Абзалимов Р.Р., Мардамшина Л.Р.
Башкирский государственный университет

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается спектральная задача $z'' + (\lambda - i\,q(x))z = 0$ с краевыми условиями третьего рода $z(0)\cos\alpha - z'(0)\sin\alpha = 0$, $z(\pi)\cos\beta - z'(\pi)\sin\beta = 0$. В работе установлена асимптотика собственных значений краевой задачи для четырех случаев: 1)$0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi$, 2)$\alpha = 0, \beta = \pi$, 3)$\alpha > 0, \beta = \pi$, 4)$\alpha = 0, \beta < \pi$.

Постановка задачи

В работе рассматривается третья несамосопряженная краевая задача следующего вида:

$$\begin{cases} z'' + (\lambda - i\,q(x))z = 0 \\ z(0)\cos\alpha - z'(0)\sin\alpha = 0 \\ z(\pi)\cos\beta - z'(\pi)\sin\beta = 0, \\ 0 \le \alpha \le \pi, 0 \le \beta \le \pi \end{cases} \qquad (1)$$

где $q(x)$ – вещественнозначная функция и $m \le q(x) \le M$, где $m, M \in R$. Требуется определить асимптотику краевой задачи (1).

1. Случай, когда $0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi$

Положим в (1) $\lambda = \mu^2$. Уравнение $z'' + \mu^2 z = 0$ (2) имеет фундаментальную систему решений $\varphi_1(x) = \cos\mu x$ и $\varphi_2(x) = \frac{1}{\mu}\sin\mu x$ (определитель Вронского равен 1). Откуда получаем два фундаментальных решения уравнения $z'' + (\mu^2 - iq(x))z = 0$:

$$z_1(x) = \cos\mu x + i\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x K_n(x,\xi)\,\cos\mu\xi\,d\xi$$

$$z_2(x) = \frac{1}{\mu}\{\,\sin\mu x + i\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x K_n(x,\xi)\sin\mu\xi\,d\xi\,\},$$

где $K_n(x,\xi)$ – n-я итерация ядра

$$K(x,\xi) = (\varphi_1(\xi)\cdot\varphi_2(x) - \varphi_2(x)\cdot\varphi_2(\xi))\cdot q(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\mu}\sin\mu(x-\xi)\,q(\xi).$$

Поэтому, если $A_1 \equiv A, A_2, A_3, \ldots$ – последовательные итерации ядра

$$A(x,\xi) = \sin\mu(x-\xi)\cdot q(\xi),$$

то общее решение $z'' + (\mu^2 - i\,q(x))z = 0$ имеет вид:

$$z(x) = c_1\cdot\cos\mu x + c_2\cdot\sin\mu x +$$

$$+ i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n}\int_0^x A_n(x,\xi)\cdot(c_1\cdot\cos\mu x + c_2\sin\mu x)d\xi,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Отвлечемся на время от краевого условия на верхнем пределе $(x = \pi)$.

Из первого краевого условия получим $z(0) = c_1, z'(0) = \mu c_2$. Первое краевое условие удовлетворится, если $c_1 = \sin\alpha, c_2 = \frac{\cos\alpha}{\mu}$. Таким образом решение (1) имеет вид:

$$z(x) = \sin\alpha\cos\mu x + \frac{\cos\alpha}{\mu}\sin\mu x +$$

$$+ i\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n}\int_0^x A_n(x,\xi)\left(\sin\alpha\cos\mu x + \frac{\cos\alpha}{\mu}\sin\mu x\right)d\xi \qquad (3)$$

Рассмотрим (3) при n=1:

$$z(x) = \sin\alpha\cdot\cos\mu x + \frac{\cos\alpha}{\mu}\cdot\sin\mu x +$$

$$+ \frac{i}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-\xi)\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\mu x + \frac{\cos\alpha}{\mu}\sin\mu x)\cdot$$

$$\cdot q(\xi)\,d\xi = \sin\alpha\cdot\cos\mu x +$$

$$+ \frac{\cos\alpha}{\mu}\cdot\sin\mu x + \frac{i\cdot\sin\alpha}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-\xi)\cdot\cos\mu x\cdot q(\xi)d\xi +$$

