Абдикаликова Г.А.
Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Исследуется линейная краевая задача для системы уравнения гиперболического типа. Методом параметризации получены коэффициентные достаточные условия существования, единственности решения рассматриваемой задачи и предложен алгоритм нахождения решения.

Изучению различных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа посвящено значительное количество работ, где разными методами получены достаточные условия существования единственного решения, отметим лишь [1]-[2].

В [3] методом параметризации исследованы вопросы однозначной разрешимости краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [4] методом введения функциональных параметров, являющимся обобщением метода параметризации, установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для системы гиперболических уравнений второго порядка.

На $\overline{\Omega} = \{(x,t): t \le x \le t+\omega, 0 \le t \le T\}$, $T > 0$, $\omega > 0$ рассмотрим линейную краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = A(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \qquad (1)$$

$$B(s)u(s,0) + C(s)u(s+T,T) = d(s), \quad s \in [0,\omega], \qquad (2)$$

где $A(x,t)$-$(n\times n)$ – матрица, $f(x,t)$-n– вектор-функция непрерывны по всем аргументам на $\overline{\Omega}$ и непрерывно дифференцируемы по x и t; $B(s), C(s)$-$(n\times n)$ - матрицы, $d(s)$– n – вектор-функция непрерывно дифференцируемы на $[0,\omega]$, $\|u\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|$, $\|A(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|$.

Через $C(\overline{\Omega}, R^n)$ обозначим пространство непрерывных по x и t на $\overline{\Omega}$ функций $u: \overline{\Omega} \to R^n$ с нормой $\|u\|_1 = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \max\limits_{t\in[0,T]} \|u(x,t)\|$.

Задача. Найти коэффициентные достаточные условия существования и единственности решения задачи (1)-(2).

Воспользовавшись методом характеристик, с помощью замены: $\tau = t, \xi = x - t$ в области $\overline{H} = \{(\xi,\tau): 0 \le \xi \le \omega, 0 \le \tau \le T\}$, $T > 0, \omega > 0$ получим семейство обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \tilde{A}(\xi,\tau)\tilde{u} + \tilde{f}(\xi,\tau), \quad \tau \in [0,T], \ \tilde{u} \in R^n, \qquad (3)$$

$$B(\xi)\tilde{u}(\xi,0) + C(\xi)\tilde{u}(\xi,T) = d(\xi), \quad \xi \in [0,\omega], \qquad (4)$$

где $\tilde{u}(\xi,\tau) = u(\tau+\xi,\tau)$, $\tilde{A}(\xi,\tau) = A(\tau+\xi,\tau)$, $\tilde{f}(\xi,\tau) = f(\tau+\xi,\tau)$.

Если функция $u(x,t)$, непрерывная и непрерывно дифференцируемая по x и t в $C(\overline{\Omega}, R^n)$, является решением задачи (1)-(2), то $\tilde{u}(\xi,\tau) = u(\tau+\xi,\tau)$ будет решением (3)-(4), и наоборот, если функция $\tilde{u}(\xi,\tau)$ из $C(\overline{H}, R^n)$ удовлетворяет уравнению (3) и условию (4), то учитывая $x = \xi+\tau, t = \tau$, функция $u(x,t)$, являющаяся непрерывной и дифференцируемой по x и t, будет решением (1)-(2) на $\overline{\Omega}$.

Для решения поставленной задачи применяется метод параметризации (м.п.) [3] к семейству линейных двухточечных краевых задач (3)-(4). Суть м.п. заключается в следующем: 1) берется шаг $h > 0 : Nh = T$ и интервал $[0,T)$ разбивается на N частей; 2) вводятся дополнительные параметры – значения искомой функции в начальных точках интервалов длины h, и задача (3)-(4) сводится к эквивалентной краевой задаче с функциональным параметром; 3) строится алгоритм нахождения решения задачи с параметром, каждый шаг которого состоит их двух этапов:

а) решение линейной системы уравнений относительно параметров, определяемое по шагу $h > 0$ и исходным данным поставленной задачи;

b) решение задачи Коши на интервалах длины h при соответствующих значениях функционального параметра.

Берем шаг $h > 0$ и производим разбиение $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{N} [(r-1)h, rh)$. Сужение функции $\tilde{u}(\xi,\tau)$ на $[0,\omega]\times[(r-1)h, rh)$ обозначим через $\tilde{u}_r(\xi,\tau)$, $r = \overline{1,N}$.

