

## К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СЖАТО-ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕЙ

В статье рассматривается определение конечных перемещений сжато-изогнутых стержней. Показывается, что приближенное описание формы изогнутой оси обеспечивает достаточную для практических целей точность решения задачи. На численном примере демонстрируется действительная работоспособность сжато-изогнутого стержня, определенная с учетом конечных перемещений.

Классическое решение задачи о потере устойчивости прямолинейного сжатого стержня, опертого шарнирно по концам, утверждает, что, будучи нагруженным сжимающей силой, направленной строго вдоль оси стержня и имеющей величину

$$\delta_n = a \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{P}{P_{кр}} \right)^i, \quad (1)$$

где  $L$  – расстояние между опорами (пролет),  
 $P = P_{кр}$  – изгибная жесткость стержня, при отклонении в результате постороннего воздействия в поперечном направлении стержень после удаления этого воздействия возвращается в прямолинейное состояние. При величине силы

$$P = P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{L^2}, \quad (2)$$

называемой критической, стержень сохраняет отклоненное (изогнутое) состояние и при устранении отклоняющего воздействия. Парадокс данного решения состоит в том, что при

$$P_{кр} < P < 2P_{кр}$$

стержень вновь должен вернуться (согласно решению) вернуться в прямолинейное состояние при устранении причины отклонения. Иначе говоря, потеря устойчивости происходит при строго определенных значениях

сжимающей силы. Однако этот парадокс кажущийся, поскольку причиной его является некоторое несоответствие действительности расчетной схемы задачи. Нам привычно рассматривать нагружение стержня как последовательное увеличение нагрузки. В этом случае при достижении силой значения  $P_{кр}$  происходит потеря устойчивости, после чего дальнейшее увеличение нагрузки теряет смысл. Классическая же постановка задачи предусматривает отклонение стержня при фиксированной величине сжимающей нагрузки.

Рассмотрим теперь ту же задачу в несколько иной, более близкой к действительности, постановке. Пусть стержень, шарнирно опертый по концам, изображенный на рисунке 1, имеет начальную кривизну, описываемую функцией

$$y = a \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{L}, \quad (3)$$

где  $a$  – наибольшее отклонение от прямолинейности, приходящееся на середину стержня ( $x = L/2$ ).

При действии на стержень сосредоточенной силы  $P$  вдоль оси  $x$  в стержне возникают изгибающие моменты

$$M(x) = P \cdot y = P \cdot a \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{L} \quad (4)$$

Пренебрегая эффектом действия продольных и поперечных сил (в силу малости этого эффекта при небольшой величине поперечного отклонения в сравнении с длиной стержня) перемещения, вызванные силой  $P$  можно определить по формуле

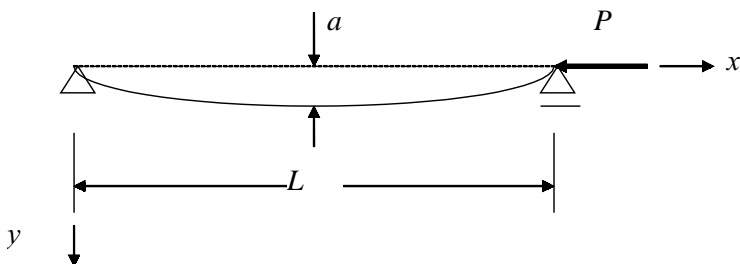


Рисунок 1.

$$\delta = 2 \int_0^{L/2} \frac{M(x) \cdot M_e(x)}{E \cdot J} dx, \quad (5)$$

где  $M_e(x)$  – изгибающий момент, вызванный единичной силой, приложенной в сечении, перемещение которого определяется, в направлении искомого перемещения.

В частности, для определения вертикального перемещения в середине стержня функция  $M_e(x)$  имеет вид:

$$M_e(x) = \frac{x}{2}$$

при  $x < \frac{L}{2}$  и

$$M_e(x) = \frac{L-x}{2}$$

при  $x \geq \frac{L}{2}$ .

Интегрируя (5), получаем вертикальное перемещение середины стержня

$$\delta_1 = \frac{P \cdot L^2}{\pi^2 \cdot E \cdot J} \cdot a. \quad (6)$$

Перемещение зависит от многих факторов, но при постоянстве нагрузки  $P$  определяющим является отклонение от прямолинейности. Налицо нелинейный процесс: полученное в результате перемещение увеличивает отклонение от прямолинейности и тем самым увеличивает изгибающий момент от нагрузки. Если предположить, что форма кривой остается подобной первоначальной, то дополнительный изгибающий момент, возникающий при увеличении отклонения на величину  $\delta_1$ , вызовет дополнительное перемещение

$$\delta_2 = \frac{P \cdot L^2}{\pi^2 \cdot E \cdot J} \cdot \delta_1. \quad (7)$$

