

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ СИНУСОИДАЛЬНОГО РАВНОАМПЛИТУДНОГО ПОЛИНОМА

В статье предложен один из методов аппроксимации равноамплитудных тригонометрических полиномов, обладающих равномерным неизменным дискретным спектром, – метод аппроксимации синусоидального полинома. Получены аналитические выражения для дискретного гармонического спектра аппроксимирующей функции, просчитаны его определяющие характеристики – коэффициент гармоник паразитного спектра и неравномерность амплитуд гармоник в рабочей области спектра.

Статья посвящена одному из методов аппроксимации равноамплитудных полиномов, частично освещенных в работе [1, с. 166-175], – методу аппроксимации синусоидального полинома вида

$$Ds_N(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, N = 3, 4, \dots \quad (1)$$

Результаты исследований, приведенные в статье, предполагается использовать для разработки методов формирования испытательных сигналов (ИС) в устройствах контроля и измерения частотных характеристик (ЧХ) узлов радиоэлектронной аппаратуры и средств телекоммуникаций в области инфранизких частот (ОИНЧ).

Измерение, контроль и идентификация ЧХ четырехполюсников в указанном диапазоне современными способами малопроизводительны, трудоемки и не отличаются высокой точностью. Так, например, высокоточные ручные методы анализа, в которых ЧХ анализируется путем последовательного воздействия на исследуемый четырехполюсник гармоническими сигналами разных частот, – требуют сложных систем стабилизации параметров ИС и значительных трудозатрат – до нескольких десятков человеко-часов.

Известны также методы автоматизированного анализа и контроля ЧХ, также основанные на последовательном воздействии гармоническими сигналами генератора с автоматической перестройкой частоты [2, 3, 4, 5]. Но в ОИНЧ они не позволяют повысить производительность измерений ЧХ при той же высокой точности предыдущих методов.

Рабочий диапазон частот современных автоматизированных измерителей амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) с приме-

нением генераторов качающейся частоты (ГКЧ) ограничен снизу частотой 20 Гц [6]. Ограниченность вызвана значительной величиной неравномерности спектра испытательного сигнала на выходе ГКЧ – частотно-модулированного импульса в полосе качания. Известно, что степень неравномерности спектральной плотности одиночного линейно частотно-модулированного (ЛЧМ) импульса напрямую связана с величиной так называемой базы [7]

$$B = \Delta f \cdot \tau_u, \quad (2)$$

где Δf – девиация частоты ЛЧМ-импульса или ширина полосы измерения АЧХ;

τ_u – длительность ЛЧМ-импульса.

С увеличением величины базы B спектральная плотность ЛЧМ-импульса становится более равномерной в полосе качания [7]. В одном из лучших измерителей АЧХ Х1-41 минимально возможная величина ширины полосы качания – 100 Гц, нижняя граничная частота полосы – $f_u = 20$ Гц, максимальное значение длительности рабочего хода развертки (длительности ЛЧМ-импульса) – 10 с [6]. Соответственно величина базы не превысит значения $B = 1000$, при котором обеспечивается паспортная величина неравномерности уровня выходного напряжения ГКЧ $\delta U = 0,5$ Дб, или 5,92%. При измерениях ЧХ в ОИНЧ частотный диапазон наблюдения и соответственно полоса качания Δf сузятся. Для сохранения той же равномерности напряжения на выходе ГКЧ или ее улучшения необходимо обеспечить величину базы $B \geq 1000$, то есть в соответствии с (2) – увеличить длительность ЛЧМ-импульса τ_u . Это потребует на частотах $f \leq 20$ Гц величин τ_u порядка сотен – нескольких тысяч секунд. То есть для измерения потребуется время, соизмеримое

с временными затратами в ручных методах, а в структуре ИАЧХ потребуются дополнительные устройства стабилизации внутренних параметров измерителя для уменьшения влияния внешних дестабилизирующих факторов – колебаний температуры, влажности, напряжения внешней питающей сети и так далее. Кроме того, ЛЧМ-импульсы, другие частотно модулированные сигналы имеют ненулевой нелинейный фазовый спектр, что делает их малопригодными для измерения ФЧХ.

Кроме ЛЧМ-сигналов в современных измерителях ЧХ в качестве зондирующих сигналов применяются *импульсные испытательные сигналы (ИИС) с короткой длительностью* прямоугольной или произвольной формы [8], а также *многочастотные сигналы* [9, 10].

Использование ИИС короткой длительности основано на отсутствии зависимости спектральной характеристики дельта-функции от частоты [11]. Однако неидеальное соответствие реальных ИИС короткой длительности дельта-импульсам приводит к искажению формы их спектральной функции. Например, спектральная характеристика прямоугольного импульса короткой длительности равномерна с точностью до 5% лишь в небольшой части ее главного лепестка [12] – в диапазоне частот

$$\Delta f = 0, \dots, 0,17 \cdot \frac{1}{\tau_u} . \quad (3)$$

При зондировании исследуемых четырехполюсников кратковременными ИИС или ИИС произвольной формы для измерения ЧХ возможно использование более широкого участка спектральной характеристики. Но в таком случае необходима дополнительная операция нормирования спектра [8] сигнала, принятого с выхода исследуемого объекта, а в конструкции измерителя ЧХ необходимо предусмотреть дополнительное запоминающее устройство с информацией о спектре ИС.

Многочастотный сигнал представляет из себя суммарный сигнал с выходов нескольких синхронизированных генераторов гармонических сигналов разных. Соответственно, количество измеряемых точек ЧХ ограничено количеством используемых генераторов. Кроме того, для изготовления одного

синусоидального генератора инфранизкой частоты требуются реактивные элементы (в основном конденсаторы) с большими значениями параметров, а соответственно и габаритными размерами, а также дополнительное устройство стабилизации частоты и амплитуды. Таким образом, структура многочастотного генератора в ОИНЧ получится очень громоздкой и ограниченной в плане универсальности применения.