Тогда задача (3)-(4) сводится к эквивалентному семейству краевых задач:

$$\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\tau}=\tilde{A}(\xi,\tau)\tilde{u}_r+\tilde{f}(\xi,\tau),\ \ \xi\in[0,\omega],$$

$$\tau\in[(r-1)h,rh),\ r=\overline{1,N},\qquad(5)$$

$$B(\xi)\tilde{u}_1(\xi,0)+\lim_{\tau\to Nh-0}C(\xi)\tilde{u}_N(\xi,\tau)=d(\xi),\ \xi\in[0,\omega],\ (6)$$

$$\lim_{\tau\to sh-0}\tilde{u}_s(\xi,\tau)=\tilde{u}_{s+1}(\xi,sh),\ \xi\in[0,\omega],\ s=\overline{1,N-1},\ (7)$$

где (7) есть условие склеивания решения во внутренних линиях разбиения.

Решением задачи (5)-(7) является система функций $\tilde{u}[\xi,\tau]=(\tilde{u}_1(\xi,\tau),...,\tilde{u}_N(\xi,\tau))'$, где каждая функция $\tilde{u}_r(\xi,\tau)$ непрерывно дифференцируема по τ и ограничена на $[(r-1)h,rh)$. Отметим, что в начальной точке $\tau=(r-1)h$ интервала $[(r-1)h,rh)$ уравнению (5) удовлетворяет правосторонняя производная функции $\tilde{u}_r(\xi,\tau)$. Из непрерывности и ограниченности функции $\tilde{u}_r(\xi,\tau)$ на интервале $[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$ и из [4] следует существование левосторонних пределов: $\lim_{\tau\to rh-0}\tilde{u}_r(\xi,\tau)$. Значения $\tilde{u}_1(\xi,0)$ и $\lim_{\tau\to Nh-0}\tilde{u}_N(\xi,\tau)$ удовлетворяют (6), а значения $\lim_{\tau\to sh-0}\tilde{u}_s(\xi,\tau)$ и $\tilde{u}_{s+1}(\xi,sh)$, $s=\overline{1,N-1}$ удовлетворяют соотношениям (7).

Если $\tilde{u}^*(\xi,\tau)$ – решение задачи (3)-(4),то система его сужений $\tilde{u}^*[\xi,\tau]=(\tilde{u}_1^*(\xi,\tau),...,\tilde{u}_N^*(\xi,\tau))'$ будет решением задачи (5)-(7).

Действительно, из непрерывной дифференцируемости на $[0,\omega]\times[0,T]$ следует ограниченность функции $\tilde{u}^*(\xi,\tau)$ на $[0,\omega]\times[0,T]$. Тогда функция $\tilde{u}_r^*(\xi,\tau)$ непрерывно дифференцируема и ограничена на $[0,\omega]\times[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$.

Пусть $\hat{u}[\xi,\tau]=(\hat{u}_1(\xi,\tau),...,\hat{u}_N(\xi,\tau))'$ – решение задачи (5)-(7). Из элементов системы функций $\hat{u}[\xi,\tau]$ построим функцию $\hat{u}(\xi,\tau)$ на $[0,T]$, определяемую равенствами: $\hat{u}(\xi,\tau)=\hat{u}_r(\xi,\tau)$, $\tau\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, $\hat{u}(\xi,T)=\lim_{\tau\to T-0}\hat{u}_N(\xi,\tau)$.

Функция $\hat{u}(\xi,\tau)$ является непрерывной на $[0,T]$ и с учетом (6) удовлетворяет краевому условию (4). Так как функция $\hat{u}_r(\xi,\tau)$ удовлетворяет уравнению (5) при всех $\tau\in[(r-1)h,rh)$, то функция $\hat{u}(\xi,\tau)$ удовлетворяет (3) при всех $\tau\in[0,T]$, кроме точек $\tau=rh$, $r=\overline{1,N}$.

