Сокотущенко В.Н., Чикулаев А.В.
Орловский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ И СЛЕДСТВИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ И УПРУГОЙ СРЕД

На основе математической аналогии методов построения моделей вязкой и упругой сред, получены следствия линеаризованных уравнений Навье-Стокса и Ламе-Дюамеля-Неймана. При этом в рамках используемой в работе линеаризованной постановки физико-математической модели вязкой среды, компоненты вектора вихря удовлетворяют уравнению диффузии независимо от свойства сжимаемости вязкой среды. Полученные уравнения охватывают как адиабатические, так и изотермические процессы, которые могут сопровождать механические взаимодействия в зависимости от значений параметров характеризующих среду, и, следовательно, могут быть применены как для изоэнтропических (в случае обратимых процессов – адиабатических), так и для изотермических процессов.

Линейные модели вязкой и упругой сред описывают различные способы существования материальных сред [1]. Однако методы их введения математически аналогичны. Способы получения некоторых следствий уравнений движения вязкой и упругой сред так же являются аналогичными. В этой связи будем проводить построение уравнений движения и их следствий для моделей вязкой и упругой сред параллельно.

Выпишем здесь систему универсальных уравнений механики и термодинамики сплошной среды [1], в случае если:

– сопутствующая система координат, связанная с частицами сплошной среды в начальном недеформированном состоянии выбрана совпадающей с системой отсчета координат, относительно которой рассматривается движение;

– компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ евклидова пространства сплошной среды в начальном состоянии не зависят от времени t;

– малы компоненты тензоров деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и скоростей деформации $e_{\alpha\beta}$, а так же малы изменения плотности ρ и абсолютной температуры T каждой частицы движущейся сплошной среды;

– малы компоненты векторов перемещений u_α и скоростей v_α частиц сплошной среды.

1 Линейные модели вязкой и упругой сред

Компоненты тензора внутренних напряжений вязкой среды представим в виде [1]:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta} - pg^{\alpha\beta}$$

$$(p - \text{давление}) \qquad (1)$$

В соответствии с законом Навье-Стокса компоненты тензора вязких напряжений $\tau^{\alpha\beta}$ – линейно зависит от компонент тензора скоростей деформаций $e^{\alpha\beta}$. Аналогично для упругой среды, в соответствии с законом Гука, компоненты тензора напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$ – линейно зависят от компонент тензора деформации $\varepsilon^{\alpha\beta}$.

Упомянутые зависимости $\tau^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta}\left(e^{\alpha\beta}\right)$, $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}\left(\varepsilon^{\alpha\beta}\right)$, для рассматриваемых изотропных сред, определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \tau^{\alpha\beta} &= \lambda' e g^{\alpha\beta} + 2\mu' e^{\alpha\beta}, \\ \sigma^{\alpha\beta} &= \lambda \varepsilon g^{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon^{\alpha\beta}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где λ', μ' – коэффициент вязкости;

λ, μ – коэффициенты упругости;

$e = e_\alpha^\alpha$ – скорость относительного изменения объема частицы вязкой среды;

$\varepsilon = \varepsilon_\alpha^\alpha$ – относительное изменение объема частицы упругой среды.

Подставляя выражения вязких напряжений из (2) в (1), а для упругой среды, учитывая деформации вследствие изменения температуры: $\varepsilon_T^{\alpha\beta} = \alpha(T - T_0)g^{\alpha\beta}$ (α – коэффициент линейного расширения материала упругого тела), имеем для моделей вязкой среды и упругой среды соответственно уравнения законов Навье-Стокса и Гука-Дюамеля-Неймана в виде:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda' e g^{\alpha\beta} + 2\mu' e^{\alpha\beta} - pg^{\alpha\beta},$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda\varepsilon g^{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon^{\alpha\beta} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\left(T - T_0\right)g^{\alpha\beta}. \qquad (3)$$

2 Линеаризованные уравнения движения частицы вязкой и упругой сред

Подставляя соотношения

$$e^{\alpha\beta}=g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}e_{\gamma\delta},\ e_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(v_{\alpha;\beta}+v_{\beta;\alpha}\right),$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta}=g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}\varepsilon_{\gamma\delta},\ \varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}\right) \quad (4)$$

в (4), а затем последние в уравнения импульсов , получим соответственно уравнения для однородной (по коэффициентам вязкости) изотропной вязкой среды – линеаризованные уравнения Навье-Стокса и уравнения для однородной изотропной упругой среды – линеаризованные уравнения Ламе-Дюамеля-Неймана в виде:

$$\left[(\lambda'+\mu')e-p\right]_{;\alpha}+\mu'\nabla^2 v_\alpha=\rho_0\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\left[(\lambda+\mu)\varepsilon-(3\lambda-2\mu)\alpha\left(T-T_0\right)\right]_{;\alpha}+\mu'\nabla^2 u_\alpha=$$

$$=\rho_0\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad (6)$$

здесь

$e=e^\alpha_\alpha=v^\alpha_{;\alpha}=div\vec{v}$

$\varepsilon=\varepsilon^\alpha_\alpha=u^\alpha_{;\alpha}=div\vec{u}$

$\nabla^2(\ldots)=g^{\alpha\beta}(\ldots)_{;\alpha\beta}$ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат.

