

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ С НЕРАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

В статье представлен метод аппроксимации сигналов на определенном интервале времени с неравномерной дискретизацией. Для составленного аппроксимирующего полинома получено выражение спектральной плотности. Получены зависимости для оценки погрешности во временной и частотной областях для спектров аппроксимированных сигналов, представленных гармоническими колебаниями.

Цифровая обработка сигналов является основополагающей технологией преобразования сигналов в современных информационно-измерительных и управляющих системах (ИИУС). Существенная часть информационного преобразования, как правило, производится над образом сигнала в частотной области. Преимущество такого подхода особенно сказывается при выделении информативного колебания с конечной шириной спектра, представленного в смеси с широкополосным шумом.

Для получения значений дискретизированных сигналов используются, главным образом, аналогово-цифровые преобразования (АЦП) с *равномерной дискретизацией*. Подобное представление сигнала ориентировано для достаточно простых и эффективных алгоритмов цифровой обработки в частотной области. Именно для обработки подобных массивов значений разработаны дискретное и быстрое преобразования Фурье.

Однако при решении ряда задач по цифровой обработке сигналов приходится сталкиваться с *неравномерной дискретизацией* сигналов, обусловленной, например, использованием АЦП с генерацией выходных кодов по моментам сравнения входного сигнала с уровнями квантования или нелинейными преобразованиями во времени цифрового сигнала с равномерной дискретизацией. Для решения ряда подобных задач авторами были разработаны частные методики спектральных преобразований с использованием ранее полученных теоретических результатов [1]. Но возрастающие требования к разрешающей способности обозначенного выше класса ИИУС требуют создания универсального аппарата преобразования сигнала в частотной области, разработки спектрально-временного метода преобразования

цифровых сигналов с неравномерной дискретизацией с обусловленной методической погрешностью. Решению этой научной задачи посвящена настоящая работа.

Очевидно, чтобы избавиться от погрешности, присущей дискретному преобразованию Фурье и обусловленной тем, что вычисление интеграла Фурье по существу заменяется вычислением суммы площадей прямоугольников, что неизбежно приводит к существенному искажению спектра широкополосных колебаний, необходимо получить аналитическое выражение спектрального преобразования сигнала с неравномерной дискретизацией. А это, в свою очередь, возможно только в случае аналитического представления сигнала с неравномерной дискретизацией. Таким образом, сформулированная задача должна решаться в два этапа:

1-й этап – аппроксимация сигнала с неравномерной дискретизацией аналитическим выражением (интерполяция по множеству значений сигнала) с установленной погрешностью;

2-й этап – получение решения спектрального преобразования аппроксимированного сигнала в аналитическом виде.

1 *Выбор аппроксимации сигнала с неравномерной дискретизацией*

Пусть на отрезке $[t_0, t_n]$ заданы $n+1$ точек $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, которые называются узлами интерполяции, и имеются значения некоторого сигнала $e(t)$ в этих точках (рисунок 1):

$$e(t_0)=e_0, e(t_1)=e_1, e(t_2)=e_2, \dots, e(t_n)=e_n. \quad (1)$$

При этом в общем случае допускается, что

$$t_1 - t_0 \neq t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2 \neq \dots \neq t_n - t_{n-1}.$$

Требуется построить функцию $f(t)$ (интерполирующую функцию), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $e(t)$, то есть такую, чтобы

$$f(t_0)=e_0, f(t_1)=e_1, f(t_2)=e_2, \dots, f(t_n)=e_n. \quad (2)$$

В такой общей постановке задача может иметь бесчисленное множество решений. Однако эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $f(t)$ искать полином $P_n(t)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям (2), то есть такой, чтобы:

$$P_n(t_0)=e_0, P_n(t_1)=e_1, P_n(t_2)=e_2, \dots, P_n(t_n)=e_n \quad (3)$$

Полученную интерполяционную формулу обычно используют для приближенного вычисления значений данной функции для значений аргумента t , отличных от узлов интерполирования.