Непосредственно покажем, что функция $\hat{u}(\xi,\tau)$ имеет непрерывную производную и в точках $\tau=sh$, $s=\overline{1,N-1}$, а при $\tau=T$ имеет левостороннюю производную. Возьмем любую точку $\tau=sh$, $s=\overline{1,N-1}$. Рассмотрим уравнение на интервалах $[(s-1)h,sh)$ и $[sh,(s+1)h)$, $s=\overline{1,N-2}$

$$\frac{\partial\hat{u}(\xi,\tau)}{\partial\tau}=\tilde{A}(\xi,\tau)\hat{u}+\tilde{f}(\xi,\tau),\ \ \forall\tau\in[(s-1)h,sh),\ (a)$$

$$\frac{\partial\hat{u}(\xi,\tau)}{\partial\tau}=\tilde{A}(\xi,\tau)\hat{u}+\tilde{f}(\xi,\tau),\ \ \forall\tau\in[sh,(s+1)h).\ (b)$$

Из (a) имеем, что $\lim_{\tau\to sh-0}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\tau}(\xi,\tau)$ существует и $\lim_{\tau\to sh-0}\frac{\partial\hat{u}}{\partial\tau}(\xi,\tau)=\tilde{A}(\xi,sh)\hat{u}+\tilde{f}(\xi,sh)$.

Отсюда имеем существование левосторонней производной функции $\hat{u}(\xi,\tau)$ в точке $\tau=sh$. Учитывая (b) и существование правосторонней производной, получим существование производной функции $\hat{u}(\xi,\tau)$ в точке $\tau=sh$, ее непрерывность, а также выполнимость уравнения в точке $\tau=sh$, $s=\overline{1,N-1}$. Таким образом, построенная функция $\hat{u}(\xi,\tau)$ является непрерывно дифференцируемой на $[0,T]$, удовлетворяет уравнению (3), условиям (4).

Обозначим через $\lambda_r(\xi)$ значение функции $\tilde{u}_r(\xi,\tau)$ при $\tau=(r-1)h, r=\overline{1,N}$.

На каждой области разбиения производим замену $\bar{u}_r(\xi,\tau)=\tilde{u}_r(\xi,\tau)-\lambda_r(\xi)$.

Получили краевую задачу с функциональными параметрами $\lambda_r(\xi)$:

$$\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial\tau}=\tilde{A}(\xi,\tau)\bar{u}_r(\xi,\tau)+\tilde{f}(\xi,\tau)+\tilde{A}(\xi,\tau)\lambda_r(\xi),\quad(8)$$

$$\bar{u}_r(\xi,(r-1)h)=0,\ \ \xi\in[0,\omega],\ (r=\overline{1,N}),\qquad(9)$$

$$B(\xi)\lambda_1(\xi)+C(\xi)\lambda_N(\xi)+\lim_{\tau\to Nh-0}C(\xi)\bar{u}_N(\xi,\tau)=d(\xi),$$

$$\xi\in[0,\omega],\qquad(10)$$

$$\lambda_s(\xi)+\lim_{\tau\to sh-0}\bar{u}_s(\xi,\tau)-\lambda_{s+1}(\xi)=0,\ \xi\in[0,\omega],\ s=\overline{1,N-1}.\ (11)$$

Если функция $\tilde{u}(\xi,\tau)$ – решение задачи (3)-(4), то система пар функций $(\lambda_r(\xi)=\tilde{u}_r(\xi,(r-1)h),\bar{u}_r(\xi,\tau)=\tilde{u}_r(\xi,\tau)-\tilde{u}_r(\xi,(r-1)h))$ будет решением (8)-(11), и наоборот, если $(\lambda_r^*(\xi),\bar{u}_r^*(\xi,\tau))$ является решением (8)-(11), то функция $\tilde{u}^*(\xi,\tau)$, которая получена при склеивании систем функций $(\lambda_r^*(\xi)+\bar{u}_r^*(\xi,\tau))$, будет решением задачи (3)-(4).

В отличие от задачи (5)-(7) в задаче (8)-(11) появились начальные условия (9), которые позволяют определить $\bar{u}_r(\xi,\tau)$ из интегральных уравнений:

$$\bar{u}_r(\xi,\tau)=\int_{(r-1)h}^{\tau}\tilde{A}(\xi,\tau)\bar{u}_r(\xi,\tau)d\tau+\int_{(r-1)h}^{\tau}\tilde{f}(\xi,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{\tau}\widetilde{A}(\xi,\tau)\lambda_r(\xi)d\tau. \qquad (12)$$

Подставляя $\bar{u}_r(\xi,\tau)$ в правую часть (12) и повторяя данный процесс ν раз, переходя к пределу при $\tau\to rh-0$, используя краевые условия (10) и условия склеивания решения во внутренних линиях разбиения, умножая обе части (10) на $h>0$, имеем систему уравнений относительно параметров $\lambda_{ri}(\xi)$ $(r=\overline{1,N},\ i=\overline{1,n})$:

$$Q_\nu(\xi,h)\lambda(\xi)=-F_\nu(\xi,h)-G_\nu(\xi,h,\bar{u}), \qquad (13)$$

где $\lambda(\xi)=(\lambda_{11}(\xi),...,\lambda_{1n}(\xi),...,\lambda_{r1}(\xi),...,\lambda_{rn}(\xi),...,$

