu=1,2,..., (nN\times nN)$ – *матрица* $Q_\nu(\xi,h)$ *обратима при всех* $\xi\in[0,\omega]$ *и выполняются неравенства:*

а) $\left\|[Q_\nu(\xi,h)]^{-1}\right\|\le\gamma_\nu(h)$;

б) $q_\nu(\xi,h)=$

$$=\gamma_\nu(h)\max\{1,h\|C(\xi)\|\}\left[e^{\alpha(\xi)h}-1-\alpha(\xi)h-...\right.$$

$$\left....-\frac{(\alpha(\xi)h)^\nu}{\nu!}\right]\le\sigma<1$$

где $\alpha(\xi)=\max\limits_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{A}(\xi,\tau)\right\|, \sigma=const.$

Тогда последовательные приближения $\left(\tilde{v}^{(k)}(\xi,\tau),\tilde{u}^{(k)}(\xi,\tau),\tilde{w}^{(k)}(\xi,\tau)\right)$ *равномерно сходятся* $\left(\tilde{v}^{*}(\xi,\tau),\tilde{u}^{*}(\xi,\tau),\tilde{w}^{*}(\xi,\tau)\right)\in C\left(\overline{\mathrm{H}},R^{n}\right)$ – *к единственному решению задачи (8)-(11).*

Доказательство. Следуя доказательству теоремы [5] проведем доказательство теоремы. По выше, указанному алгоритму ищем решение задачи (8)-(11). Приняв в (8) $\tilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)$ и $\tilde{w}(\xi,\tau)=\dot{\Psi}(\tau)$ из (8)-(9), находим нулевое решение $\tilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)$. На основе соотношений (10)-(11) найдем функции $\tilde{u}^{(0)}(\xi,\tau)$ и $\tilde{w}^{(0)}(\xi,\tau)$. Из двухточечной краевой задачи находим k-е приближение функции $\tilde{v}^{(k)}(\xi,\tau)\in C\left(\overline{\mathrm{H}},R^{n}\right)$, $k=1,2,...$

$$\frac{\partial\tilde{v}^{(k)}}{\partial\tau}=\tilde{A}(\xi,\tau)\tilde{v}^{(k)}+\tilde{P}(\xi,\tau)w^{(k-1)}(\xi,\tau)+\tilde{S}(\xi,\tau)\tilde{u}^{(k-1)}(\xi,\tau)+$$

$$+\tilde{f}(\xi,\tau),\ \xi\in[0,\omega],\tau\in[(r-1)h,rh),\qquad(12)$$

$$B(\xi)\tilde{v}^{(k)}(\xi,0)+C(\xi)\tilde{v}^{(k)}(\xi,T)=d(\xi),\qquad\xi\in[0,\omega].\ (13)$$

Функции $\tilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)$, $\tilde{w}^{(k)}(\xi,\tau)$, $k=1,2,...$ определим из функциональных соотношений

$$\tilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)+\int_{\tau}^{\xi+\tau}\tilde{v}^{(k)}(\varsigma,\tau)d\varsigma,\qquad(\xi,\tau)\in\overline{\mathrm{H}},\ (14)$$

$$\tilde{w}^{(k)}(\xi,\tau)=\dot{\Psi}(\tau)+\int_{\tau}^{\xi+\tau}\frac{\partial\tilde{v}^{(k)}}{\partial\tau}(\varsigma,\tau)d\varsigma,\ (\xi,\tau)\in\overline{\mathrm{H}}.\ (15)$$

Линейная краевая задача для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tau}=\tilde{A}(\xi,\tau)\tilde{v}+F(\xi,\tau),\qquad\tau\in[0,T]\qquad(16)$$

с условием (9) имеет единственное решение $\tilde{v}(\xi,\tau)\in C\left(\overline{\mathrm{H}},R^{n}\right)$, и справедлива оценка

$$\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{v}(\xi,\tau)\right\|\le M_{v}(\xi,h)\max\left(\left\|d(\xi)\right\|,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|F(\xi,\tau)\right\|\right),\ (17)$$

где $$M_{v}(\xi,h)=\left\{\gamma_{v}(h)\left[e^{\alpha(\xi)h}-1\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\max\left\{1+h\left\|C(\xi)\right\|\sum_{j=0}^{v-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^{j}}{j!},\sum_{j=0}^{v-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^{j}}{j!}\right\}+e^{\alpha(\xi)h}\Bigg\}h\cdot$$

$$\cdot\left[\gamma_{v}(h)e^{\alpha(\xi)h}\frac{1}{1-q_{v}(\xi,h)}\max\left(1,h\left\|C(\xi)\right\|\frac{(\alpha(\xi)h)^{v}}{v!}+1\right]+\right.$$

$$+\gamma_{v}(h)\max\left\{1+h\left\|C(\xi)\right\|\sum_{j=0}^{v-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^{j}}{j!},\sum_{j=0}^{v-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^{j}}{j!}\right\}h.$$

Дадим определение корректной разрешимости задачи (16),(9).

