Тажимуратов И.Т., Кажанова И.Г., Кулшымбаева Н.Е.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ В. ХАРАСАХАЛА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В настоящей работе доказано существование ω-периодических решений систем уравнений в частных производных первого порядка, рассмотренные в [1], в критическом случае.

1. Постановка вопроса. Рассмотрим систему уравнений в частных производных вида:

$$Dy = Ay + f(x),\ E_2 \qquad (1)$$

Здесь A – постоянная $(n\times n)$–матрица, $x=(x_1,x_2)$ – вектор независимых переменных, $y=y(x)-n$ – вектор искомых функций, $f(x)\in H_\omega - n$ – вектор-функция, а оператор

$$Dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}$$

Здесь и далее H_ω – класс непрерывных ω–периодических функций, $\omega=(\omega_1,\omega_2)$ – постоянный вектор, ω_k – некоторые положительные вещественные числа, $(k=1,2)$, E_2 – двухмерное евклидово пространство.

Имеет место

Теорема 1. Пусть: 1) Собственные значения λ_s, $(s=\overline{1,n})$, матрицы A различны и среди них имеются: один нулевой; одна пара чисто мнимая $\pm i\gamma_0$; а у других – вещественные части отличны от нуля, т. е.

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm i\gamma_0,\ \operatorname{Re}\lambda_p \neq 0,\ (p=\overline{4,n}),$$

при этом:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\lambda_j < 0,\ (A_-),\ (j=\overline{4,m}),\\ &\operatorname{Re}\lambda_q > 0,\ (A_+),\ (q=\overline{m,n}), \end{aligned} \qquad (2)$$

где γ_0 – некоторое действительное число, $i=\sqrt{-1}$, а m и n – некоторые натуральные числа, причем $m<n$.

2)Вектор – функция $f(x)\in H_\omega$.

3) $\alpha = \dfrac{\gamma_0 n\omega_2 - 2\pi}{\gamma_0(n\omega_2-\omega_1)}$, $\qquad \beta = \dfrac{-\gamma_0\omega_1 + 2\pi}{\gamma_0(n\omega_2-\omega_1)}$ и $n\omega_2 - \omega_1 \geq \sigma > 0$, где n – некоторое натуральное число, σ – некоторое вещественное число.

4) Выполняются условия:

$$\gamma = \frac{1}{\omega_1\omega_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} F_1(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 0,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\omega_1\omega_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} Q_k(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 0,$$

где функция $F_1(x_1,x_2)$ та же, что и в (9), а функции $Q_k(x_1,x_2)$ определены соотношениями в (33), $(k=1,2)$.

Тогда система (1) имеет семейство ω-периодических решений (в классическом смысле), зависящих от трех произвольных постоянных C_0, C_1 и C_2.

Заметим, что до сих пор не решен вопрос о существовании ω-периодических решений как линейных, так и нелинейных систем уравнений в частных производных вида (1) в критическом случае. В настоящей работе делается попытка в установлении этого вопроса для системы (1). Отметим также, что результаты, полученные в этой работе, могут быть использованы при изучении бегущих и стоящих волн [2]. Поэтому работа является актуальной.

2. Необходимые сведения. Здесь приводятся сведения, которые будут нужны в дальнейшем.

Известно [3], что решение уравнения в частных производных:

$$Dy \equiv \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 \qquad (3)$$

определяется методом характеристик. Поэтому рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (характеристику):

$$\frac{dx_2}{dx_1} = 1 \qquad (4)$$

с начальным условием

$$x_2 = x_2^0 \text{ и } x_1 = 0 \qquad (5)$$

Очевидно, что решением задачи (4) и (5) является следующая функция:

$$x_2 = x_1 + x_2^0 \qquad (6)$$

Откуда

$$x_2^0 = x_2 - x_1$$

Проверкой можно убедиться, что всякая дифференцируемая функция $y=\Phi(x_2-x_1)$ является решением уравнения в частных производных (3). Множество всех таких функций обозначим через T, т. е. $T = \{\Phi(x_2 - x_1)\}$.

Имеет место следующая лемма [4]:

Лемма 1. *Если ω_1 и ω_2 – несоизмеримые числа, то среди элементов множества T не существует периодических функций с периодом ω_k по x_k, кроме функции $\Phi(x_2 - x_1) \equiv C$, где $C - const$, $(k = 1,2)$;*

Если ω_1 и ω_2 – соизмеримые числа, то существует периодическая функция $\Phi(x_2 - x_1) \neq C$, с периодом ω_0 по x_1 и x_2, где $\omega_0 = n_1\omega_1 = n_2\omega_2$, n_1 и n_2 – некоторые целые числа [5].