В работе [1, с. 166-175] в целях усовершенствования измерителей ЧХ в ОИНЧ в плане снижения трудоемкости, повышения производительности измерений с сохранением приемлемой точности предлагается использовать в качестве генераторов ИС генераторы равноамплитудных полиномов (РАП) – функций, разлагающихся в тригонометрический ряд Фурье с одинаковыми амплитудами и нулевыми начальными фазами [13].

В связи с невозможностью реализации генераторов РАП на аналоговых схемах из-за присутствия в полиномах точек с неопределенностью вида «ноль на ноль» в работе [1, с. 166-175] предлагается вариант решения задачи воспроизведения РАП – разработка методов аппроксимации, а также предложены общие принципы упрощенной и уточненной аппроксимации равноамплитудного косинусоидального полинома вида

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, N = 3, 4, \dots \quad (4)$$

Упрощенная методика характеризуется относительной простотой математического выражения аппроксимирующей функции по сравнению со второй, в которой для повышения точности необходимо увеличивать количество операций умножения. Однако и качественные характеристики спектра аппроксимирующей функции в первой методике невысоки: коэффициент гармоник $k_{e,N}$ паразитного спектра приближается к 5% по сравнению с 0,5% в «уточненном» методе, равномерность спектра в рабочей полосе приближается к 10% против 2,2% в «уточненном».

Поэтому в настоящей статье продолжится поиск методов аппроксимации РАП, не уступающих по точности первому методу, но более простых, чем второй, и предлагается

упомянутый вначале метод аппроксимации функции (1), которая представляется суммой синусоидальных функций с одинаковыми амплитудами и нулевыми начальными фазами

$$Ds_N(x) = \sum_{n=1}^N \sin\left((2n-1)\frac{x}{2}\right), N = 3, 4, \dots \quad (5)$$

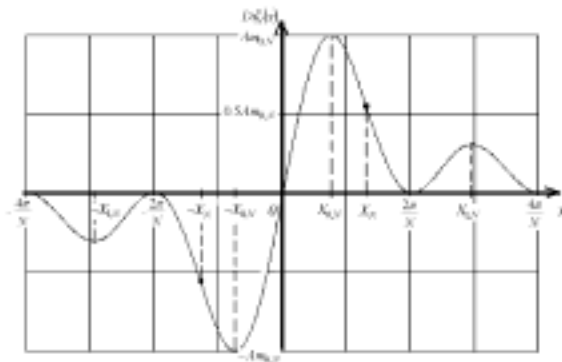
1. Суть метода заключается в следующем.

1) Определяются локальные точки экстремума $X_{0,N}$ и $X_{1,N}$ РАП (1) соответственно на интервалах (рисунок 1а) $x \in (0, \frac{2\pi}{N})$ и $x \in (\frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N})$, а также точка перегиба X_N на интервале $x \in (X_{0,N}, X_{1,N})$. Подробнее об особенностях определения указанных точек будет сказано ниже. Ввиду нечетности РАП (1) экстремумами для интервала $x \in (-\frac{4\pi}{N}, -\frac{2\pi}{N})$ и $x \in (-\frac{2\pi}{N}, 0)$ являются точки $x = -X_{1,N}$, $x = -X_{0,N}$, а точкой перегиба на интервале $x \in (-X_{1,N}, -X_{0,N})$ точка $x = -X_N$.

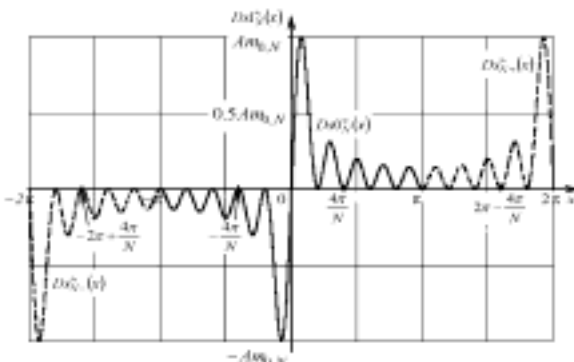
2) Одиночную реализацию аппроксимирующей функции на промежутке $x \in (-\pi, \pi]$ формируем следующим образом:

а) Для $x \in (-X_{0,N}, X_{0,N})$ функцию (1) аппроксимируем отрезком синусоиды

$$Ds00_N^{\approx}(x) = Am_{0,N} \sin(\omega_{0,N}x), \quad (6)$$



а



б

Рисунок 1. Графики аппроксимирующей функции

б) Для множества $x \in (-\frac{2\pi}{N}, -X_{0,N}) \cup \cup x \in [X_{0,N}, \frac{2\pi}{N})$ полином (1) аппроксимируется соответственно четверть-волнами синусоид

$$Ds10_N^{\approx}(x) = \begin{cases} Am_{1,N} \sin(\omega_{1,N}x + \Delta\phi_{1,N}) - Y0_{1,N}, & \text{при } x \in (-X_N, -X_{0,N}) \\ Am_{1,N} \sin(\omega_{1,N}x - \Delta\phi_{1,N}) + Y0_{1,N}, & \text{при } x \in [X_{0,N}, X_N) \end{cases} \quad (7)$$

