Севодин М.А., Гаврилова М.О.
Пермский государственный технический университет

О СВОЙСТВЕ ВНЕШНЕЙ НЕЭКОНОМИЧНОСТИ В ЗАДАЧЕ ВЫРАВНИВАНИЯ ЦЕН НА ФАКТОРЫ ПРОИЗВОДСТВА

В задаче о выравнивании цен на факторы производства из теории международной торговли рассмотрены ситуации, в которых нарушается свойство отсутствия внешней неэкономичности технологических множеств. Для таких случаев найдены условия, обеспечивающие выравнивание цен на производственные факторы. Указаны варианты, когда наличие внешней неэкономичности не вызывает никаких дополнительных требований для решения задачи.

В теории международной торговли известной проблемой является выравнивание цен на факторы производства. Эту проблему можно сформулировать так: будут ли одинаковыми доходы от использования факторов производства в различных странах в случае абсолютно конкурентного мирового рынка продуктов с одинаковыми для всех стран функциями производства и производственными возможностями, но разными ресурсами факторов. Наиболее изученным здесь является случай, когда число продуктов совпадает с числом производственных факторов. Известны условия (см., напр. [1, §20]), при которых выравнивание цен наступает. В данной работе делается попытка ослабить одно из этих условий, а именно условие отсутствия внешней неэкономичности.

Приведем математическую постановку задачи [1, с. 454]. Имеется n продуктов и n факторов производства, причем каждая отрасль в каждой стране производит только один продукт. Осуществляется международная торговля продуктами производства без перемещения факторов производства между странами. Все страны обладают разными ресурсами факторов и одинаковыми производственными возможностями, при которых удельные затраты не зависят от масштабов производства и отсутствует внешняя неэкономичность.

В силу указанных условий технологическое множество T_i для отрасли, производящей i-й продукт $(i = 1,\ldots,n)$, имеет следующие структурные свойства:

(I) T_i – конус, то есть $T_i \supset \gamma T_i$ для любого числа $\gamma \ge 0$. Это свойство обеспечивает постоянство удельного выпуска независимо от масштабов производства и означает, что изменение затрат приводит к пропорциональному изменению выпусков в том же отношении.

(II) Неосуществимость «рога изобилия»: если $(0,\lambda_i) \in T_i$, то $\lambda_i = 0$.

(III) В множестве T_i существует процесс, обеспечивающий положительный выпуск.

(IV) Строгая выпуклость: если $(x^i,\lambda_i) \in T_i$, $(u^i,\mu_i) \in T_i$ и векторы x^i и u^i линейно независимы, то для любых двух положительных чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, можно указать уровень выпуска i-го продукта η_i такой, что $(\alpha x^i + \beta u^i, \eta_i) \in T_i, \alpha\lambda_i + \beta\mu_i < \eta_i$.

Здесь технологические множества T_i являются замкнутыми множествами, лежащими в декартовом произведении $R_+^n \times R_+^1$. Для процесса $(x^i,\lambda_i) \in T_i$ вектор $x^i = (x_j^i)$ представляет собой вектор затрат, а λ_i – соответствующий затратам уровень выпуска i-го продукта.

Если теперь для любого вектора цен на факторы производства w, $w > 0$ определить функцию удельных издержек $c_i(w)$ производства i-го продукта равенством $c_i(w) = \min\langle w, x^i \rangle$ по всем процессам $(x^i,1) \in T_i$, то оказывается, что вектор удельных затрат, минимизирующий величину $\langle w, x^i \rangle$, является единственным. Следовательно, $c_i(w)$, $i = 1,\ldots,n$, могут рассматриваться как однозначные функции.

Функции издержек $c_i(w)$, $i = 1,\ldots,n$, для всех стран будут одинаковыми, что следует из равенства производственных возможностей стран. Пусть между странами осуществляется торговля произведенными продуктами по ценам $p = (p_i)$. Тогда в рамках модели конкурентного равновесия мировая цена p_i i-го продукта должна совпадать с удельными издержками $c_i(w)$ производства этого продукта. Таким образом, имеет место система равенств:

$$c_i(w) = p_i, i = 1,\ldots,n. \quad (1)$$

По Самуэльсону [2], [3], единственность решения системы (1) обеспечивает выравнивание цен на производственные факторы без их перемещения между странами.