Из известных интерполяционных формул (Бесселя, Стирлинга, Стеффенсена, Эверетта, Гаусса, Чебышева и других) для решения поставленной задачи подходят только интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона, так как остальные известные авторам интерполяционные формулы рассчитаны на равномерную или специальную дискретизацию [2].

Анализ алгоритма формирования интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона показывает, что из названных полиномиальных формул наилучшим образом для цифровой обработки подходит полином Ньютона. Это связано с тем, что при необходимости изменения значения n полином Лагранжа надо строить заново [3].

Полином Ньютона строится на основе разделенных разностей, что при изменении значения n приводит к вычислению или исключению высшего порядка разделенных разностей [3].

Обозначим разделенные разности следующим образом.

Разделенная разность первого порядка функции $e(t)$:

$$\begin{aligned} e(t_0; t_1) &= \Delta_{11} = \frac{e(t_1) - e(t_0)}{t_1 - t_0}; \\ e(t_1; t_2) &= \Delta_{12} = \frac{e(t_2) - e(t_1)}{t_2 - t_1}; \\ &\dots \dots \dots \quad (4) \\ e(t_{n-1}; t_n) &= \Delta_{1n} = \frac{e(t_n) - e(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}. \end{aligned}$$

Разделенная разность второго порядка функции $e(t)$:

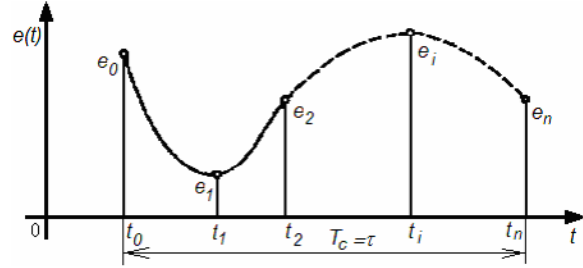


Рисунок 1

$$\begin{aligned} e(t_0; t_1; t_2) &= \Delta_{21} = \frac{\Delta_{12} - \Delta_{11}}{t_2 - t_0}; \\ e(t_1; t_2; t_3) &= \Delta_{22} = \frac{\Delta_{13} - \Delta_{11}}{t_3 - t_1}; \\ &\dots \dots \dots \quad (5) \\ e(t_{n-2}; t_{n-1}; t_n) &= \Delta_{2(n-1)} = \frac{\Delta_{1n} - \Delta_{1(n-1)}}{t_n - t_{n-2}}. \end{aligned}$$

Разделенная разность третьего порядка функции $e(t)$:

$$\begin{aligned} e(t_0; t_1; t_2; t_3) &= \Delta_{31} = \frac{\Delta_{22} - \Delta_{21}}{t_3 - t_0}; \\ e(t_1; t_2; t_3; t_4) &= \Delta_{32} = \frac{\Delta_{23} - \Delta_{22}}{t_4 - t_1}; \\ &\dots \dots \dots \quad (6) \\ e(t_{n-3}; t_{n-2}; t_{n-1}; t_n) &= \Delta_{3(n-2)} = \frac{\Delta_{2(n-1)} - \Delta_{2(n-2)}}{t_n - t_{n-3}}. \end{aligned}$$

И, учитывая очевидную закономерность формирования разделенных разностей, можно записать разделенную разность высшего порядка, которая оказывается единственной, завершающей пирамиду вычисляемых значений разделенных разностей:

$$e(t_0; t_1; \dots; t_n) = \Delta_{n1} = \frac{\Delta_{(n-1)2} - \Delta_{(n-1)1}}{t_n - t_0}. \quad (7)$$

Интерполяционный многочлен Ньютона для неравных промежутков с учетом (4)-(7) будет определяться алгебраическим многочленом n -й степени:

$$P_n(t) = e(t_0) + (t - t_0)\Delta_{11} + (t - t_0)(t - t_1)\Delta_{21} + \dots + (t - t_0)\dots(t - t_{n-1})\Delta_{n1}. \quad (8)$$

Это есть ни что иное, как степенной полином вида

$$P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} + \dots + a_0. \quad (9)$$

