Сокотущенко В.Н.
Орловский государственный технический университет

УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ВЯЗКОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ВТОРОГО КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ

Следствия уравнений движения частицы вязкой среды, в отличие от упругой среды, не являются волновыми уравнениями в связи с наличием в них коэффициентов вязкости. При равных нулю коэффициентах вязкости из полученных в работе дифференциальных уравнений, представляющих собой следствия уравнений Навье - Стокса, следуют волновые уравнения, которым удовлетворяют функции плотности, давления и первого инварианта тензора скоростей деформаций частицы идеальной сжимаемой среды. Уравнения малых механических возмущений в вязкой изотропной среде представлены с учетом второго коэффициента вязкости.

Соотношение закона Гука для вязкой среды имеет вид [1]:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{K}{\rho}, \qquad (1)$$

где K – модуль объемной упругости вязкой среды.

Полагая K постоянной величиной, из (1) имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -Ke. \qquad (2)$$

Далее введем обозначения:

$\nu = \dfrac{\mu'}{\rho_0}$ – кинематический коэффициент вязкости,

$\Lambda = \lambda' + \dfrac{2}{3}\mu'$ – второй коэффициент вязкости,

$c = \sqrt{\dfrac{K}{\rho_0}}$ – скорость распространения механических возмущений в вязкой среде.

В случае адиабатического обратимого (изоэнтропического) процесса – c является скоростью звука. С помощью (2), используя введенные обозначения, известным следствиям уравнений Навье - Стокса можно придать вид:

$$\left[1 + \left(\frac{4}{3}\frac{\nu}{c^2} + \frac{\Lambda}{K}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla e - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0,$$

$$\left[1 + \left(\frac{4}{3}\frac{\nu}{c^2} + \frac{\Lambda}{K}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla \rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = q(x^\alpha), \qquad (3)$$

$$\left[1 + \left(\frac{4}{3}\frac{\nu}{c^2} + \frac{\Lambda}{K}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0,$$

где $q(x^\alpha)$ – некоторая функция координат.

В соответствии с теоремой Гельмгольца, всякий вектор, и в частности вектор скорости, может быть разложен на потенциальную (безвихревую) и соленоидальную части:

$$v^\alpha = g^{\alpha\beta}\varphi_{;\beta} + e^{\alpha\beta\gamma}\psi_{\gamma;\beta}, \qquad (4)$$

где φ – скалярный, ψ – векторный ($\psi^\alpha_{;\alpha} = 0$) потенциалы скорости.

При этом ковариантная производная от ковариантных компонент вектора равна:

$$\psi_{\alpha;\beta} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\beta} - G^\gamma_{\alpha\beta}\psi_\gamma,$$

где $G^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta}\right)$, представляют собой симметричные по нижним индексам символы Кристоффеля второго рода. Учитывая, что сумма $G^\gamma_{\alpha\beta}e^{\alpha\beta\delta} \equiv 0$, а также равенство ковариантной производной от скалярной функции и ее частной производной, имеем из (4) выражение для компонент скорости в виде:

$$v^\alpha = g^{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} + e^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial \psi_\gamma}{\partial x^\beta}, \quad v^\alpha_{;\lambda} = g^{\alpha\beta}\varphi_{;\beta\lambda} + e^{\alpha\beta\gamma\psi}{}_{\gamma;\beta\lambda}.$$

Например, в ортогональной криволинейной системе координат $g_{\alpha\beta} = 0$ (при $\alpha \neq \beta$), получим:

$$v^1 = g^{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x^3}\right),$$

$$v^2 = g^{22}\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x^1}\right),$$

$$v^3 = g^{33}\frac{\partial \varphi}{\partial x^3} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x^2}\right), g = g_{11}g_{22}g_{33}.$$

Далее, дифференцируя контравариантно (4), имеем:

$$v^{\alpha;\lambda} = g^{\alpha\beta}\varphi^{;\lambda}_{;\beta\alpha} + e^{\alpha\beta\gamma}\psi^{;\lambda}_{\gamma;\beta\lambda},$$

свертка с компонентами метрического тензора дает выражение дивергенции вектора скорости через скалярный потенциал φ в виде: $e = \Delta\varphi$.

Домножая последние равенства на $e_{\delta\lambda\alpha}$, получим:

$$e_{\delta\lambda\alpha}v^{\alpha;\lambda} = e_{\delta\lambda\alpha}\varphi^{;\alpha\gamma\lambda} + e_{\delta\lambda\alpha}e^{\alpha\beta\gamma}\psi^{;\lambda}_{\gamma;\beta},$$

но

$$e_{\delta\alpha\lambda}\varphi^{;\alpha\lambda} \equiv 0, \qquad v^{\alpha;\lambda} = \Omega^{\alpha\lambda} + e^{\alpha\lambda},$$

поэтому

$$e_{\delta\lambda\alpha}\left(e^{\alpha\lambda} + \Omega^{\alpha\lambda}\right) = \left(\delta^{\beta}_{\delta}\delta^{\gamma}_{\lambda} - \delta^{\beta}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\delta}\right)\psi^{;\lambda}_{\gamma;\beta},$$

учитывая здесь, что

$$e_{\delta\alpha\lambda}e^{\alpha\lambda} \equiv 0,$$

получим

$$-e_{\delta\lambda\delta}\Omega^{\alpha\lambda} = \psi^{;\lambda}_{\lambda;\delta} - \psi^{;\beta}_{\delta;\beta},$$

откуда с помощью соответствующих обратных равенств, найдем

$$\Omega_{\alpha} = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi_{\alpha}. \qquad (6)$$

Аналогично для относительного изменения объема ε и компонент вектора поворота ω_α имеем:

$$\varepsilon = \Delta\varphi, \ \omega_{\alpha} = \frac{1}{2}\nabla^2\psi_{\alpha},$$

где φ, ψ_α – потенциалы вектора малых смещений, в частности частиц упругой среды.

Например, в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z), $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = 1$, при $\alpha = \beta$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, для компонент вектора перемещений $u_\alpha = u^\alpha$, получим выражение через потенциалы в виде:

$$u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z},$$

$$u_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x}, \ u_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}.$$

Таким образом, линеаризованным уравнениям движения можно придать вид:

– вязкая среда:

$$\left[1 + \left(\frac{4}{3}\frac{v}{c^2} + \frac{\Lambda}{k}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla^2\psi_\alpha - \frac{1}{v}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial t} = 0,$$

– упругая среда:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

– вязкая среда:

$$\nabla^2\psi_\alpha - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi_\alpha}{\partial t^2} = 0.$$

С помощью полученных уравнений можем рассматривать процессы распространения малых возмущений, в частности распространения звука в вязкой и упругой средах [2, 3].

Список использованной литературы:

1. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. – М.: МГУ, 1960. 335 с.
2. Сокотущенко В.Н. Распространение звука в смеси газов // Механизмы и машины ударного, периодического и вибрационного действия: Материалы II Междунар. науч. симп. – Орел, 2003. С. 162–166.
3. Сокотущенко В.Н. Взаимосвязь скоростей распространения теплоты и звука на поверхности упругой среды // Изв. ОрелГТУ. Машиностроение. Приборостроение. – 2004. – №2. – С. 30–32.