в) На множестве $x \in (-\frac{4\pi}{N}, -\frac{2\pi}{N}) \cup [\frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N})$ применяются отрезки синусоид

$$Ds20_N^{\approx}(x) = \begin{cases} Am_{3,N} \sin(\omega_{3,N}x + \Delta\phi_{3,N}) - Y0_{2,N}, & \text{при } x \in (-X_{1,N}, -\frac{2\pi}{N}) \\ Am_{3,N} \sin(\omega_{3,N}x - \Delta\phi_{3,N}) + Y0_{2,N}, & \text{при } x \in [\frac{2\pi}{N}, X_{1,N}) \\ Am_{3,N} \sin(\omega_{4,N}x + \Delta\phi_{4,N}) - Y0_{2,N}, & \text{при } x \in (-\frac{4\pi}{N}, -X_{1,N}) \\ Am_{3,N} \sin(\omega_{4,N}x - \Delta\phi_{4,N}) + Y0_{2,N}, & \text{при } x \in [X_{1,N}, \frac{4\pi}{N}). \end{cases} \quad (8)$$

3) Параметры $Am_{0,N}, \dots, Am_{3,N}, Y0_{1,N}, Y0_{2,N}, \omega_{0,N}, \dots, \omega_{4,N}$ определяются из условий

$$\begin{cases} Ds00_N^{\approx}(X_{0,N}) = Ds10_N^{\approx}(X_{0,N}) = -Ds00_N^{\approx}(-X_{0,N}) = \\ = -Ds10_N^{\approx}(-X_{0,N}) = Ds_N(X_{0,N}) \\ Ds10_N^{\approx}(X_N) = -Ds10_N^{\approx}(-X_N) = Ds_N(X_N) \\ Ds20_N^{\approx}(X_{1,N}) = -Ds20_N^{\approx}(-X_{1,N}) = Ds_N(X_{1,N}) \\ Ds10_N^{\approx}(\frac{2\pi}{N}) = Ds20_N^{\approx}(\frac{2\pi}{N}) = Ds10_N^{\approx}(-\frac{2\pi}{N}) = \\ = Ds20_N^{\approx}(-\frac{2\pi}{N}) = Ds20_N^{\approx}(\frac{4\pi}{N}) = Ds20_N^{\approx}(-\frac{4\pi}{N}) = 0 \\ \omega_{0,N} \cdot X_{0,N} = \omega_{1,N} X_{0,N} - \Delta\phi_{1,N} = \\ = \omega_{3,N} X_{1,N} - \Delta\phi_{3,N} = \omega_{4,N} X_{1,N} - \Delta\phi_{4,N} = \frac{\pi}{2} \\ \omega_{1,N} X_N - \Delta\phi_{1,N} = \omega_{2,N} X_N - \Delta\phi_{2,N} = \pi \\ \omega_{2,N} \frac{2\pi}{N} - \Delta\phi_{2,N} = \omega_{3,N} \frac{2\pi}{N} - \Delta\phi_{3,N} = \\ = \omega_{4,N} \frac{4\pi}{N} - \Delta\phi_{4,N} = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (9)$$

из которых вытекает следующее решение:

$$\begin{cases}
 Am_{0,N} = Ds_N(X_{0,N}); \\
 Am_{1,N} = Ds_N(X_{0,N}) - Ds_N(X_N); \\
 Am_{2,N} = Y0_{1,N} = Ds_N(X_N); \\
 Am_{3,N} = Y0_{2,N} = \frac{Ds_N(X_{1,N})}{2}; \\
 \omega_{0,N} = \frac{\pi}{2X_{0,N}}; \omega_{1,N} = \frac{\pi}{2 \cdot (X_N - X_{0,N})}; \\
 \omega_{2,N} = \frac{\pi}{2 \cdot (\frac{2\pi}{N} - X_N)}; \omega_{3,N} = \frac{\pi}{X_{1,N} - \frac{2\pi}{N}}; \\
 \omega_{4,N} = \frac{\pi}{\frac{4\pi}{N} - X_{1,N}}; \Delta\varphi_{1,N} = \omega_{1,N} X_N - \pi; \\
 \Delta\varphi_{2,N} = \omega_{2,N} X_N - \pi; \\
 \Delta\varphi_{3,N} = \omega_{3,N} X_{1,N} - \frac{\pi}{2}; \\
 \Delta\varphi_{4,N} = \omega_{4,N} X_{1,N} - \frac{\pi}{2}.
 \end{cases} \quad (10)$$

4) Остальные полуволны функции (1) на промежутке

$$x \in (-\pi, -\frac{4\pi}{N}] \cup [\frac{4\pi}{N}, \pi] \quad (11)$$

аппроксимируются с помощью выражения

$$Ds30_N^{\bar{}}(x) = \begin{cases}
 (-1)^j \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{(i+0.5)\pi}{2})}, \\
 \text{при } \frac{2\pi i}{N} \leq x \leq \frac{2\pi(i+1)}{N}, \\
 (-1)^{j+1} \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{(i+0.5)\pi}{2})}, \\
 \text{при } -\frac{2\pi(i+1)}{N} \leq x \leq -\frac{2\pi i}{N}, \\
 0, \text{ при } x \notin (-\pi, \pi] \\
 \text{где } i = \begin{cases}
 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \text{ при чётных } N, \\
 2, \dots, \frac{N-1}{2} \text{ при нечётных } N.
 \end{cases}
 \end{cases} \quad (12)$$

Суммируя выражения (6)-(8) и (12), получим функцию, аппроксимирующую полином (1) на промежутке $x \in (-\pi, \pi)$

$$\begin{aligned}
 Ds0_0^{\bar{}}(x) &= \\
 &= Ds00_0^{\bar{}}(x) + Ds10_0^{\bar{}}(x) + Ds20_0^{\bar{}}(x) + Ds30_0^{\bar{}}(x). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Зеркально отобразив отрезок кривой функции $Ds0_N^{\bar{}}(x)$ на промежутке $x \in (-\pi, 0]$ относительно оси $x = -\pi$ и отрезок той же функции на промежутке $x \in (\pi, 0]$ относительно оси $x = \pi$, построим одиночную реализа-