Из выражения (8) очевидно определение только двух коэффициентов:

$$a_n = \Delta_n; \quad a_0 = e(t_0) + \sum_{i=1}^n [(-1)^i \Delta_{i1} \prod_{j=0}^{i-1} t_j]. \quad (10)$$

Формула для вычисления остальных коэффициентов a_i для (9) при $n > 3$ была получена в результате достаточно сложной систематизации сумм произведений из выражения (8) для весовых множителей перед степенным аргументом t^i , которая выглядит следующим образом:

$$a_i = \sum_{m=1}^n [(-1)^{m+i} K_{i(m-i)} \Delta_{i1}], \quad (11)$$

где коэффициенты K_{ij} принадлежат неполной двумерной матрице значений, определяемые как:

$$K_{ij} = \begin{cases} K_{i0} = 1 \text{ } n \text{ } i \in [1, n]; \\ K_{i1} = \prod_{m=1}^i t_m \text{ } n \text{ } i \in [1, (n-1)]; \\ K_{ij} = K_{i(j-1)} t_j + \prod_{k=0}^{j-1} t_k \text{ } n \text{ } j \in [2, (n-1)]; \\ K_{ij} = K_{i(j-1)} t_{i+(j-1)} + K_{i(i-j)} \text{ } n \text{ } j \in [2, (n-2)], i \in [2, (n-j)]. \end{cases} \quad (12)$$

Из анализа выражений (4)-(7) и (10)-(12) следует, что процесс вычисления коэффициентов a_i для степенного полинома вида (9) хорошо алгоритмизируется и, с точки зрения цифровой обработки сигнала $e(t)$ по его выборкам e_i , является эффективной основой для получения аналитического выражения аппроксимированного сигнала $e(t)$ на интервале $[t_0, t_n]$.

Существенной проблемой при этом остается определение погрешности аппроксимации (9) функции сигнала $e(t)$, представленного выборками с неравномерной дискретизацией. Методику оценки этой погрешности лучше разрабатывать для частотной области, учитывая, что как распознавание, так и определение информативных параметров в современных ИИУС производится в основном в частотной области – в достаточно узкой области информативной части спектра сигнала $e(t)$. Для этого необходимо получить корректное решение спектрального преобразования для выражения вида (9).

2 Решение спектрального преобразования аппроксимированного сигнала в аналитическом виде

По условиям интегрируемости степенных рядов [2] спектральную характеристику сигнала, представленного (9), можно записать как

$$S(\omega) = S_0(\omega) + S_1(\omega) + S_2(\omega) + S_4(\omega) + \dots + S_n(\omega) = \sum_{i=0}^n S_i(\omega), \quad (13)$$

где каждое слагаемое в общем случае можно представить интегральным преобразованием в виде первообразной (без учета пределов интегрирования):

$$\begin{aligned} S_0(\omega) &= \int a_0 \exp(-j\omega t) dt = \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_0; \\ S_1(\omega) &= \int a_1 t \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_1 \left(t - \frac{1}{-j\omega} \right); \\ S_2(\omega) &= \int a_2 t^2 \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_2 \left(t^2 - \frac{2t}{-j\omega} + \frac{2 \cdot 1}{(-j\omega)^2} \right); \\ S_3(\omega) &= \int a_3 t^3 \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_3 \left(t^3 - \frac{3t^2}{-j\omega} + \frac{3 \cdot 2t}{(-j\omega)^2} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(-j\omega)^3} \right); \\ S_4(\omega) &= \int a_4 t^4 \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_4 \left(t^4 - \frac{4t^3}{-j\omega} + \frac{4 \cdot 3t^2}{(-j\omega)^2} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2t}{(-j\omega)^3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(-j\omega)^4} \right); \end{aligned}$$

И так далее. Учитывая очевидную закономерность формирования $S_i(\omega)$, можно составить выражение спектральной плотности для последнего слагаемого $a_n t^n$:

$$\begin{aligned} S_n(\omega) &= \int a_n t^n \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega} a_n \left(t^n - \frac{n t^{n-1}}{-j\omega} + \frac{n(n-1) t^{n-2}}{(-j\omega)^2} - \frac{n(n-1)(n-2) t^{n-3}}{(-j\omega)^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) t^{n-4}}{(-j\omega)^4} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{(-j\omega)^n} \right). \end{aligned}$$