Определение. Задача (16), (9) называется корректно разрешимой, если для любых $F(\xi,\tau)\in C\left(\overline{\mathrm{H}},R^{n}\right)$ и $d(\xi)\in C\left([0,\omega],R^{n}\right)$ она имеет единственное решение $\tilde{v}(\xi,\tau)\in C\left(\overline{\mathrm{H}},R^{n}\right)$ и для него имеет место оценка

$$\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{v}(\xi,\tau)\right\|\le K(\xi)\max\left(\left\|d(\xi)\right\|,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|F(\xi,\tau)\right\|\right),\ (18)$$

где $K(\xi)$– непрерывная на $[0,\omega]$ функция, не зависящая от $F(\xi,\tau),d(\xi)$.

Из (18) вытекает, что при выполнении условии теоремы 1 задача (16), (9) корректно разрешима с функцией $K(\xi)=M_{v}(\xi,h)$.

В оценке (18) возьмем максимум по ξ, тогда получим константу корректной разрешимости K, которая определяется по исходным данным задачи (16),(9) и не зависит от $F(\xi,\tau),d(\xi)$, и справедлива оценка

$$\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{v}(\xi,\tau)\right\|\le K\max\left(\left\|d(\xi)\right\|,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|F(\xi,\tau)\right\|\right),\ (19)$$

где $K=\gamma_{v}(h)\max\left\{1+h\left\|C(\xi)\right\|e^{\alpha(\xi)h},e^{\alpha(\xi)h}\right\}h$.

Учитывая (19), имеем

$$\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)\right\|\le K\max\cdot$$

$$\cdot\left(\left\|d(\xi)\right\|,p\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\dot{\Psi}(\tau)\right\|+s\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\Psi(\tau)\right\|+\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{f}(\xi,\tau)\right\|\right),(20)$$

$$\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\frac{\partial\tilde{v}^{(0)}(\xi,\tau)}{\partial\tau}\right\|\le aK\max\left(\left\|d(\xi)\right\|,p\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\dot{\Psi}(\tau)\right\|+\right.$$

$$\left.+s\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\Psi(\tau)\right\|+\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{f}(\xi,\tau)\right\|\right)+$$

$$+p\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\dot{\Psi}(\tau)\right\|+s\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\Psi(\tau)\right\|+\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{f}(\xi,\tau)\right\|.\ (21)$$

Здесь K не зависит от $d(\xi),\Psi(\tau),\tilde{f}(\xi,\tau)$; $a=\max_{\xi\in[0,\omega]}\alpha(\xi)$, $\max_{(\xi,\tau)\in\overline{\mathrm{H}}}\left\|\tilde{P}(\xi,\tau)\right\|=p$, $\max_{(\xi,\tau)\in\overline{\mathrm{H}}}\left\|\tilde{S}(\xi,\tau)\right\|=s$.

Используя (19), (20) и (21), оценим

$$\max\left(\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{v}^{(k+1)}(\xi,\tau)-\tilde{v}^{(k)}(\xi,\tau)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tilde{v}^{(k+1)}(\xi,\tau)-\tilde{v}^{(k)}(\xi,\tau)\right)\right\|\right)\le$$

$$\le\max\left(K(p+s),aK(p+s)+(p+s)\right)\cdot$$

$$\cdot\max\left(\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)-\tilde{u}^{(k-1)}(\xi,\tau)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{w}^{(k)}(\xi,\tau)-\tilde{w}^{(k-1)}(\xi,\tau)\right\|\right)\le$$

$$\le\max(K,aK+1)(p+s)\max\left(\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)-\tilde{u}^{(k-1)}(\xi,\tau)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{w}^{(k)}(\xi,\tau)-\tilde{w}^{(k-1)}(\xi,\tau)\right\|\right),$$