цию аппроксимирующей функции на промежутке $x \in (-2\pi, 2\pi)$ (рисунок 1б):

$$\begin{aligned}
 Ds_{N-}^{\bar{}}(x) &= Ds0_N^{\bar{}}(-(x + 2\pi)), \\
 Ds_{N+}^{\bar{}}(x) &= Ds0_N^{\bar{}}(2\pi - x), \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$Ds1_N^{\bar{}}(x) = Ds_{N-}^{\bar{}}(x) + Ds0_N^{\bar{}}(x) + Ds_{N+}^{\bar{}}(x). \quad (15)$$

5) Периодически повторяя функцию (15) с периодом $T = 4\pi$ на всем множестве значений x , получим общую аппроксимирующую функцию

$$Ds_N^{\bar{}}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Ds1_N^{\bar{}}(x - 4\pi j). \quad (16)$$

2. Методика получения значений локальных экстремумов $X_{0,N}$, $X_{1,N}$ и точка перегиба X_N .

1) Для функции (1) изменен масштаб аргумента в N раз

$$Ds_N\left(\frac{x}{N}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2N}\right)}. \quad (17)$$

Длительность каждой полуволны Δx теперь не зависит от N - $\Delta x = 2\pi$. От N будет зависеть теперь период повторения.

2) Определены выражения первой и второй производной функции (16)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial D_N\left(\frac{x}{N}\right)}{\partial x} &= \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left\{ (N-0.5) \cdot \sin\left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{x}{2} - (N+0.5) \cdot \sin\left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{x}{2} \right\}}{2N \sin^2\left(\frac{x}{2N}\right)} \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 D_N\left(\frac{x}{N}\right)}{\partial x^2} &= \\
 &= \frac{2N^2 \cos(x) \sin^2\left(\frac{x}{2N}\right) - N \sin(x) \sin\left(\frac{x}{N}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(1 + \cos^2\left(\frac{x}{2N}\right)\right)}{4N^2 \sin^3\left(\frac{x}{2N}\right)} \quad (19)
 \end{aligned}$$

3) В программной среде MathCad численным решением уравнения

$$\frac{\partial D_N\left(\frac{x}{N}\right)}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

с помощью функции *root* получены корни $Xm_{0,N}$ и $Xm_{1,N}$ на промежутках $x \in (0, 2\pi)$ и $x \in (0, 4\pi)$ для $N = 5 \dots 100$. Примененная точность решения такова, что

$$\left| \frac{\partial D_N\left(\frac{Xm_{0,N}}{N}\right)}{\partial x} \right| \leq 10^{-12}, \quad \left| \frac{\partial D_N\left(\frac{Xm_{1,N}}{N}\right)}{\partial x} \right| \leq 2.2 \cdot 10^{-12}.$$

В процессе решения было замечено, что для $N \geq 42$ искомые экстремумы отличаются только в 4-м значащем разряде.

4) Также в программной среде MathCad численным решением уравнения

$$\frac{\partial^2 D_N \left(\frac{x}{N} \right)}{\partial x^2} = 0 \quad (21)$$

с помощью той же функции *root* найдены точки перегиба Xm_N на промежутке $x \in (Xm_{0,N}, Xm_{1,N})$ для $N = 5 \dots 100$. Примененная точность решения позволила добиться результата

$$\left| \frac{\partial^2 D_N \left(\frac{X_{1,N}}{N} \right)}{\partial x^2} \right| \leq 10^{-10},$$

при этом в ходе того расчетного эксперимента замечено, что для $N \geq 31$ искомые точки перегиба отличаются только в 4-м значащем разряде.

5) Для конкретного значения N для немасштабированной функции (1) соответствующие точки экстремумов и точки перегиба пересчитываются при помощи выражений

$$X_{0,N} = \frac{Xm_{0,N}}{N}, X_{1,N} = \frac{Xm_{1,N}}{N}, X_N = \frac{Xm_N}{N}. \quad (22)$$

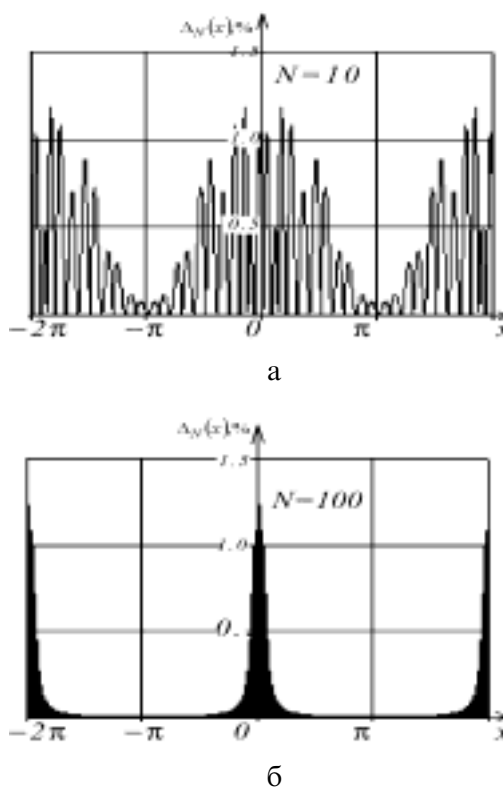


Рисунок 2.