Подставив в выражение (13) полученные выше выражения для $S_i(\omega)$ и произведя сис-

тематизацию по a_i , можно получить следующее *интегральное решение в виде первообразной* для спектральной характеристики временной функции вида (9):

$$S(\omega) = \sum_{i=0}^n S_i(\omega) = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \sum_{i=0}^n a_i i! \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{t^{i-k}}{(-j\omega)^k (i-k)!}. \quad (14)$$

Полученное выражение (14) замечательно тем, что оно для функций вида (9):

- получено в виде первообразной функции для неопределенного интеграла;
- не содержит погрешности спектрально-го преобразования;
- хорошо алгоритмируется, то есть является удобным для программирования вычисления значений $S(\omega)$ для различных частот ω .

При вычислении спектральной плотности произвольного отрезка функции $e(t)$ с целью исключения накопления ошибок вычислений, связанных с возведением в степень больших значений t , кроме нормирования t , необходимо привязывать отрезок к началу координат, используя теорему о смещении. Применяя понятие *сечения* спектрального преобразования [1] длительностью

$$\tau = t_n - t_0, \quad (15)$$

на основе первообразной (14) получим выражение спектральной плотности для любого отрезка $[0, \tau]$ функции $e(t)$, представленного $n+1$ выборками и отстоящего от начала координат на величину t_0 (рисунок 1):

$$S(\omega) = \sum_{i=0}^n S_i(\omega) = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \sum_{i=0}^n a_i i! \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{t^{i-k}}{(-j\omega)^k (i-k)!} \Big|_{t_0}^{t_0 + \tau} = \left[\left[e^{-j\omega \tau} \sum_{i=0}^n a_i i! \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{\tau^{i-k}}{(-j\omega)^k (i-k)!} \right] - \left[\sum_{i=0}^n a_i i! \frac{1}{(j\omega)^i} \right] \right] \cdot \frac{\exp(-j\omega t_0)}{-j\omega}. \quad (16)$$

Программирование процесса вычисления по (16) вплоть до $n = 31$ показало эффективность вычислений в виде высокой производительности и точности для функций, представ-

ленных степенным многочленом со степенью меньшей, чем n (при таких соотношениях погрешность аппроксимации отсутствует).

Однако главный практический интерес для цифровой обработки представляют сигналы, представленные сложными колебаниями с *гармонической несущей*. Функции подобных сигналов раскладываются в степенные ряды, в связи с чем, изъятие только нужного полинома, состоящего из первых членов степенного ряда, в качестве аппроксимирующей функции неизбежно приведет к погрешности аппроксимации. Следовательно, чтобы пользоваться рассмотренной выше технологий для гармонических колебаний, нужно разработать методику оценки указанной погрешности.

3 Оценка погрешности аппроксимации гармонического колебания полиномом Ньютона

При исследовании характера погрешности аппроксимации была взята норма в виде отношения числа узлов интерполяции (моментов отсчетов), приходящейся на период синусоидального колебания, при этом крайние узлы совпадали соответственно с началом и окончанием периода колебаний. В результате исследования было получено семейство функций ошибки $\delta_n(t) = e(t) - P_n(t)$, общий вид которой соответствует частному случаю на рисунке 2.

Значения амплитуд функции ошибки в зависимости от числа узлов интерполяции на периоде колебаний представлены в таблице 1.

Анализ полученных характеристик $\delta_n(t)$ показал, что, во-первых, функция ошибки по амплитуде резко убывает с увеличением числа n узлов интерполяции на одном и том же интервале интерполяции. Во-вторых, функция ошибки по амплитуде растет по мере приближения дискретизации к равномерной и достигает максимума при равномерной дискретизации, при этом функция ошибки становится нечетной функцией с быстро затухающими (примерно -40 дБ/ $(2\tau/n)$) от краев сечения колебаниями с периодом $2\tau/n$.