где $\max\left(\max\limits_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)-\widetilde{u}^{(k-1)}(\xi,\tau)\right\|,\right.$

$$\left.\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{w}^{(k)}(\xi,\tau)-\widetilde{w}^{(k-1)}(\xi,\tau)\right\|\right)\le$$

$$\le\int_{\tau}^{\xi+\tau} max\left(\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{v}^{(k)}(\varsigma,\tau)-\widetilde{v}^{(k-1)}(\varsigma,\tau)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}^{(k)}}{\partial\tau}(\varsigma,\tau)-\frac{\partial\widetilde{v}^{(k-1)}}{\partial\tau}(\varsigma,\tau)\right\|\right)d\xi. \quad (22)$$

Учитывая (22), имеем

$$\max\left(\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{v}^{(k+1)}(\xi,\tau)-\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\widetilde{v}^{(k+1)}(\xi,\tau)-\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau)\right)\right\|\right)\le$$

$$\max(K,aK+1)(p+s)\cdot$$

$$\cdot\int_{\tau}^{\xi+\tau} max\left(\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{v}^{(k)}(\varsigma,\tau)-\widetilde{v}^{(k-1)}(\varsigma,\tau)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}^{(k)}}{\partial\tau}(\varsigma,\tau)-\frac{\partial\widetilde{v}^{(k-1)}}{\partial\tau}(\varsigma,\tau)\right\|\right)d\xi. \quad (23)$$

Из (19), (20) и (21) следует равномерная на $\overline{H}$ сходимость последовательностей $\left\{\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau)\right\}$, $\left\{\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\tau}(\xi,\tau)\right\}$, $\left\{\widetilde{w}^{(k)}(\xi,\tau)\right\}$, $\left\{\widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau)\right\}$ при $k\to\infty$. Эти последовательности сходятся к предельным функциям $\widetilde{v}^{*}(\xi,\tau)$, $\widetilde{w}^{*}(\xi,\tau)$ и $\widetilde{u}^{*}(\xi,\tau)$, которые являются решением задачи (8)-(11). Воспользовавшись оценками (19), (20) и (23), имеем

$$\max\left(\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{v}^{*}(\xi,\tau)\right\|,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{w}^{*}(\xi,\tau)\right\|,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{u}^{*}(\xi,\tau)\right\|\right)\le$$

$$\le K^{*}\max\left(\left\|d(\xi)\right\|,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\widetilde{f}(\xi,\tau)\right\|,\ \max_{\tau\in[0,T]}\left\|\Psi(\tau)\right\|\right), \quad (24)$$

где K^{*} не зависит от $d(\xi),\Psi(\tau),\widetilde{f}(\xi,\tau)$.

В оценке (24) возьмем максимум по ξ, тогда имеем

$$\max\left(\left\|\widetilde{v}^{*}\right\|_1,\left\|\widetilde{w}^{*}\right\|_1\left\|\widetilde{u}^{*}\right\|_1\right)\le$$

$$K^{*}\max\left(\left\|d\right\|_1,\left\|\widetilde{f}\right\|_1,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\dot{\Psi}(\tau)\right\|,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\Psi(\tau)\right\|\right).$$

Единственность решения задачи доказывается методом от противного. Что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение* $u^{*}(x,t)$.

Из теоремы 1 вытекает, что задача (8)-(11) однозначно разрешима.Так как задача (8)-(11) эквивалентна задаче (4)-(7), а задача (4)-(7) эквивалентна задаче (1)-(3), то получим, что задача (1)-(3) имеет единственное решение $u^{*}(x,t)$.

Если построенное решение в широком смысле непрерывно дифференцируемо по x и t, то функция $u(x,t)$, обладающая непрерывными частными производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющая уравнению (1) при всех $(x,t)\in\overline{\Omega}$ с условиями (2)-(3), является и классическим решением задачи (1)-(3).

Список использованной литературы:

1. Джураев Т.Д., Абдиназаров С. К теории уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками // Доклады АН СССР.1991.320, №6. С. 1305-1309.
2. Маловичко В.А. О краевых задачах для гиперболических систем высокого порядка // Математическая физика и нелинейная механика.1991. №15. С. 63-66.
3. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Критерий корректной разрешимости краевой задачи для системы гиперболических уравнений // Известия МОН, НАН РК Сер. физ.-матем. 2002. №3. С. 20-26.
4. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доклады РАН. 2003. Т. 391, №3. С. 295-297.
5. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, №1. С. 50-66.
6. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1968. 592 с.

Статья поступила в редакцию 12.04.07