В ходе расчетного эксперимента в среде MatchCad с помощью выражения

$$\Delta_N(x) = \frac{|Ds_N^{\approx}(x) - Ds_N(x)|}{Am_{0,N}} \cdot 100\% \quad (23)$$

просчитано относительное, приведенное к глобальному максимуму отклонение аппроксимирующей функции и равноамплитудного полинома (1) для различных N . Проанализировав графики выражения (30), сделали вывод, что с ростом N максимальное ее значение фактически не увеличивается и стремится к значению 1,3% (рисунок 2).

3. Нас в первую очередь интересуют следующие отличительные особенности дискретного спектра модели (16):

1) степень неравномерности амплитудного дискретного спектра модели (16) в рабочей области – на частотах, для которых определен спектр полинома (1) или (5);

2) отличие от нуля значений фазового спектра для тех же частот;

3) количественные характеристики спектра «паразитных» гармоник.

Так как полином (1) на разных промежутках аппроксимируется функциями разного вида, то определение спектра целесообразно выполнять, придерживаясь следующей последовательности:

– определить выражения спектральных плотностей одиночных аппроксимирующих функций каждого отрезка в выражениях (6)-(8) и (12) для $x \in (-2\pi, 2\pi)$ – то есть для отрезков кривых одиночной реализации функции (16);

– определить выражения для комплексных амплитуд гармоник их дискретных спектров как выборки из соответствующих выражений спектральной плотности на частотах, кратных частоте первой гармоники [11]

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}; \quad (24)$$

– определить выражения для комплексных амплитуд синусоидальных составляющих общего дискретного спектра, воспользовавшись принципом суперпозиции.

4. Итак, определим спектр функции (16).

1) Определение спектра отрезков функции (16) на интервалах

$$x \in (-X_{0,N} + 4\pi j, X_{0,N} + 4\pi j) \text{ и} \quad (25)$$

$$x \in (-2\pi(1-2j), -2\pi(1-2j) + X_{0,N}] \cup \\ \cup [2\pi(1+2j) - X_{0,N}, 2\pi(1+2j)], j \in Z. \quad (26)$$

а) Выражение спектральной плотности на промежутке (25) при $j = 0$

$$S_{0,N}(\omega) = \int_{-X_{0,N}}^{X_{0,N}} Ds_N^{\sim}(x) e^{-j\omega x} dx = \\ = \frac{-2j\omega \cdot Am_{0,N} \cos(\omega X_{0,N})}{\omega_{0,N}^2 - \omega^2}. \quad (27)$$

б) Выражения для комплексных амплитуд составляющих дискретного спектра на интервале (25) определим, сделав выборки из выражения спектральной плотности (26) для частот, кратных частоте первой гармоники [10]

$$\omega = n\omega_1, n = 1, 2, \dots \quad (28)$$

$$A'_{0,n} = \frac{2jS_{0,N}(n\omega_1)}{T} = \frac{2n \cdot Am_{0,N} \cos\left(\frac{nX_{0,N}}{2}\right)}{\pi \cdot 4\omega_{0,N}^2 - \omega^2}. \quad (29)$$

Так как функция (16) нечетная, то результирующая постоянная составляющая аппроксимирующей функции $A_0 = 0$.

в) Отрезки главных лепестков на промежутке (26) при $j = 0$ симметричны относительно начала координат, поэтому их спектральная плотность определится как удвоенная мнимая часть спектральной плотности одного из отрезков с обратным знаком

$$S_{0,N}^{\pm}(\omega) = -2j \int_{2\pi - X_{0,N}}^{2\pi} Ds_N^{\sim}(x) \sin(\omega x) dx = \\ = \frac{-2jAm_{0,n} \{\omega_{0,n} \sin 2\pi\omega - \omega \cos((2\pi - X_{0,N})\omega)\}}{\omega_{0,N}^2 - \omega^2}. \quad (30)$$

г) Выражение для комплексной амплитуды синусоидальных составляющих дискретного спектра на промежутке (26):

$$A_{0,n}^{\pm} = \frac{2jS_{0,N}^{\pm}(n\omega_1)}{T} = \frac{2n(-1)^{n+1} Am_{0,N} \cos\left(\frac{X_{0,N}n}{2}\right)}{4\omega_{0,N}^2 - \omega^2} = \\ = -(-1)^n A'_{0,n}. \quad (31)$$

д) Общее выражение для составляющих дискретного спектра на промежутках (25) и (26)

$$A_{0,n} = A'_{0,n} + A_{0,n}^{\pm} = (1 - (-1)^n) A'_{0,n} = \begin{cases} 2A'_{0,n}, & \text{при } n = 2k - 1, \\ 0, & \text{при } n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (32)$$

2) Определение спектральной характеристики отрезков функции (16) на множестве $x \in (-\frac{4\pi}{N} + 4\pi j, -X_{0,N} + 4\pi j] \cup [X_{0,N} + 4\pi j, \frac{4\pi}{N} + 4\pi j)$, (33)

$$x \in (-2\pi(1-2j) + X_{0,N}, -2\pi(1-2j) + \frac{4\pi}{N}] \cup \\ \cup [2\pi(1+2j) - \frac{4\pi}{N}, 2\pi(1+2j) - X_{0,N}], j \in Z. \quad (34)$$

а) Различия в поведении одиночной реализации функции (16) на интервалах (33) и (34) (при $j = 0$) аналогичны различию ее поведения на интервалах (25), (26) – отрезок кривой аппроксимирующей функции на промежутке $x \in (-2\pi + X_{0,N}; -2\pi + \frac{4\pi}{N}]$ – зеркальное отображение отрезка на промежутке $x \in (-\frac{4\pi}{N}, -X_{0,N}]$ относительно оси $x = -\pi$, а отрезок на промежутке $x \in [2\pi - \frac{4\pi}{N}; 2\pi - X_{0,N})$ – зеркальное отображение отрезка на промежутке $x \in [X_{0,N}, \frac{4\pi}{N})$. Поэтому выражения для составляющих дискретного спектра каждого отрезка функции (16) на множестве (33) и (34) ($A_{1,n} - A_{4,n}$) определены по аналогичной методике пункта 1) и приведены в таблице 1.