Нетрудно заметить, что в множитель перед  $\delta_1$  в формуле (7), так же как и перед  $a$  в формуле (6), входит критическая сила –  $P_{кр}$ . Подставляя в (7) выражение (6), имеем с учетом сказанного:

$$\delta_2 = a \cdot \left( \frac{P}{P_{кр}} + \frac{P^2}{P_{кр}^2} \right). \quad (8)$$

Продолжая процесс корректировки отклонения от прямолинейности, получим на  $n$  – ом этапе

$$\delta_n = a \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{P}{P_{кр}} \right)^i. \quad (9)$$

При  $n \rightarrow \infty$  предел суммы членов этой геометрической прогрессии

$$\delta_{np} = \frac{a}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}. \quad (10)$$

Это же выражение получено в других работах (см., например, [1]) другим, более сложным путем. Ситуация при  $P = P_{кр}$  соответствует потере устойчивости, поскольку перемещение в этом случае неопределенно велико при любом значении начального отклонения стержня от прямолинейности. Если же  $P > P_{кр}$ , то геометрическая прогрессия – возрастающая, и перемещения неограниченно возрастают, следовательно, отмеченный выше парадокс классического решения отсутствует.

Как известно, расчет сжато-изогнутых стержней с учетом нарастающих деформаций называют деформационным расчетом. Задачей деформационного расчета является определение значений нагрузки, которая может быть выдержана элементом при расчете его по деформированной схеме [2]. Рассмотренный алгоритм представляет собой один из способов деформационного расчета стержня. Таким образом деформационный расчет дает возможность определить критическую силу, если форма изогнутой соответствует принятой при классическом решении этой задачи. Покажем, что предельную величину перемещения можно с достаточной точностью получить и при другой форме изогнутой оси.

Рассмотрим упругий стержень, заделанный одним концом и имеющий отклонение от прямолинейности в форме параболы второго порядка. Расчетная схема задачи показана на рисунке 2. Наибольшее отклонение – на конце консоли, где приложена сосредоточенная сила, плечо которой относительно опоры равно наибольшему отклонению.

Вертикальное перемещение консольного конца, вызванное действием силы  $P$  можно определить, пренебрегая эффектом от продольных и поперечных сил по правилу перемножения эпюр изгибающих моментов

$$\delta = \varpi_p \cdot M_e(x_p) / (E \cdot J), \quad (11)$$

где  $\varpi_p$  - площадь параболической эпюры изгибающих моментов от действия силы  $P$

$$\varpi_p = \frac{2}{3} P \cdot a \cdot L, \quad (12)$$

$x_p$  - координата центра тяжести эпюры изгибающих моментов от действия силы  $P$

$$x_p = \frac{3}{8} L, \quad (13)$$

$M_e(x_p)$  - ордината при  $x = x_p$  эпюры изгибающих моментов от действия единичной силы, приложенной вертикально на конце консоли

$$M_e(x_p) = \frac{5}{8} L. \quad (14)$$

Подставляя эти выражения в (9) получаем

$$\delta = \frac{5L^2}{12E \cdot J} \cdot P. \quad (15)$$

Выполняя далее деформационный расчет, получаем в пределе

$$\delta = \frac{a}{1 - P \cdot \frac{5L^2}{12E \cdot J}}. \quad (16)$$

Неопределенно большое значение перемещения получается при величине силы  $P$

$$P = \frac{12E \cdot J}{5L^2}. \quad (17)$$

Эта величина составляет 0,974 критической силы, определенной по классической формуле для этого случая, т. е. отличается на 2,7%, что вполне приемлемо для инженерных расчетов.

Для практических целей часто важнее, чем определить критическую силу, знать, не приведет ли эксплуатационная нагрузка к недопустимо большим деформациям или напряжениям при нагрузке, меньшей, чем критическая. Рассмотрим теперь случай, когда начальное отклонение создается поперечной нагрузкой (случай продольно-поперечного изгиба). Расчетная схема представлена на рисунке 3. Сила  $P$  приложена на конце консольной балки, изогнутой под действием поперечной нагрузки  $q$ .

Форма изогнутой оси приближенно может быть определена матрицей перемеще-

ний в расчетных сечениях стержня. Вертикальные перемещения расчетных сечений определяются в матричной форме выражением

$$F = M_e^T \cdot D \cdot M_q + M_e^T \cdot D \cdot M_p, \quad (18)$$

где  $F$  - матрица перемещений,

$D$  - матрица податливости,

$M_e^T$  - транспонированная матрица изгибающих моментов от действия вертикальных единичных сил в расчетных сечениях,

$M_q$  - матрица изгибающих моментов в расчетных сечениях от действия распределенной нагрузки,

$M_p$  - матрица изгибающих моментов в расчетных сечениях от действия сжимающей силы.