$\lambda_{N1}(\xi),...,\lambda_{Nn}(\xi)),$

$$Q_\nu(\xi,h)=$$

$$=\begin{bmatrix} hB(\xi) & 0 & 0 & \dots & 0 & hC(\xi)(I+D_{\nu N}(\xi,h)) \\ I+D_{\nu 1}(\xi,h) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{\nu 2}(\xi,h) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I+D_{\nu N-1}(\xi,h) & -I \end{bmatrix}$$

I – единичная матрица размерности n,

$$D_{\nu r}(\xi,h)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\widetilde{A}(\xi,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\widetilde{A}(\xi,\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}\widetilde{A}(\xi,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+..+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\widetilde{A}(\xi,\tau_1)...\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\widetilde{A}(\xi,\tau_\nu)d\tau_\nu...d\tau_1,$$

$$F_\nu(\xi,h)=(-d(\xi)h+C(\xi)F_{\nu N}(\xi,h)h,F_{\nu 1}(\xi,h),...,F_{\nu N-1}(\xi,h))',$$

$$G_\nu(\xi,h,\bar{u})=(C(\xi)G_{\nu N}(\xi,h,\bar{u}_N)h,G_{\nu 1}(\xi,h,\bar{u}_1),...,$$

$$G_{\nu N-1}(\xi,h,\bar{u}_{N-1}))'. \qquad (14)$$

Заметим, что одним из основных условий однозначной разрешимости исследуемой задачи является обратимость матрицы $Q_\nu(\xi,h)$ при некоторых $h>0:Nh=T$ и $\nu,\nu=1,2,...$, составленная по исходным данным задачи.

Для определения nN пар $(\lambda_r^{(k)}(\xi),\bar{u}_r^{(k)}(\xi,\tau))$ имеем замкнутую систему уравнений (12)-(13). Применяя метод последовательных приближений, находим решение краевой задачи (3)-(4). Для нахождения решения краевой задачи с функциональными параметрами (8)-(11) – систему пар $(\lambda_r^{(k)}(\xi),\bar{u}_r^{(k)}(\xi,\tau))$, $r=\overline{1,N}$ – строим алгоритм.

Шаг 0: Из уравнения $Q_\nu(\xi,h)\lambda(\xi)=-F_\nu(\xi,h)$ определяем начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)}(\xi)$. На отрезках $[(r-1)h,rh)$, решая задачу Коши (8)-(9) при $\lambda_r(\xi)=\lambda_r^{(0)}(\xi)$, находим $\bar{u}_r^{(0)}(\xi,\tau)$.

Шаг 1: Найденные $\bar{u}_r^{(0)}(\xi,\tau)$ подставляя в правую часть (13), определяем $\lambda^{(1)}(\xi)$:

$$\lambda^{(1)}(\xi)=-[Q_\nu(\xi,h)]^{-1}\cdot\{F_\nu(\xi,h)+G_\nu(\xi,h,\bar{u}^{(0)})\}. \qquad (15)$$

При $\lambda_r(\xi)=\lambda_r^{(1)}(\xi)$ решая задачу Коши (8)-(9), находим $\bar{u}_r^{(1)}(\xi,\tau)$. Тем самым нашли пару $(\lambda_r^{(1)}(\xi),\bar{u}_r^{(1)}(\xi,\tau))$. И т. д.

Таким образом, на k-м шаге находим систему пар $(\lambda_r^{(k)}(\xi),\bar{u}_r^{(k)}(\xi,\tau))$, $(k=0,1,2,...,\ r=\overline{1,N})$.

Достаточные условия сходимости предложенного алгоритма, а также вопрос о существовании и единственности решения задачи (3)-(4) устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть при некоторых $h>0:Nh=T$, и $\nu,\nu=1,2,...,(nN\times nN)$ – матрица $Q_\nu(\xi,h)$ обратима при всех $\xi\in[0,\omega]$, и выполняются неравенства:

а) $\left\|[Q_\nu(\xi,h)]^{-1}\right\|\le\gamma_\nu(h)$;

б) $q_\nu(\xi,h)=\gamma_\nu(h)\max\{1,h\|C(\xi)\|\}\left[e^{\alpha(\xi)h}-\right.$

$$\left.-1-\alpha(\xi)h-...-\frac{(\alpha(\xi)h)^\nu}{\nu!}\right]\le\sigma<1,$$

где $\alpha(\xi)=\max\limits_{\tau\in[0,T]}\|\widetilde{A}(\xi,\tau)\|$, $\sigma=const$.