3) Выражения n -й гармоники спектра для i -х полуволин множества

$$x \in \left[-\frac{2\pi(i+1)}{N} + 4\pi j, -\frac{2\pi i}{N} + 4\pi j\right] \cup \left[\frac{2\pi i}{N} + 4\pi j, \frac{2\pi(i+1)}{N} + 4\pi j\right] \cup (35) \\ \cup \left[-2\pi(1-2j) + \frac{2\pi i}{N}, -2\pi(1-2j) + \frac{2\pi(i+1)}{N}\right] \cup \\ \cup \left[2\pi(1+2j) - \frac{2\pi(i+1)}{N}, 2\pi(1+2j) - \frac{2\pi i}{N}\right], j \in Z,$$

$$\text{где } i = \begin{cases} 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, & \text{при чётных } N, \\ 2, \dots, \frac{N-1}{2} - 1, & \text{при нечётных } N, \end{cases}$$

а также спектра «хвостов» при нечетных N – то есть на интервалах

$$x \in \cup \left[-\pi - \frac{\pi}{N} + 4\pi j, -\pi + \frac{\pi}{N} + 4\pi j\right] \cup \\ \cup \left(\pi - \frac{\pi}{N} + 4\pi j, \pi + \frac{\pi}{N} + 4\pi j\right) \quad (36)$$

(рисунок 3) также получены по аналогичной методике:

а) Для множества (35)

$$A_{5,i,n} = (1 - (-1)^n) \frac{8N^2 \sin\left(\frac{\pi i}{2N}\right) \sin\left(\frac{(i+0.5)\pi i}{2N}\right)}{\pi \cdot n \cdot (4N^2 - n^2) \sin\left(\frac{(i+0.5)\pi i}{2N}\right)}. \quad (37)$$

б) Для «хвостов» (36)

$$A_{6,n} = (1 - (-1)^n) \frac{2 \{2N^2 - n^2\} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2N^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)}{\pi \cdot n (n^2 - 4N^2)}. \quad (38)$$

4) Согласно принципу суперпозиции выражение для n -й гармоники для всего множества (36) получится следующим:

Таблица 1.

№	Интервал	Выражение составляющих дискретного спектра
1.	$x \in (-X_{0,N} + 4\pi j, X_{0,N} + 4\pi j) \cup (-2\pi(1-2j) - 2\pi(1-2j) + X_{0,N}) \cup [2\pi(1+2j) - X_{0,N}, 2\pi(1+2j)]$, $j \in Z$	$A_{0,n} = (1 - (-1)^n) \frac{2n \cdot Am_{0,N}}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{nX_{0,N}}{2}\right)}{4\omega_{0,N}^2 - \omega^2}$
2.	$x \in (-X_N + 4\pi j, -X_{0,N} + 4\pi j) \cup [X_{0,N} + 4\pi j, X_N + 4\pi j] \cup (-2\pi(1-2j) + X_{0,N}; -2\pi(1-2j) + X_N) \cup [2\pi(1+2j) - X_N; 2\pi(1+2j) - X_{0,N}]$, $j \in Z$	$A_{1,n} = (1 - (-1)^n) \frac{2}{\pi} \left\{ 2Am_{1,N} \frac{\omega_{1,N} \sin \frac{nX_N}{2N} - \frac{n}{2} \cos \frac{nX_{0,N}}{2N}}{4\omega_{1,N}^2 - n^2} - \frac{Y_{1,N}}{n} (\cos \frac{nX_N}{2N} - \cos \frac{nX_{0,N}}{2N}) \right\}$
3.	$x \in (-\frac{2\pi}{N} + 4\pi j, -X_N + 4\pi j) \cup [X_N + 4\pi j, \frac{2\pi}{N} + 4\pi j] \cup (-2\pi(1-2j) + X_N, -2\pi(1-2j) + \frac{2\pi}{N}) \cup [2\pi(1+2j) - \frac{2\pi}{N}, 2\pi(1+2j) - X_N]$, $j \in Z$	$A_{2,n} = (1 - (-1)^n) \frac{4Y_{1,N}}{\pi} \left\{ \frac{\cos \frac{nX_N}{2N} - \cos \frac{n\pi}{N}}{2n} - \frac{\omega_{2,N} \sin \frac{nX_N}{2N} + \frac{n}{2} \cos \frac{n\pi}{N}}{4\omega_{2,N}^2 - n^2} \right\}$
4.	$x \in (-X_{1,N} + 4\pi j, -\frac{2\pi}{N} + 4\pi j) \cup [\frac{2\pi}{N} + 4\pi j, X_{1,N} + 4\pi j] \cup (-2\pi(1-2j) + \frac{2\pi}{N}, -2\pi(1-2j) + X_{1,N}) \cup [2\pi(1+2j) - X_{1,N}, 2\pi(1+2j) - \frac{2\pi}{N}]$, $j \in Z$	$A_{3,n} = (1 - (-1)^n) \frac{2Am_{3,N}}{\pi} \left\{ \frac{n(\cos \frac{nX_{1,N}}{2N} + \cos \frac{n\pi}{N})}{4\omega_{3,N}^2 - n^2} - \frac{\cos \frac{nX_{1,N}}{2N} - \cos \frac{n\pi}{N}}{n} \right\}$
5.	$x \in (-\frac{4\pi}{N} + 4\pi j, -X_{1,N} + 4\pi j) \cup [X_{1,N} + 4\pi j, \frac{4\pi}{N} + 4\pi j] \cup (-2\pi(1-2j) + X_{1,N}, -2\pi(1-2j) + \frac{4\pi}{N}) \cup [2\pi(1+2j) - \frac{4\pi}{N}, 2\pi(1+2j) - X_{1,N}]$, $j \in Z$.	$A_{4,n} = (1 - (-1)^n) \frac{2Am_{3,N}}{\pi} \left\{ \frac{\cos \frac{nX_{1,N}}{2N} - \cos \frac{2n\pi}{N}}{n} - \frac{n(\cos \frac{nX_{1,N}}{2N} + \cos \frac{2n\pi}{N})}{4\omega_{3,N}^2 - n^2} \right\}$
6.a	Для чётных N : $x \in (-2\pi(1-2j) + \frac{4\pi}{N}, -\frac{4\pi}{N} + 4\pi j) \cup (\frac{4\pi}{N} + 4\pi j, 2\pi(1+2j) - \frac{4\pi}{N})$,	$A_{5,n} = (1 - (-1)^n) \frac{8N^2 \sin \frac{n\pi}{2N}}{\pi n \cdot (4N^2 - n^2)} \sum_{i=2}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\sin \frac{(i+0.5)\pi}{2N}}{\sin \frac{(i+0.5)\pi}{2N}}$
6.б	для нечётных N : $x \in (-2\pi(1-2j) + \frac{4\pi}{N}, -\pi(1-4j) - \frac{\pi}{N}) \cup (-\pi(1-4j) + \frac{\pi}{N}, -\frac{4\pi}{N} + 4\pi j) \cup (\frac{4\pi}{N} + 4\pi j, \pi(1+4j) - \frac{\pi}{N}) \cup (\pi(1+4j) + \frac{\pi}{N}, 2\pi(1+2j) - \frac{4\pi}{N})$	
7.	Для нечётных N $x \in [-\pi - \frac{\pi}{N} + 4\pi j, -\pi + \frac{\pi}{N} + 4\pi j] \cup (\pi - \frac{\pi}{N} + 4\pi j, \pi + \frac{\pi}{N} + 4\pi j]$	$A_{6,n} = (1 - (-1)^n) \frac{[2N^2 - n^2] \cos \frac{n\pi}{2} - 2N^2 \cos(\frac{n\pi}{2}(1 - \frac{1}{N}))}{\pi \cdot n(n^2 - 4N^2)}$