Далее рассмотрим равенства:

$$v_{\alpha;\beta}=e_{\alpha\beta}+\Omega_{\alpha\beta},\ u_{\alpha;\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}+\omega_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

где $\Omega_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(v_{\alpha;\beta}-v_{\beta;\alpha}\right),\quad \omega_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(u_{\alpha;\beta}-u_{\beta;\alpha}\right)$

Соотношения (7) являются разложениями компонент $v_{\alpha;\beta}$, $u_{\alpha;\beta}$ на симметричную $e_{\alpha\beta},\varepsilon_{\alpha\beta}$ и антисимметричную $\Omega_{\alpha\beta},\omega_{\alpha\beta}$ составляющие. Последним в трехмерном пространстве соответствуют, как известно компоненты векторов вихря и поворота, определяемые по формулам:

$$\Omega^\alpha=-\frac{1}{2}e^{\alpha\beta\gamma}\Omega_{\beta\gamma}=-\frac{1}{2}e^{\alpha\beta\gamma}u_{\beta;\gamma},$$

$$\omega^\alpha=-\frac{1}{2}e^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta\gamma}=-\frac{1}{2}e^{\alpha\beta\gamma}u_{\beta;\gamma}, \quad (8)$$

где $e^{\alpha\beta\gamma}$ – компоненты антисимметричного псевдотензора Леви-Чивита.

При этом дивергенция вихря:

$$\Omega^\alpha_{;\alpha}=-\frac{1}{4}e^{\alpha\beta\gamma}\Omega_{\beta\gamma}=-\frac{1}{2}e^{\alpha\beta\gamma}\left(v_{\alpha;\gamma\beta}-v_{\alpha;\beta\gamma}\right)\equiv 0, \quad (9)$$

поскольку правая часть в равенстве

$$\left(v_{\alpha;\gamma\beta}-v_{\alpha;\beta\gamma}\right)=R_{\alpha\beta\gamma\delta}v^\delta$$

равна нулю, в соответствии с условием евклидовости пространства рассматриваемой сплошной среды, т.е. компоненты тензора Римана-Кристоффеля $R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$. Таким образом, $v_{\gamma;\alpha\beta}$ – симметричны по α,β и, следовательно, соответствующие свертки последних с антисимметричными компонентами $e^{\alpha\beta\gamma}$ в (9) дают тождественный нуль. Аналогично для дивергенции вектора поворота имеем:

$$\omega^\alpha_{;\alpha}=0. \quad (10)$$

Теперь используя соответствующее равенство в (10) для оператора Лапласа от компонент скорости получим выражение:

$\nabla^2 v_\alpha=g^{\beta\gamma}e_{\alpha;\beta\gamma}=g^{\beta\gamma}e_{\alpha\beta;\gamma}+g^{\beta\gamma}e_{\alpha\beta;\gamma}$, но

$$g^{\beta\gamma}e_{\alpha\beta;\gamma}=\frac{1}{2}g^{\beta\gamma}\left(v_{\alpha;\beta\gamma}+v_{\beta;\alpha\gamma}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\nabla^2 v_\alpha+g^{\beta\gamma}v_{\beta;\gamma\alpha}\right)=\frac{1}{2}\left(\nabla^2 v_\alpha+e_{;\alpha}\right)$$

следовательно,

$$\nabla^2 v_\alpha=e_{;\alpha}+2g^{\delta\gamma}\Omega_{\alpha\delta;\gamma} \quad (11)$$

Аналогично для оператора Лапласа от компонент вектора перемещений, имеем

$$\nabla^2 u_\alpha=\varepsilon_{;\alpha}+2g^{\delta\gamma}\omega_{\alpha\delta;\gamma} \quad (12)$$