Численный анализ выполнен для балки из двутавра №10 (расчетное сопротивление по пределу текучести принято 240 МПа) длиной 100 см, нагруженной распределенной нагрузкой интенсивностью 1кН/м. Значение критической силы при потере устойчивости в плоскости изгиба для данной балки составляет 246 кН. Матрица податливости при определении перемещений принята с учетом

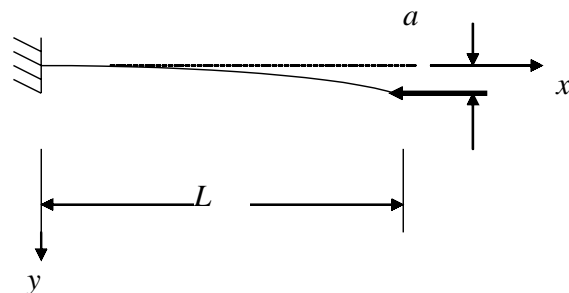


Рисунок 2.

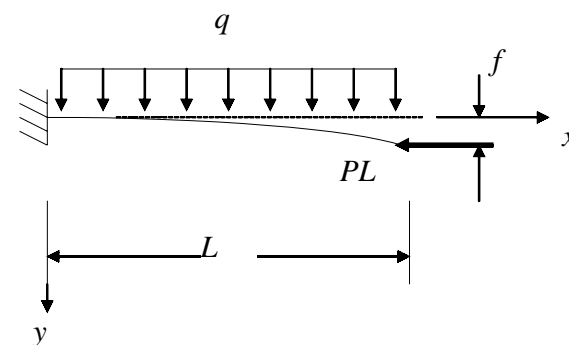


Рисунок 3.

вычисления интегралов по формуле Симпсона. Количество расчетных сечений 9. Результаты расчета для различных значений сжимающей силы приведены в таблице 2.

В колонке 2 таблицы приведены значения конечных вертикальных перемещений (прогибов) конца консоли, полученные последовательной корректировкой с учетом возрастания изгибающих моментов от сжимающей силы. В третьей колонке приведены изгибающие моменты от действия сжимающей силы, а в четвертой от совместного действия этой силы и поперечной нагрузки. Как видно, при малых величинах этой силы влиянием ее на работу балки можно пренебречь, а при больших, наоборот, это влияние становится определяющим, несмотря на то, что сама сжимающая сила не достигает и 40% от критической. В пятой, шестой и седьмой колонках показано изменение напряжений в поперечном сечении балки, вызванных отдельно действием, соответственно: изгибные напряжения от поперечной нагрузки, изгибные напряжения от действия сжимающей силы и напряжения от сжатия, вызванного этой силой. Здесь также наглядно видно возрастание роли сжимающей силы в напряженном состоянии балки. Значения суммарных напряжений приведены в последней колон-

Таблица 2.

$P, кН$	$f, мм$	$M_p, кНм$	$M, кНм$	$\sigma_q, МПа$	$\sigma_p, МПа$	$\sigma_N, МПа$	$\sigma, МПа$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,34	0,00034	0,5	12,6	<0,1	0,8	13,4
10	0,77	0,0077	0,51	12,6	0,2	8,3	21,1
20	1,58	0,0316	0,53	12,6	0,8	16,6	30,0
50	8,21	0,41	0,94	12,6	11,1	41,7	65,4
75	23,4	1,76	2,26	12,6	44,3	62,5	119,4
100	56,7	5,67	6,17	12,6	142,8	83,3	238,7

ке таблицы. Напряжения в сечении без учета изгиба от сжимающей силы  $P = 100$  кН составляют величину 96 МПа, что существенно меньше расчетного сопротивления, а условные напряжения, определенные в соответствии с нормативными требованиями [3] к расчету внецентренно-сжатых стержней, составляют 107 МПа. Как видно из таблицы, напряжения от изгиба, вызванного сжимающей силой 100 кН, так велики, что опасное сечение балки близко к предельному состоянию.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о необходимости проводить вычисление конечных значений перемещений и на основе этого определять истинное напряженное состояние сечений элементов конструкций в тех случаях, когда величина напряжений от сжатия соизмерима с напряжениями изгиба или их превосходит.

#### Список использованной литературы:

- 1 Санжаровский Р.С., Веселов А.А. Теория расчета строительных конструкций на устойчивость и современные нормы. М.: АСВ, 2002.-128с.
- 2 Строительная механика стержневых систем и оболочек / Ю.И.Бутенко и др. – Киев: Вища школа, 1980. – 488с.
- 3 СНиП II – 23-81. Стальные конструкции – М., 1990. – 96с.