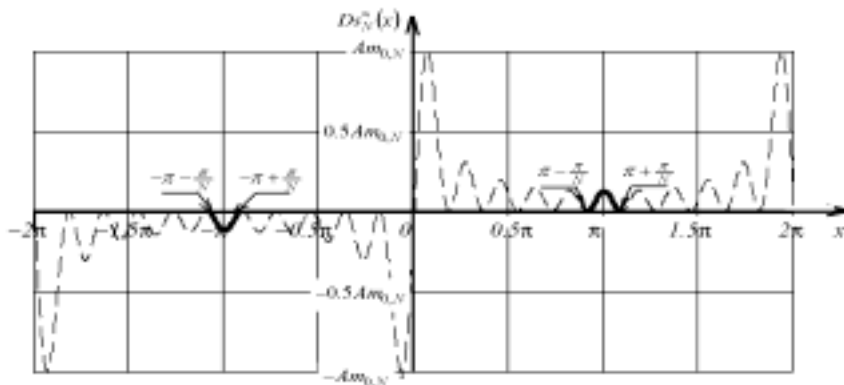


Рисунок 3.

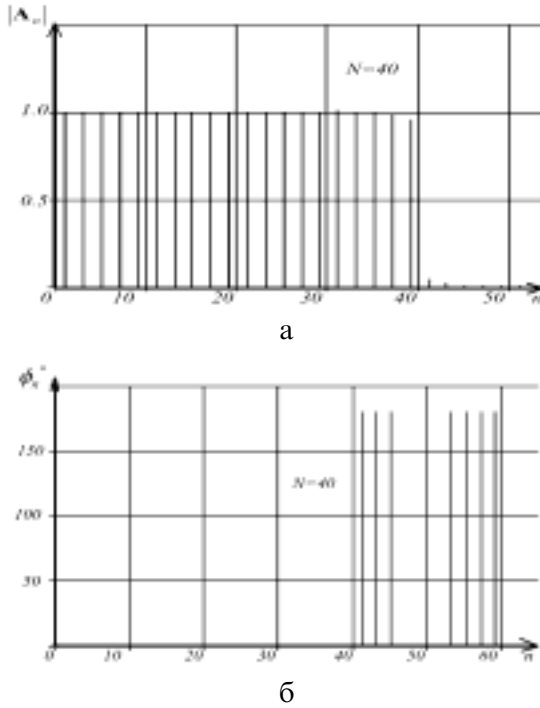


Рисунок 4

$$A_{5,n} = \sum_{i=2}^{N_1} A_{5,i,n} = (1 - (-1)^n) \frac{8N^2 \sin \frac{\pi n}{2N}}{\pi n \cdot (4N^2 - n^2)} \sum_{i=2}^{N_1} \frac{\sin \frac{(i+0.5)\pi n}{2N}}{\sin \frac{(i+0.5)\pi n}{2N}}, \quad (39)$$

$$\text{где } N_1 = \begin{cases} \frac{N}{2} - 1 & \text{при чётных } N, \\ \frac{N-1}{2} - 1 & \text{при нечётных } N. \end{cases} \quad (40)$$

5) Результаты вычислений приведем в таблицу 1.