Таким образом, если компоненты ω_1 и ω_2 вектора ω– несоизмеримые числа, то уравнение в частных производных (3) не имеет ω-периодического решения, кроме $C - const$; а в противном случае оно имеет периодическое решение с одним и тем же периодом ω_0 по каждой переменной x_1 и x_2.

3. Доказательство теоремы 1. Действительно, преобразуя систему (1) подстановкой:

$$y = Bz, \quad \det B \neq 0, \tag{7}$$

где B – постоянная $(n \times n)$-матрица, а $z = (z_1, ..., z_n)$, получим

$$Dz = Cz + F(x) \tag{8}$$

Здесь $C = B^{-1}AB$, $F(x) = B^{-1}f(x)$, а B^{-1} – матрица, обратная матрице B. Она существует, так как $\det B \neq 0$. Очевидно, что вектор-функция $F(x)$ такого же характера, что и вектор-функция $f(x)$.

Запишем (8), вспоминая условие 1) теоремы 1, в следующем виде:

$$\begin{aligned} &Dz_1 = F_1(x) \\ &Dz^* = A^*z^* + F^*(x) \\ &D\tilde{z} = \tilde{A}\tilde{z} + \tilde{F}(x) \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь и далее матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_0 \\ -\gamma_0 & 0 \end{pmatrix},$$

и $\tilde{A}$ – постоянная $((n-4)\times(n-4))$-матрица, причем ее собственные значения λ_p различны, и они удовлетворяют условиям в (2), а $z^* = (z_2, z_3)$, $\tilde{z} = (z_4, ..., z_n)$, $F^*(x) = (F_2(x), F_3(x))$ и $\tilde{F}(x) = (F_4(x), ..., F_n(x))$ – векторы.

Далее определим ω-периодическое решение каждого уравнения в частных производных в (9).

3.1. Рассмотрим сначала скалярное уравнение в частных производных:

$$Dz_1 = F_1(x) \tag{10}$$

Легко видеть, что общее решение уравнения (10) определяется формулой:

$$z_1(x) = \int_0^{x_1} F_1(\tau, x_2 - x_1 + \tau)d\tau + \Phi(x_2 - x_1), \tag{11}$$

где $\Phi(x_2 - x_1) \in T$ – произвольная функция. Очевидно, что первообразная неопределенного интеграла в (11), в силу ω-периодичности функции $F_1(x)$, представима в следующем виде:

$$\int_0^{x_1} F_1(\tau, x_2 - x_1 + \tau)d\tau = \gamma^0\tau + V(\tau, x_2 - x_1 + \tau) + C_0,$$

где $C_0 - const$, а

$$\gamma^0 = \frac{1}{\omega_1\,\omega_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} F_1(x)\,dx_1\,dx_2$$

Следовательно, из (11) имеем:

$$z_1(x) = \gamma^0 x_1 + V(x) - V(0, x_2 - x_1) + \Phi(x_2 - x_1) + C_0 \tag{12}$$

Здесь функция $\gamma^0 x_1$, а также функция $V(0, x_2 - x_1)$ на основании леммы 1 не будут ω-периодическими. Однако функция $V(x)$ является ω-периодической (в противном случае функция $F_1(x)$ не могла быть ω-периодической). Поэтому для того, чтобы функция $z_1(x) \in H_\omega$, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} &\gamma^0 = \frac{1}{\omega_1\,\omega_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} F_1(x)\,dx_1\,dx_2 = 0 \\ &\Phi(x_2 - x_1) = V(0, x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть эти условия имеют место в дальнейшем. Тогда очевидно, что ω-периодическое решение уравнения (10) получим из (12) в следующем виде:

$$z_1(x) = V(x) + C_0, \quad C_0 - const \tag{14}$$

Тем самым имеет место

Утверждение 1. *Пусть: 1) функция $F_1(x) \in H_\omega$; 2) $\gamma^0 = \frac{1}{\omega_1\,\omega_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} F_1(x)\,dx_1\,dx_2 = 0$.*

Тогда уравнение в частных производных (10) имеет ω-периодическое решение, зависящее от одной произвольной постоянной C_0.