Исследованию единственности решения системы (1) посвящены многие работы (см., напр., [1, §20], [4], [5], [6]). Приведем здесь результат Гейла и Никайдо, в котором условия единственности получены в терминах якобиевой матрицы системы (1).

Теорема 1 [1, с. 472]. Если область определения w отображения $c(w)=(c_1(w),\dots,c_n(w))$ является прямоугольной областью W и если якобиева матрица этого отображения является P-матрицей всюду в W, то отображение $c(w)$ взаимно однозначно в W и цены на факторы производства выравниваются.

Существенным в такой постановке задачи является требование (IV). Оно обеспечивает однозначность функции издержек $c_i(w)$ и тем самым позволяет вопрос о выравнивании цен на факторы производства сводить к единственности решения системы (1). Само по себе свойство (IV) означает отсутствие внешней неэкономичности или, другими словами, возможность такой выпуклой линейной комбинации двух линейно независимых производственных процессов, при которой будет произведена не менее чем взвешенная сумма исходных выпусков за счет не более чем взвешенной суммы исходных затрат.

Однако для реальной экономики более характерной является такая организация технологического процесса, при которой наблюдается экономия на масштабах производства. Иначе говоря, при некоторых достаточно высоких объемах затрат дальнейшее их увеличение ведет к непропорционально большему увеличению выпусков, и закон постоянства удельного выпуска нарушается.

Другим примером может служить производственная ситуация, когда существуют некоторые ограничения на соотношения факторов производства. Например, в производстве сплавов: при определенных пропорциях использованных в сплаве металлов качества сплава становятся неприемлемыми.

Прямым следствием описанных особенностей производственных процессов является нарушение выпуклости технологического множества. С экономической точки зрения это означает возможность ситуации, когда совмещение двух процессов окажется невыгодным и приведет к снижению их общей эффективности.

Вышеуказанные причины приводят к необходимости изменения требования (IV). Для этого определим с некоторым $a\in R_+^n$ конус $K(a,\gamma)$, $0<\gamma<1$, соотношением

$$K(a,\gamma)=\left\{z\in R_+^n \,\middle|\, \left|\langle a,z\rangle\right|>\gamma\|a\|\|z\|\right\}.$$

Теперь вместо свойства (IV) потребуем от каждого множества T_i, $i=1,\dots,n$, выполнения следующего условия.

(IV') Строгая выпуклость в направлениях, ортогональных направлениям конуса $K_i(a,\gamma_i)$:

если для двух производственных процессов $(x^i,1)\in T_i$ и $(u^i,1)\in T_i$ выполняется $\langle (x^i-u^i),z\rangle=0$ с некоторым $z\in K_i(a,\gamma_i)$ и векторы x^i и u^i линейно независимы, то для любых двух положительных чисел $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$, вектор $(\alpha x^i+\beta u^i,1)$ принадлежит внутренности множества T_i, т. е.

$$(\alpha x^i+\beta u^i,1)\in \overset{0}{T}_i\,.$$

Наша задача сейчас – показать, что при выполнении условия (IV') для каждого положительного вектора цен на производственные факторы $w>0$, $w\in K(a,\gamma_0)$, $\gamma_0=\max\limits_{1\le i\le n}\gamma_i$, вектор удельных затрат, минимизирующий величину $\langle w,x^i\rangle$, является единственным.

В самом деле, рассмотрим две точки $(x_1^i,1)\in T_i$ и $(x_2^i,1)\in T_i$, $x_1^i\ne x_2^i$, и допустим, что обе они минимизируют $\langle w,x^i\rangle$ на множестве T_i. Тогда должно выполняться соотношение $\langle w,x_1^i\rangle=\langle w,x_2^i\rangle$, из которого следует, что $\langle w,(x_1^i-x_2^i)\rangle=0$. По условиям вектор $w\in K(a,\gamma_0)$. Значит, в силу свойства (IV') точка $((x_1^i+x_2^i)/2,1)\in \overset{0}{T}_i$. Имеют место равенства

$$\left\langle w,\frac{1}{2}(x_1^i+x_2^i)\right\rangle=\frac{1}{2}\langle w,x_1^i\rangle+\frac{1}{2}\langle w,x_2^i\rangle=\langle w,x_1^i\rangle=\langle w,x_2^i\rangle.$$