Тогда существует единственное решение $\tilde{u}^*(\xi,\tau)\in C(\overline{H},R^n)$ задачи (3)-(4).

Доказательство. При доказательстве теоремы используется схема доказательства теоремы 1 [3, с. 54].При фиксированных $\xi\in[0,\omega]$ для функции $\bar{u}_r(\xi,\tau)\in C(\overline{H}_r,R^n)$ введем норму: $\|\bar{u}_r(\xi,\cdot)\|=\max\limits_{\tau\in[0,T]}\|\bar{u}_r(\xi,\tau)\|$. В силу обратимости матрицы $Q_\nu(\xi,h)$ следует существование $\lambda^{(0)}(\xi)$, то есть $\lambda^{(0)}(\xi)=-[Q_\nu(\xi,h)]^{-1}\cdot F_\nu(\xi,h)$.

Учитывая $F_\nu(\xi,h)$ и $F_{\nu r}(\xi,h)$, оценим

$$\left\|\lambda^{(0)}(\xi)\right\|=\max_r\left\|\lambda_r^{(0)}(\xi)\right\|\le\gamma_\nu(h)\|F_\nu(\xi,h)\|\le$$

$$\le\gamma_\nu(h)\max\left\{h\|d(\xi)\|+h\|C(\xi)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!}\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{f}(\xi,\tau)\right\|h,\right.$$

$$\left.\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!}\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{f}(\xi,\tau)\right\|h\right\}\le$$

$$\le\gamma_\nu(h)\max\left\{1+h\|C(\xi)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!},\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!}\right\}\cdot$$

$$\cdot\max\left(\|d(\xi)\|,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{f}(\xi,\tau)\right\|\right)h.$$

Используя (15), условие а), (14), находим

$$\left\|\lambda^{(1)}(\xi)-\lambda^{(0)}(\xi)\right\| \le \left\|\left[Q_\nu(\xi,h)\right]^{-1}\right\| \cdot$$

$$\cdot \left\|G_\nu\left(\xi,h,\bar{u}^{(0)}\right)\right\| \le \gamma_\nu(h)\left\|G_\nu\left(\xi,h,\bar{u}^{(0)}\right)\right\| \le$$

$$\le \gamma_\nu(h)\max\left(1,h\|C(\xi)\|\right)\frac{(\alpha(\xi)h)^\nu}{\nu!}\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\bar{u}^{(0)}(\xi,\tau)\right\|.$$

Учитывая (13), (14), оценим $\left\|\lambda^{(k+1)}(\xi)-\lambda^{(k)}(\xi)\right\|$:

$$\left\|\lambda^{(k+1)}(\xi)-\lambda^{(k)}(\xi)\right\| \le \left\|\left[Q_\nu(\xi,h)\right]^{-1}\right\| \cdot$$

$$\cdot\left\|G_\nu\left(\xi,h,\bar{u}^{(k)}(\xi,\tau)\right)-G_\nu\left(\xi,h,\bar{u}^{(k-1)}(\xi,\tau)\right)\right\| \le$$

$$\le \gamma_\nu(h)\max\left(1,h\|C(\xi)\|\right)\max\left\{\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\alpha(\xi)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}\alpha(\xi)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\alpha(\xi)\left\|\bar{u}_r^{(k)}(\xi,\tau_\nu)-\bar{u}_r^{(k-1)}(\xi,\tau_\nu)\right\|d\tau_\nu\ldots d\tau_1\right\}. \quad (16)$$

Вычисляя повторные интегралы, получим:

$$\left\|\lambda^{(k+1)}(\xi)-\lambda^{(k)}(\xi)\right\| \le q_\nu(\xi,h)\left\|\lambda^{(k)}(\xi)-\lambda^{(k-1)}(\xi)\right\|.$$

Для нормы разности решений задачи (8)-(9) при разных $\lambda_r(\xi)$ имеем оценку:

$$\left\|\bar{u}_r^{(k)}(\xi,\tau)-\bar{u}_r^{(k-1)}(\xi,\tau)\right\| \le$$

$$\le \left[e^{\alpha(\xi)(\tau-(r-1)h)}-1\right]\cdot\left\|\lambda_r^{(k)}(\xi)-\lambda_r^{(k-1)}(\xi)\right\|. \quad (17)$$