3.2. Теперь рассмотрим систему уравнений в частных производных:

$$Dz^* = A^*z^* + F^*(x) \tag{15}$$

Однородная система. Определим сначала ω-периодическое решение однородной системы:

$$Dz_0^* = A^* z_0^*, \quad z_0^* = (z_{20}, z_{30}) \qquad (16)$$

Будем искать частное решение системы (16) в виде:

$$z_0^*(x) = \gamma \exp(\lambda R(x)), \qquad (17)$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ – постоянный вектор, λ – неизвестная постоянная величина, а $R(x)$ неизвестная функция. Подставляя (17) в (16), получим:

$$\gamma\lambda\, DR(x) = A^* \gamma$$

Из последнего соотношения, выбирая $R(x)$ так, чтобы выполнялось равенство (в противном случае можно нормировать)

$$DR(x) = 1, \qquad (18)$$

будем иметь

$$(A^* - \lambda E)\gamma = 0,$$

где E – единичная матрица. Откуда, определяя неизвестные λ и γ классическим способом [3], получим:

$$\lambda_{2,3} = \pm i\gamma_0, \ \ \gamma_1 = -i, \ \ \gamma_2 = 1$$

Из (18) имеем

$$R(x) = \alpha x_1 + \beta x_2, \qquad (19)$$

где $\alpha, \beta \in D$ (множество вещественных чисел), и они обладают следующими свойствами:

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \ \text{ и } \ \alpha + \beta = 1$$

Таким образом, определены неизвестные λ, γ и $R(x)$.

Следовательно, общее решение системы (16), рассуждая способом, аналогичным как в [3], получим в виде (запись в координатной форме):

$$\begin{aligned} z_{20}(x) &= -\Phi_1(x_2 - x_1)\sin\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) - \\ &- \Phi_2(x_2 - x_1)\cos\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ z_{30}(x) &= -\Phi_1(x_2 - x_1)\cos\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) + \\ &+ \Phi_2(x_2 - x_1)\sin\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) \end{aligned} \qquad (20)$$

где $\Phi_k(x_2 - x_1) \in T$ – произвольные функции, $(k = 1,2)$.

Заметим, что функции $z_{20}(x)$ и $z_{30}(x)$ в общем случае не являются ω-периодическими. Поэтому будем выяснять условия, при выполнении которых они являются ω-периодическими.

Рассмотрим следующие случаи:

Первый случай. Пусть числа ω_1 и ω_2 – несоизмеримые. Тогда:

1) Функции $\Phi_k(x_2 - x_1)$, $(k = 1,2)$ на основании леммы 1 не будут ω-периодическими. Поэтому положим

$$\Phi_k(x_2 - x_1) = C_k, \ \ C_k - const \qquad (21)$$

2) Определим α и β из уравнения

$$\alpha + \beta = 1, \qquad (22)$$

таким образом, чтобы тригонометрические функции $\sin\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2)$ и $\cos\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2)$ были ω-периодическими. Однако однозначно определить их из уравнения (22) невозможно, так как число неизвестных больше, чем количество уравнений. Поэтому нужно дополнительное условие. В качестве такого условия возьмем следующее уравнение

$$-\alpha + \beta = \mu, \qquad (23)$$

где μ – малый параметр.

Из системы алгебраических уравнений

$$\alpha + \beta = 1$$
$$-\alpha + \beta = \mu$$

находим, что

$$\alpha = \frac{1-\mu}{2}, \quad \beta = \frac{1+\mu}{2} \qquad (24)$$

Очевидно, что тригонометрические функции $\sin\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2)$ и $\cos\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2)$ будут ω-периодическими, если выполняется равенство:

$$\frac{\gamma_0}{2}\left(\omega_1 - \omega_1\mu + n\omega_2 + n\omega_2\mu\right) = 2\pi,$$

где n – любое натуральное число. Пусть это условие имеет место в дальнейшем. Тем самым

$$\mu = \frac{4\pi - \gamma_0(\omega_1 + n\omega_2)}{\gamma_0(n\omega_2 - \omega_1)} \qquad (25)$$

Запишем (24) с учетом (25) в следующем виде:

$$\alpha = \frac{\gamma_0 n\omega_2 - 2\pi}{\gamma_0(n\omega_2 - \omega_1)}, \quad \beta = \frac{-\gamma_0\omega_1 + 2\pi}{\gamma_0(n\omega_2 - \omega_1)} \qquad (26)$$

При этом будем считать, что $n\omega_2 - \omega_1 \geq \sigma > 0$, где σ – некоторое вещественное число.