Итак, тогда $((x_1^i+x_2^i)/2,1)$ является внутренней точкой T_i и минимизирует на T_i функционал $\langle w,x^i\rangle$. Поэтому в $\overset{0}{T}_i$ существует точка $\left(x^i,1\right)$ достаточно близкая к точке $((x_1^i+x_2^i)/2,1)$, удовлетворяющая условию $(x_1^i+x_2^i)/2>x^i$. Ввиду положительности вектора w для $\hat{x}^i$ выполняется неравенство

$$\left\langle w, x^i \right\rangle < \left\langle w,(x_1^i + x_2^i)/2 \right\rangle = \left\langle w, x_1^i \right\rangle,$$

что противоречит допущению о минимизирующих $\langle w, x^i \rangle$ точках x_1^i и x_2^i.

Эти результаты показывают, что при наличии требований (I)–(III), (IV') и условия $w \in K_i(a,\gamma_0)$ определение (1) однозначного отображения $c(w) = (c_1(w),...,c_n(w))$ непротиворечиво.

Приведем пример технологического множества, удовлетворяющего перечисленным свойствам. Будем считать, что $x^i = (x_1^i, x_2^i) \in D \subset R_+^2$, причем $D = \Pi \cup \Pi_h$, где $\Pi = (a_1,b_1) \times (a_2,b_2)$, $0 < a_1 < b_1$, $0 < a_2 < b_2$, а Π_h – прямоугольник, который получается сдвигом прямоугольника Π на вектор $h = (h_1,h_2)$, $0 < h_1 < b_1 - a_1$, $0 < h_2 < b_2 - a_2$ (см. рис. 1).

Определим технологическое множество T_i соотношением (см. рис. 2)

$$T_i = \left\{ (\lambda x^i, \lambda) \middle| \lambda > 0, x^i \in D \right\}.$$

Нетрудно видеть, что T_i удовлетворяет свойствам (I)–(III), (IV') с $K(a,\gamma_i) = K\left(a, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, где $a = (1,1)$. С другой стороны, приведенное множество T_i не удовлетворяет свойству (IV).

Заметим, наконец, что стандартные условия на векторы цен $w > 0$, $w \in R_n^+$, обеспечивают принадлежность w конусу $K\left(a, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $a = (1,...,1)$. Следовательно, если в (IV') конусы $K(a,\gamma_i)$ таковы, что $a = (1,\ldots,1)$ и $\gamma_i \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, $i = 1,\ldots,n$, то дополнительных условий на векторы цен на производственные факторы накладывать не нужно.

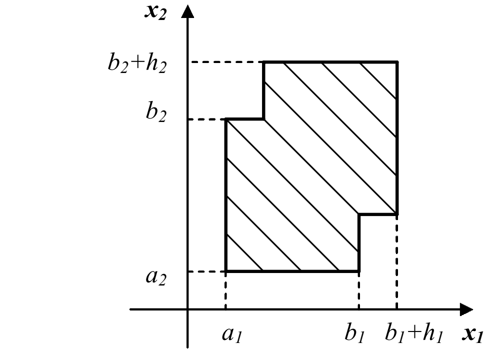

Рисунок 1. Множество D

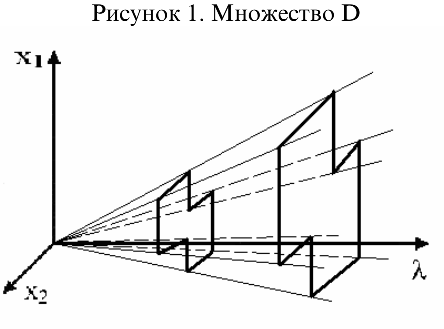

Рисунок 2. Технологическое множество

Перейдем теперь к изучению единственности решения системы (1). Как мы видели (см. теорему 1), обычно за областью определения функций издержек здесь берутся прямоугольные области, лежащие в R_n^+. Требование $w \in K(a,\gamma_0)$ приводит к тому, что приходится говорить об областях определения функций $c_i(w)$ другого характера. Тем не менее, из результатов [1, с. 478] сразу следует

Теорема 2. Если область определения отображений $c_i(w)$, $i = 1,\ldots,n$, представляет собой пересечение прямоугольной области из R_n^+ и конуса $K(a,\gamma_0)$ и если якобиева матрица $J(w) = c_{ij}(w)$ отображения $c(w) = (c_1(w),\ldots,c_n(w))$ является положительно (отрицательно) квазиопределенной всюду в области определения, то цены на факторы производства выравниваются.