6) Общее выражение для комплексной амплитуды n-й гармоники получаем, используя принцип суперпозиции:

$$A_n = \begin{cases} A_{0,n} + A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} + \\ + A_{4,n} + A_{5,n} & \text{для чётных } N, \\ A_{0,n} + A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n} + \\ + A_{4,n} + A_{5,n} + A_{6,n} & \text{для не чётных} \end{cases} \quad (41)$$

5. По графикам полученного амплитудного (рисунок 4, а) и фазового (рисунок 4, б, где $\phi_n = \arg(A_n)$) спектров видим:

1) появление в спектре функции (16) паразитных гармоник;

2) искажение равномерности основного амплитудного спектра;

3) фазовый спектр принимает два значения – 0 и 180 градусов, причем в рабочей области фазовый спектр отсутствует.

Вклад паразитных гармоник определен выражением для коэффициента гармоник

$$k_{z,N} = \sqrt{\frac{0.5 \sum_{n=1}^{kN-N} A_n^2}{0.5 \sum_{n=1}^N A_n^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{kN-N} A_n^2}{\sum_{n=1}^N A_n^2}}, \quad (42)$$

а степень неравномерности – по максимальному относительному отклонению основных гармоник от гармоник исходной функции (1)

$$\Delta_{\max,N} = \max_{n=1,\dots,N} \left(\frac{A_n - 1}{1} \right) \cdot 100. \quad (43)$$

Указанные характеристики просчитаны в программной среде MathCad для $N = 6, \dots, 100$. Как видим из графиков на рисунке 5, коэффициент гармоник паразитного спектра не превышает значения 1,22%, а степень неравномерности достигает величины 5,6%.

В заключение можем сказать, что предлагаемый метод по исследованным характеристикам (67), (68) занимает промежуточное положение между методами, описанными в работе [1, с. 166-175], но обладает меньшей функциональной сложностью реализации в отличие от «уточненного» метода, так как не требует выполнения дополнительных операций умножения.

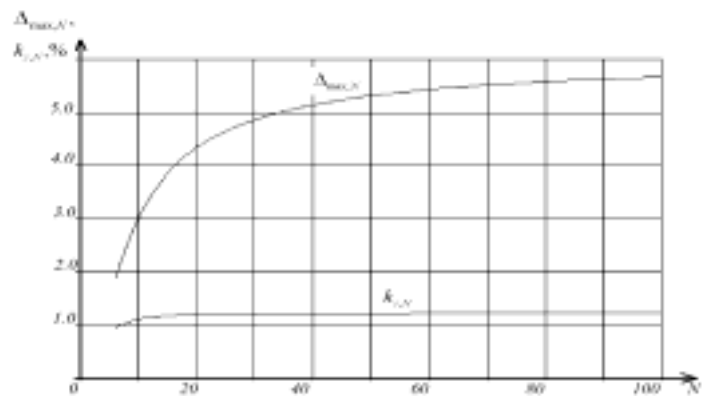


Рисунок 5

Список использованной литературы:

1. Фролов С.С. Способы реализации равноамплитудных полиномов // Материалы всероссийской научно-практической конференции «Современные информационные технологии в науке, образовании и практике». – Оренбург, 2004.
2. А.с. 1762269 СССР, кл. 5G01R27/28. Устройство для контроля амплитудно-фазочастотных характеристик / К.П. Чухриенко, С.Г. Лукаш, Б.Н. Кучер. – Оpubл. 1992, Бюл. №34.
3. А.с. 1675798 СССР, кл. 5G01R27/28. Цифровой анализатор частотных характеристик четырехполосников / М.Я. Минц, В.Н. Чинков, А.М. Воронкин. – Оpubл. 1991, Бюл. №33.
4. А.с. 1679415 СССР, кл. 5G01R27/28. Устройство для контроля амплитудно-частотной характеристики / А.В. Аношкин, Н.Н. Шиенок – Оpubл. 1991, Бюл. №35.
5. А.с. 2025899 РФ, кл. 5H04B3/46. Устройство для контроля и настройки амплитудно-фазочастотных характеристик / К.А. Семенов, В.А. Марков, В.П. Шаров и др. – Оpubл. 1994, Бюл. №24.
6. Прибор для исследования амплитудно-частотных характеристик X1-41 // Техническое описание и инструкция по эксплуатации. – 1982.
7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов по специальности «Радиотехника». – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
8. А.с. 1712898 СССР, кл. 5G01R27/28. Способ определения частотных характеристик измерительных каналов информационно-измерительных систем / А.А. Плавильщиков. – Оpubл. 1989, Бюл. №6.
9. А.с. 2054684 РФ, кл. 6G01R23/16. Способ измерения амплитудно-частотных характеристик / Слюсар В.И. – Оpubл. 1996, Бюл. №25.
10. А.с. 1832360 СССР, кл. 5H03B19/00. Формирователь многочастотного сигнала / М.Я. Минц, В.Н. Чинков, Ю.А. Немшилов, А.Л. Савицкий, А.В. Гуров – Оpubл. 1991, Бюл. №29.
11. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 1. Сигналы. Линейные системы с постоянными и переменными параметрами.–М.: «Советское радио», 1966. – 439 с.
12. Фролов С.С., Шевеленко В.Д., Бурькова Е.В. Метод аппроксимации равноамплитудных полиномов // Вестник ОГУ. – №5.
13. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы: Пер. с англ. Н.В. Леви / Под ред. К.А. Семендяева.– М.: Наука, 1977. – 244 с.