Покажем теперь, что функция $\sin\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2)$ при условии (26) является ω-периодической. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} &\sin\gamma_0\left[\alpha(x_1 + \omega_1) + \beta(x_2 + n\omega_2)\right] = \\ &= \sin\left[\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) + \gamma_0(\alpha\omega_1 + \beta n\omega_2)\right] = \\ &= \sin\left[\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2\pi\right] = \sin\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) \end{aligned}$$

Т. е. функция $\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2)$ – ω - периодична. Аналогично доказывается ω - периодичность функции $\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2)$.

Таким образом, ω-периодическое решение однородной системы уравнений в частных производных (16) получим в виде:

$$\begin{aligned} z_{20}(x) &= -C_1\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2)-C_2\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) \\ z_{30}(x) &= -C_1\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2)+C_2\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь и далее будем считать, что α и β определены равенствами (26), в отличие от (19), а $C_k - const, (k=1,2)$.

Второй случай. Теперь пусть ω_1 и ω_2 – соизмеримые числа. В этом случае [5] существуют такие целые числа $k_1,\ k_2$, что имеет место равенство:

$$k_1\omega_1 = k_2\omega_2 = \omega_0$$

Аналогично, как в предыдущем случае, получим:

$$\mu = \frac{4\pi-(n+1)\gamma_0\omega_0}{\gamma_0\omega_0(n-1)},\quad \alpha = \frac{n\gamma_0\omega_0-2\pi}{\gamma_0\omega_0(n-1)},$$

$$\beta = \frac{-\gamma_0\omega_0+2\pi}{\gamma_0\omega_0(n-1)} \tag{28}$$

Следовательно, ω_0-периодическое решение системы (16) получим в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_{20}(x) &= -\Psi_1(x_2-x_1)\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) - \\ &- \Psi_2(x_2-x_1)\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) \\ z_{30}(x) &= -\Psi_1(x_2-x_1)\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) + \\ &+ \Psi_2(x_2-x_1)\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) \end{aligned} \tag{29}$$,

где $\Psi_k(x_2-x_1)\in T$ – произвольные ω_0-периодические функции, а α и β определены равенствами (28), $(k=1,2)$.

Итак, в этом случае система (16) имеет периодическое решение (29) с периодом ω_0 по каждой из переменных x_1, x_2, и оно зависит от двух произвольных периодических функций $\Psi_1(x_2-x_1)\in T,\ \Psi_2(x_2-x_1)\in T$ с периодом ω_0 по x_1 и x_2.

В дальнейшем рассмотрим первый случай (второй случай изучается аналогично).

Неоднородная система. Определим теперь ω-периодическое решение неоднородной системы (15), т. е.

$$Dz^* = A^*z^* + F^*(x) \tag{30}$$

Ее частное решение ищем в виде (запись в координатной форме):

$$\begin{aligned} z_2 &= -\Phi_1(x)\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) - \\ &- \Phi_2(x)\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) \\ z_3 &= -\Phi_1(x)\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) + \\ &+ \Phi_2(x)\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь $\Phi_k(x)\in \bar{T}$ – неизвестные дифференцируемые функции, а α и β определены равенствами (26), $(k=1,2)$.

Подставляя (31) в (30), будем иметь:

$$\begin{aligned} &-D\Phi_1(x)\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) - \\ &- D\Phi_2(x)\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) = F_2(x) \\ &- D\Phi_1(x)\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) + \\ &+ D\Phi_2(x)\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) = F_3(x) \end{aligned} \tag{32}$$

Главный определитель этой системы

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} -\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) & -\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) \\ -\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) & \sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Поэтому из (32), определяя неизвестные $D\Phi_1(x)$ и $D\Phi_2(x)$ по формулам Крамера, получим:

$$\begin{aligned} D\Phi_1(x) &= Q_1(x) \\ D\Phi_2(x) &= Q_2(x) \end{aligned}, \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= -F_1(x)\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) - F_2(x)\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) \\ Q_2(x) &= -F_1(x)\cos\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) + F_2(x)\sin\gamma_0(\alpha x_1+\beta x_2) \end{aligned}$$

И они являются ω-периодическими.