Требование $w \in K(a,\gamma_0)$, которое необходимо накладывать в задаче, когда (IV) заменяется на (IV'), приводит к новому взгляду на область определения отображения $c(w)$. Во всяком случае, естественными теперь выглядят не только прямоугольные области. В качестве примеров мы рассмотрим следующие две теоремы. Имеют место

Теорема 3. Пусть областью определения отображения $c(w) = (c_1(w),\ldots,c_n(w))$ является множество

$$G = \left\{ w \in K(a,\gamma_0) \middle| 0 < B_1 < \|w\| < B_2 \right\}, \quad (2)$$

а якобиева матрица $J(w)$ отображения $c(w)$ удовлетворяет условию

$$\|J(w) - E\| < \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\gamma_0}}{\arccos \gamma_0}, w \in G,$$

тогда цены на факторы производства выравниваются.

Теорема 4. Пусть областью определения отображения $c(w) = (c_1(w),\ldots,c_n(w))$ является односвязная область G, которая получается объединением конечного числа прямоугольников, образованных сдвигами в одном направлении прямоугольника $\Pi = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_i, b_i)$, $0 < a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, а якобиева матрица $J(w)$ отображения $c(w)$ удовлетворяет условию

$$\|J(w) - E\| < \frac{1}{\sqrt{2}}, w \in G,$$

тогда цены на факторы производства выравниваются.

Здесь E – единичная матрица размерности $n \times n$, а $\|A\| = \sup_{\|h\|=1} \|Ah\| / \|h\|$ – операторная норма.

Докажем теорему 3. Теорема 4 доказывается аналогично.

Покажем взаимную однозначность отображения $c(w)$, а значит, и справедливость теоремы. Известно [7, с. 20], что отображение $c(w)$ будет инъективным в G, если оно инъективно на каждой из компонент связности множества $G | K$, где $K = \overline{K}$ – некоторое множество, лежащее в G. Поэтому нам нужно обосновать неравенство $c(w_1) \neq c(w_2)$ для несовпадающих точек w_1 и w_2. В силу условия (2) отображение $c(w)$ является локально взаимно однозначным, и поэтому названное свойство достаточно проверить для произвольных граничных точек w_1, w_2 области

$$G(\varepsilon, \rho) = \{w \in K(a, \gamma_0 + \varepsilon) \mid B_1 + \rho < \|w\| < B_2 - \rho\}$$

при любых фиксированных ε, $0 < \varepsilon < 1 - \gamma_0$, и ρ, $0 < \rho < B_2 - B_1$.

Итак, нам нужно доказать, что если w_1, w_2, $w_1 \neq w_2$, принадлежат границе области $G(\varepsilon, \rho)$, то $c(w_1) \neq c(w_2)$.

Рассмотрим два случая:

1) $\|w_1\| \neq B_1 + \rho$;

2) $\|w_1\| = \|w_2\| = B_1 + \rho$.

В первом случае, следуя [1, с. 478], положим $w(t) = w_1 + th$, где $h = (h_1, \ldots, h_n) = w_2 - w_1 \neq 0$. Очевидно, что при $0 \le t \le 1$ имеем $w(t) \in \overline{G}(\varepsilon, \rho)$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{n} (c_i(w(t)) - c_i(w_1)) h_i, \; 0 \le t \le 1.$$

Дифференцируя, получим

$$\Phi'(t) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(w(t)) h_i h_j$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|J(w(t))h\|^2 + \|h\|^2 - \|(J(w(t)) - E)h\|^2\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\left(\|h\|^2 - \|J(w(t)) - E\|^2 \cdot \|h\|^2\right) \ge \frac{1}{2}\|h\|^2 \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\gamma_0}}{\arccos \gamma_0}\right)^2\right) > 0$$

Так как $\Phi(0) = 0$ и $\Phi'(t) > 0$ (при всех t), мы имеем $\Phi(1) \neq 0$. Следовательно, $c_i(w_1) - c_i(w_2) \neq 0$ хотя бы для одного i, что и доказывает неравенство $c(w_1) \neq c(w_2)$.