Наибольший интерес для анализа влияния ошибки аппроксимации на процесс цифровой обработки сигнала $e(t)$ представляет аналитическое выражение этой ошибки. Для нечетных значений $n=7,9,11,\dots,17,19$, которые являются наибо-

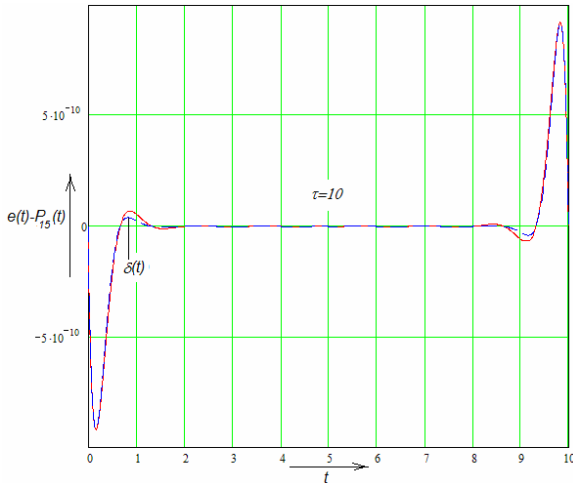


Рисунок 2

лее востребованными для обеспечения параметров обработки «скорость ... качество», было получено с приведенной погрешностью не более 10% выражение, аппроксимирующее указанную погрешность на интервале τ :

$$\delta(t) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{0,0165n^3 - 0,113n^2 - 0,242n + 1,93}{10^{n-5}};$$

$$\sin\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right) \left[\exp\left(\frac{-n\pi(\tau-t)}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{-n\pi t}{\tau}\right) \right]. \quad (17)$$

На рисунке 2 для $n=15$ пунктирной линией показан график зависимости (17).

Первый множитель в выражении (17) является весовым и зависит от числа узлов интерполяции (то есть, от числа отсчетов), который можно обозначить как

$$g_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{0,0165n^3 - 0,113n^2 - 0,242n + 1,93}{10^{n-5}}. \quad (18)$$

С учетом (18), а также учитывая быстрое затухание экспонент в выражении (17) в пределах интервала аппроксимации τ , можно вывести выражение для спектральной плотности функции ошибки:

$$S_{er}(\omega) = \int_0^{\tau} g_n \sin\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right) \left[\exp\left(\frac{-n\pi(\tau-t)}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{-n\pi t}{\tau}\right) \right] e^{-j\omega t} dt \approx$$

$$S_{er}(\omega) = g_n \int_{-\infty}^{\tau} \sin\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right) \left[\exp\left(\frac{-n\pi(\tau-t)}{\tau}\right) \right] e^{-j\omega t} dt -$$

$$\begin{aligned} & -g_n \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right) \left[\exp\left(\frac{-n\pi t}{\tau}\right) \right] e^{-j\omega t} dt = \\ & = g_n \left[\frac{\frac{n\pi}{\tau} e^{-j\omega\tau}}{\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\tau} - j\omega\right)^2} - \frac{\frac{n\pi}{\tau}}{\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\tau} + j\omega\right)^2} \right] = \\ & = g_n \left[\frac{\frac{n\pi}{\tau} e^{-j\omega\tau}}{\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\tau} - j\omega\right)^2} - \frac{\frac{n\pi}{\tau}}{\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\tau} + j\omega\right)^2} \right] = \\ & = g_n \frac{n\pi}{\tau} \frac{2\omega^2 \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + j4 \left[\omega \frac{n\pi}{\tau} \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - \left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]}{4\left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^4 + \omega^4} e^{-j\omega\tau}. \quad (19) \end{aligned}$$

Выражение (19) было проверено на функции $\sin(0,2\pi t)$ при различных значениях n на основе сравнения с выражением

$$S_{er}(\omega) = \int_0^{\tau} (e(t) - P_n(t)) e^{-j\omega t} dt \quad (20)$$

с использованием численных методов интегрирования комплексных функций. При этом было установлено, что при равномерной дискретизации в области несущей спектры (19) и (20) полностью совпадают. На рисунке 3 представлен амплитудный спектр $|S_{er1}(\omega)|$ при равномерной дискретизации.