Из (33) имеем:

$$\Phi_k(x) = \int_0^{x_1} Q_k(\tau, x_2-x_1+\tau)d\tau + C_k(x_2-x_1),\quad (k=1,2), \tag{34}$$

где $C_k(x_2-x_1)\in T$ – произвольные непрерывные функции. Из (34), вспоминая результаты в п. 3.1 (в частности, формулу (12)), будем иметь:

$$\Phi_k(x) = \beta_k x_1 + \varphi_k(x) - \varphi_k(x_2-x_1) + C_k(x_2-x_1),$$
$$(k=1,2) \tag{35}$$

Здесь $\varphi_k(x)$ – некоторая ω-периодическая функция, а

$$\beta_k = \frac{1}{\omega_1\omega_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} Q_k(x)\,dx_1\,dx_2,\quad (k=1,2)$$

Из (35), вспоминая лемму 1, заключаем, что функции $\Phi_k(x)$ будут ω-периодическими только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{1}{\omega_1\omega_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} Q_k(x)\,dx_1\,dx_2 = 0, \\ C_k(x_2-x_1) &= \varphi_k(x_2-x_1),\quad (k=1,2) \end{aligned} \tag{36}$$

Пусть эти условия имеют место в дальнейшем. Тогда из (35) получим:

$$\Phi_k(x) = \varphi_k(x), \quad (k = 1,2) \qquad (37)$$

Следовательно, частное решение системы (30) получим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{z}_2(x) &= -\varphi_1(x)\sin\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) - \varphi_2(x)\cos\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ \tilde{z}_3(x) &= -\varphi_1(x)\cos\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) + \varphi_2(x)\sin\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) \end{aligned} \qquad (38)$$

Очевидно, что они являются ω-периодическими.

Таким образом, ω-периодическое решение системы уравнений в частных производных (30) получим в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_2(x) &= -C_1\sin\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) - C_2\cos\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) + \tilde{z}_2(x) \\ z_3(x) &= -C_1\cos\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) + C_2\sin\gamma_0(\alpha x_1 + \beta x_2) + \tilde{z}_3(x), \end{aligned} \qquad (39)$$

где $C_k - const$, $(k = 1,2)$.

Имеет место

Утверждение 2. Пусть: *1) Матрица* A^* *имеет чисто мнимое собственное значение* $\pm i\gamma_0$, *где* γ_0 *– некоторое вещественное число; 2) Вектор-функция* $F^*(x) \in H_\omega$*;*

3) $\alpha = \dfrac{\gamma_0 n\omega_2 - 2\pi}{\gamma_0(n\omega_2 - \omega_1)}$, $\beta = \dfrac{-\gamma_0\omega_1 + 2\pi}{\gamma_0(n\omega_2 - \omega_1)}$ *и* $n\omega_2 - \omega_1 \geq \sigma > 0$, *где* σ *– некоторое вещественное число;*

4) Выполняются равенства:

$$\beta_k = \frac{1}{\omega_1\,\omega_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} Q_k(x)\,dx_1\,dx_2 = 0,$$

где функции $Q_k(x)$ *определены равенствами (33),* $(k = 1,2)$.

Тогда если ω_1 и ω_2 *– несоизмеримые числа, то система уравнений в частных производных (30) имеет* ω*-периодическое решение, зависящее от двух произвольных постоянных* C_1 *и* C_2.

3.3. Теперь определим ω-периодическое решение третьего уравнения системы (9), т. е.

$$D\tilde{z} = \tilde{A}\tilde{z} + \tilde{F}(x) \qquad (40)$$

Очевидно, что вектор – функция

$$\tilde{z}(x) = e^{A_-\cdot(\alpha x_1 + \beta x_2)} \cdot \int_{-\infty}^{x_1} e^{-A_-\cdot(\alpha\tau + \beta(x_2 - x_1 + \tau))} \cdot F_-(\tau, x_2 - x_1 + \tau)\,d\tau + e^{A_+\cdot(\alpha x_1 + \beta x_2)} \cdot \int_{\infty}^{x_1} e^{-A_+\cdot(\alpha\tau + \beta(x_2 - x_1 + \tau))} \cdot F_+(\tau, x_2 - x_1 + \tau)\,d\tau, \qquad (41)$$

где через A_- и A_+ обозначены матрицы с собственными значениями $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ и $\mathrm{Re}\lambda_q > 0$ матрицы $\tilde{A}$, причем матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{pmatrix}$$

и вектор-функция $\tilde{F}(x) = \left(F_-(x), F_+(x)\right)$, $((j = \overline{4,m}), (q = \overline{m+1, n}))$, является единственным ω-периодическим решением системы (40).

Тем самым теорема доказана.

Список использованной литературы:

1. Харасахал В.А. О почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Алма-Ата.: Наука, 1970.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1958.
4. Тажимуратов И.Т., Кубенова Ш.И. Введение в теорию линейных систем уравнений в частных производных первого порядка с одинаковыми главными частями. Актобе: УМО, 2000.
5. Левитан Б.М. Почти периодические функции. М.: ГИТЛЛ, 1953.