Учитывая (10), (11) соответствующие системы дифференциальных уравнений (5), (6) могут быть переписаны в виде:

$$[(\lambda'+2\mu')e-p]_{;\alpha}+2\mu' g^{\delta\gamma}\Omega_{\alpha\delta;\gamma}=\rho_0\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}, \quad (13)$$

$$[(\lambda+2\mu)\varepsilon-(3\lambda+2\mu)\cdot\alpha(T-T_0)]_{;\alpha}+2\mu g^{\delta\gamma}\omega_{\alpha\delta;\gamma}=$$

$$=\rho_0\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Дифференцируя ковариантно (13), (14) и умножая на $e^{\alpha\beta\gamma}$, имеем:

$$e^{\alpha\beta\gamma}[(\lambda'+2\mu')e-p]_{\alpha\beta}+2\mu' g^{\delta\gamma}e^{\alpha\beta\gamma}\Omega_{\alpha\delta;\gamma\beta}=$$

$$=\rho_0\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}e^{\alpha\beta\gamma}, \quad (15)$$

$$e^{\alpha\beta\gamma}\left[(\lambda+2\mu)\varepsilon-(3\lambda+2\mu)\alpha(T-T_0)\right]_{;\alpha\beta}+$$

$$+2\mu g^{\delta\gamma}e^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\delta;\gamma\beta}=\rho_0\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}e^{\alpha\beta\gamma}. \qquad (16)$$

Учитывая антисимметричность $e^{\alpha\beta\gamma}$, имеют место тождества:

$$e^{\alpha\beta\nu}\left[(\lambda'+2\mu')e-p\right]_{;\alpha\beta}\equiv 0,$$

$$e^{\alpha\beta\nu}\left[(\lambda+2\mu)\varepsilon-(3\lambda+2\mu)\alpha(T-T_0)\right]_{;\alpha\beta}\equiv 0$$

Далее используя равенства:

$$\Omega_{\alpha\beta}=-e_{\alpha\beta\gamma}\Omega^\gamma,$$

$$\omega_{\alpha\beta}=-e_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma,$$

и то обстоятельство, что компоненты $e^{\alpha\beta\nu}$ ведут себя относительно ковариантного дифференцирования как константы, найдем:

$$g^{\delta\gamma}e^{\alpha\beta\nu}\Omega_{\alpha\delta;\gamma\beta}=-g^{\delta\gamma}e^{\alpha\beta\nu}e_{\alpha\beta\mu}\Omega^{\mu}{}_{;\alpha\beta}=$$

$$=-g^{\delta\gamma}(\delta^\beta_\delta\delta^\nu_\mu-\delta^\beta_\mu\delta^\nu_\delta)\Omega^{\mu}{}_{;\alpha\beta}=$$

$$=g^{\gamma\delta}\delta^\beta_\mu\Omega^{\mu}{}_{;\alpha\beta}-g^{\beta\gamma}\delta_\mu{}^\nu\Omega^{\mu}{}_{;\alpha\beta}=$$

$$=g^{\gamma\nu}\Omega^{\beta}{}_{;\gamma\beta}-g^{\beta\gamma}\Omega^{\nu}{}_{;\gamma\beta}$$

Учитывая при этом, что $\Omega^\nu_{;\alpha\beta}=\Omega^\nu_{;\beta\alpha}$ и равенство (8) получим:

$$g^{\delta\gamma}e^{\alpha\beta\nu}\Omega_{\alpha\delta;\gamma\beta}=-\nabla^2\Omega^\nu \qquad (17)$$

Аналогично, для компонент вектора поворота, учитывая (9), имеем:

$$g^{\delta\gamma}e^{\alpha\beta\nu}\omega_{\alpha\delta;\gamma\beta}=-\nabla^2\omega^\nu \qquad (18)$$

Таким образом, используя полученные равенства (17), (18), а также уравнения (15), (16) получим:

– вязкая среда:

$$\mu'\nabla^2\Omega^\alpha-\rho_0\frac{\partial\Omega^\alpha}{\partial t}=0, \qquad (19)$$

– упругая среда:

$$\mu\nabla^2\omega^\alpha-\rho_0\frac{\partial^2\omega^\alpha}{\partial t^2}=0. \qquad (20)$$

При этом компоненты вектора вихря, в рамках принятых допущений п.1 удовлетворяют уравнениям диффузии (19) независимо от свойства сжимаемости вязкой среды, что является, в частности, следствием линеаризованной постановки уравнений импульсов. Компоненты вектора поворота элемента упругой среды удовлетворяют известным волновым уравнениям (20).

Свертка ковариантно продифференцированных уравнений (15), (16) с компонентами $g^{\alpha\beta}$ дает уравнения для соответствующих моделей сплошной среды:

– вязкая среда

$$\nabla\left[(\lambda'+2\mu')e-p\right]-\rho_0\frac{\partial e}{\partial t}=0$$

– упругая среда:

$$\nabla\left[(\lambda+2\mu)\varepsilon-(3\lambda+2\mu)\alpha(T-T_0)\right]-\rho_0\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}=0$$

Список использованной литературы:
1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1969. – Т.1.