Используя (16)-(17), а также условие б), можно показать, что последовательность $\left(\lambda_r^{(k)}(\xi),\bar{u}_r^{(k)}(\xi,\tau)\right)$ сходится к $\left(\lambda_r^*(\xi),\bar{u}_r^*(\xi,\tau)\right)$ при $k\to\infty$. Так как $\left(\lambda_r^*(\xi),\bar{u}_r^*(\xi,\tau)\right)$ является решением (8)-(11), то $\tilde{u}^*(\xi,\tau)$, полученная склеиванием систем функций $\left(\lambda_r^*(\xi)+\bar{u}_r^*(\xi,\tau)\right)$, – решение задачи (3)-(4), и справедлива оценка

$$\max\left|u^*(\xi,\tau)\right| \le M_\nu(\xi,h)\max\left(\|d\|(\xi),\left\|\tilde{f}(\xi,\tau)\right\|\right),$$

где $M_\nu(\xi,h)=\left\{\gamma_\nu(h)\left[e^{\alpha(\xi)h}-\right.\right.$

$$\left.-1\right]\max\left\{1+h\|C(\xi)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!},\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!}\right\}+e^{\alpha(\xi)h}\Bigg\}h\,\cdot$$

$$\cdot\left[\gamma_\nu(h)e^{\alpha(\xi)h}\frac{1}{1-q_\nu(\xi,h)}\max(1,h)\|C(\xi)\|\frac{(\alpha(\xi)h)^\nu}{\nu!}+1\right]+$$

$$+\gamma_\nu(h)\max\left\{1+h\|C(\xi)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!},\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha(\xi)h)^j}{j!}\right\}h.$$

Дадим определение корректной разрешимости задачи (3)-(4).

Определение. Задача (3)-(4) называется корректно разрешимой, если для любых $\tilde{f}(\xi,\tau)\in C\left(\overline{\mathrm{H}},R^n\right)$ и $d(\xi)\in C\left([0,\omega],R^n\right)$ она имеет единственное решение $\tilde{u}^*(\xi,\tau)\in C\left(\overline{\mathrm{H}},R^n\right)$ и для него имеет место оценка

$$\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{u}^*(\xi,\tau)\right\| \le K(\xi)\max\left(\|d(\xi)\|,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{f}(\xi,\tau)\right\|\right), \quad (18)$$

где $K(\xi)$ – непрерывная на $[0,\omega]$ функция, не зависящая от $\tilde{f}(\xi,\tau),d(\xi)$.

Из (18) вытекает, что при выполнении условий теоремы 1 задача (3)-(4) корректно разрешима с функцией $K(\xi)=M_\nu(\xi,h)$.

В оценке (18) возьмем максимум по ξ, тогда получим константу корректной разрешимости *K*, которая определяется по исходным данным задачи (3)-(4) и не зависит от $\tilde{f}(\xi,\tau),d(\xi)$, и справедлива оценка

$$\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{u}^*(\xi,\tau)\right\| \le K\max\left(\|d(\xi)\|,\max_{\tau\in[0,T]}\left\|\tilde{f}(\xi,\tau)\right\|\right),$$

где $K=\gamma_\nu(h)\max\left\{1+h\|C(\xi)\|e^{\alpha(\xi)h},e^{\alpha(\xi)h}\right\}h$.

Единственность решения задачи (3)-(4) доказывается методом от противного.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение $u^*(x,t)$.

Из теоремы 1 вытекает, что задача (3)-(4) однозначно разрешима.

Так как задача (3)-(4) эквивалентна задаче (1)-(2), то получим, что задача (1)-(2) имеет единственное решение $u^*(x,t)$.

Список использованной литературы:

1. Пташник Б.И. n-линейная задача для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Вестник Львовского политехнического института. 1967. №16. С. 80-87.
2. Кигурадзе Т.И., Кусано Т. О корректности начально-краевых задач для линейных гиперболических уравнений высших порядков с двумя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. 2003, том 39. №4. С. 516-526.
3. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, №1. С. 50-66.
4. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Критерий корректной разрешимости краевой задачи для системы гиперболических уравнений // Известия МОН, НАН РК Сер. физ.-матем. 2002. №3. С. 20-26.