При случайном распределении интервалов дискретизации с равномерным законом распределения амплитудный спектр ошибки достигает минимума. На рисунке 3 он представлен как $|S_{er2}(\omega)|$. Это объясняется тем, что спектр функции ошибки при неравномерной дискретизации приближается к спектру «белого» шума, то есть становится более равномерным, а не сосредотачивается в области частот, кратных частоте несущей.

Проведенное исследование по сравнению этих двух видов амплитудных спектров функции ошибки интерполяции полиномом Ньютона гармонической функции на интервале, равном ее периоду повторения, при различных значениях n показало, что существует устойчивое соотношение между их максимальными значениями в пределах 20-и процентной погрешности:

Таблица 1

n	7	9	11	13	15	17	19
$ \delta(n) _{\max}$	$1,7 \times 10^{-3}$	$7,2 \times 10^{-5}$	$2,2 \times 10^{-6}$	5×10^{-8}	9×10^{-10}	$1,3 \times 10^{-11}$	$2,1 \times 10^{-13}$

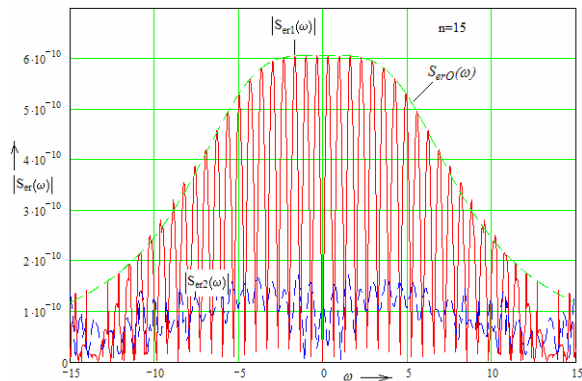


Рисунок 3

$$\frac{|S_{er2}(\omega)|_{\max}}{|S_{er1}(\omega)|_{\max}} \approx \frac{1}{\pi}. \quad (21)$$

С учетом (21) на основе (19) можно составить выражение *асимптотического амплитудного спектра функции ошибки* интерполяции гармонического колебания, значений которого амплитудный спектр реальной ошибки аппроксимации не превысит ни при каких условиях:

$$S_{erA}(\omega) = \frac{g_n \tau}{n\pi^2 + g_n} \frac{n\pi}{\tau} \frac{2\omega^2 \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + j4 \left[\omega \frac{n\pi}{\tau} \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - \left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]}{4 \left(\frac{n\pi}{\tau}\right)^4 + \omega^4}. \quad (22)$$

Полученное выражение (22), по сути, представляет собою предельную функцию

амплитудного спектра *шума интерполяции* и может быть использовано для количественной оценки вклада этого вида шума в информационную составляющую спектра измерительного сигнала при его цифровой обработке.

Из выражения (19) можно получить *огнивающую спектра функции ошибки интерполяции*, которая бывает незаменимой при эскизной оценке наличия шумов интерполяции во всем диапазоне частот, которая выглядит следующим образом:

$$S_{erO} = g_n \frac{\tau}{n\pi} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{\tau}\right)^4 + 4\omega^4}}{\left(\frac{2n\pi}{\tau}\right)^2 + \omega^4 \left(\frac{\tau}{n\pi}\right)^2}. \quad (23)$$

Данная зависимость представлена на рисунке 3. Отличительное свойство этой функции – ее независимость от четности n .

Таким образом, получен математический инструмент с установленными погрешностями для спектрального анализа аппроксимированного колебания с неравномерной дискретизацией, который представляет собою спектрально-временной метод обработки подобных сигналов на конечном интервале (сечении) времени.

Список использованной литературы:

1. Булатов В.Н., Дегтярев С.В. Метод выделения информативной части спектра зашумленных доплеровских сигналов с использованием нелинейной системы времени // Вестник ОГУ, 2004. - №2. С. 163 – 167.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ. / Под ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 832 с.: ил.
3. Волков Е.А. Численные методы: Учебн. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. – М.:Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1987. – 248 с.