Рассматривая второй случай $(\|w_1\| = \|w_2\| = B_1 + \rho)$, положим $w(t) = \cos t w_1 - \sin t (ctg \alpha w_1 - w_2 / \sin \alpha)$, $0 \le t \le \alpha$, где α – угол между векторами w_1, w_2.

Вычисления показывают, что $\|w(t)\| = B_1 + \rho$. Кроме того, $w(t) \in K(a, \gamma_0 + \varepsilon)$ как выпуклая комбинация точек λw_1, λw_2, $\lambda = \frac{\sin \alpha}{\cos t}$, принадлежащих конусу $K(a, \gamma_0 + \varepsilon)$. Значит $w(t) \in \overline{G}(\varepsilon, \rho)$, $0 \le t \le \alpha$.

Теперь воспользуемся схемой из [8]. Имеем

$$c(w_2) - c(w_1) = \int_0^{\alpha} J(w(t)) w'(t) dt =$$

$$= \int_0^{\alpha} w'(t) dt + \int_0^{\alpha} (J(w(t)) - E) w'(t) dt.$$

Отсюда получим

$$\|c(w_2) - c(w_1)\| \ge \left\| \int_0^{\alpha} w'(t) dt \right\| - \left\| \int_0^{\alpha} (J(w(t)) - E) w'(t) dt \right\| >$$

$$> \|w_2 - w_1\| - \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\gamma_0}}{\arccos \gamma_0} \int_0^{\alpha} \|w'(t)\| dt \ge 0,$$

т. к. $\int_0^{\alpha} \|w'(t)\| dt \le \frac{\arccos \gamma_0}{\sqrt{2}\sqrt{1-\gamma_0}} \|w_2 - w_1\|$.

Таким образом, $\|c(w_2) - c(w_1)\| > 0$ и, следовательно, $c(w)$ взаимно однозначна в G.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что замена условия (IV) на (IV’) и дополнительные требования на функции издержек $c(w)$ оставляют справедливым не только вывод о выравнивании цен на факторы производства, но и некоторые качественные характеристики процесса выравнивания цен.

Так, например, потребуем, чтобы якобиева матрица $J(w)$ отображения $c(w)$ удовлетворяла условию Столпера-Самуэльсона, т. е.

i) матрица $J(w)$ неотрицательна,

ii) матрица $J(w)$ невырождена,

iii) все внедиагональные элементы обратной матрицы $J^{-1}(w)$ неположительны.

Известно [1, с. 499], что в этом случае повышение цены на i-й продукт вызывает повышение цены на i-й производственный фактор. При этом цены на все остальные факторы не увеличиваются.

Рассуждения, полностью аналогичные доказательству этого факта [1, с. 498], показывают, что приведенные выводы сохраняют свою силу, если вместо условий (i), (ii) потребовать выполнения условий на отображение $c(w)$ и его якобиевой матрицы $J(w)$ из теоремы 3.

Список использованной литературы:

1. Никайдо, Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М.: Мир, 1972. – 518 с.
2. Samuelson, P.A. International Trade find the Equalization of Factor Prices / P.A. Samuelson // Economic Journal. – 1948. – №58. – P. 163-184.
3. Samuelson, P.A. International Factor Price Equalization Once Again / P.A. Samuelson // Economic Journal. – 1949. – №59. – P. 181-197.
4. Blackorby, C. Nessessary and Safficient Conditions for Factor Price-Equalization / C. Blackorby, W. Schworm, A. Venables // Review of Economic Studies. – 1993. – №60. – P. 413-434.
5. Mayer, W. Factor quality, factor prices and production patterns / W. Mayer // J.Int.Econ. – 1982. – T. 12. – №1-2. – P. 25-40.
6. Katsuhiko, S. The Rybczynski theorem in the three-factor, two-good model / S. Katsuhiko // Econ.Lett. – 1985. – T 17. – №3. – P. 267-269.
7. Авхадиев, Ф.Г. Конформные отображения и краевые задачи / Ф.Г. Авхадиев. – Казань: Казанский фонд «Математика», 1996. – 216 с.
8. Рогожин, В.С. Достаточные условия однолистности обратных краевых задач / В.С. Рогожин // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22. – №6. – С. 804-807.

Статья поступила в редакцию 22.10.07