$$+ O(\mu^{-2}) = \sin\alpha\cdot\cos\mu x + \frac{\cos\alpha}{\mu}\cdot\sin\mu x +$$

$$+ \frac{i\cdot\sin\alpha}{2\mu}\int_0^x q(\xi)\{\sin(\mu(x-\xi)+\mu\xi) +$$

$$+ \sin(\mu(x-\xi)-\mu\xi)\}d\xi + +O(\mu^{-2}) =$$

$$= \sin\alpha\cdot\cos\mu x + \frac{\cos\alpha}{\mu}\sin\mu x +$$

$$+ \frac{\sin\mu x}{\mu}(\cos\alpha + \frac{i\sin\alpha}{2}\int_0^x q(\xi)d\xi) +$$

$$+ \frac{i\sin\alpha}{2\mu}(\,\sin\mu x\int_0^x q(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_0^x \sin\mu(x-2\xi)\cdot q(\xi)\,d\xi) + O(\mu^{-2}) = \sin\alpha\cos\mu x +$$

$$+ \frac{i\sin\alpha\sin\mu x}{2\mu}\int_0^x \cos 2\mu\xi\cdot q(\xi)d\xi -$$

$$- \frac{i\sin\alpha\sin\mu x}{2\mu}\int_0^x \sin 2\mu\xi\cdot q(\xi)d\xi + O(\mu^{-2}).$$

Применим к интегралу $\int_0^x \sin\mu\xi\cdot q(\xi)d\xi$ вторую терему о среднем при условии, что $q(x)$ монотонно возрастает:

$$\int_0^x \sin 2\mu\xi\, q(\xi)d\xi = q(0)\int_0^{\theta x}\sin 2\mu\xi d\xi + q(x)\int_{\theta x}^{x}\sin 2\mu\xi d\xi =$$

$$= \frac{q(0)}{2\mu}(1-\cos 2\mu\theta x) + \frac{q(x)}{2\mu}.$$

$(\cos 2\mu\theta x - \cos 2\mu x) = O(\mu^{-1})$, где $0<\theta<1$. Аналогично для $\int_0^x \cos 2\mu\xi\, q(\xi)d\xi$. Учитывая это, получим:

$$z(x) = \sin\alpha\cos\mu x +$$

$$+\frac{1}{\mu}\sin\mu x\left[\cos\alpha + \frac{i\cdot\sin\alpha}{2}\int_0^x q(\xi)d\xi\right] + O(\mu^{-2}) \quad (4)$$

$$z'(x) = -\mu\sin\alpha\sin\mu x +$$

$$+\cos\mu x\left[\cos\alpha + \frac{i\sin\alpha}{2}\int_0^x q(\xi)d\xi\right] + O(\mu^{-2}) \quad (5)$$

Из этих формул получается, что $z(x) = \sin\alpha\cos\mu x + O\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Однако это приближение можно улучшить. Найдем собственные значения задачи (1), подставив во второе краевое условие уравнения (4) и (5). Введем обозначение $P(x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(\xi)d\xi$. Получим:

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\mu\pi + \frac{1}{\mu}\cos\alpha\cos\beta\sin\mu\pi +$$

$$+\frac{i}{\mu}\sin\alpha\cos\beta\ \sin\mu\pi\ P(\pi) + +\mu\ \sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\mu\pi -$$

$$-(\cos\alpha + P(\pi)\,i\,\sin\alpha)\cos\mu\pi\sin\beta + O(\mu^{-2}) = 0 \quad (6)$$

Поделим все выражение на μ:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\mu\pi}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}\cos\alpha\cos\beta\sin\mu\pi +$$

$$+\frac{i}{\mu^2}\sin\alpha\cos\beta\ \sin\mu\pi\ P(\pi) + \sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\mu\pi -$$

$$-(\cos\alpha + P(\pi)\,i\,\sin\alpha)\frac{\cos\mu\pi\sin\beta}{\mu} +$$

$$+O(\mu^{-3}) = \sin\alpha\sin\beta\sin\mu\pi + O(\mu^{-3}) =$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\sin\mu\pi + \frac{1}{\mu}\cos\mu\pi\ [\sin\alpha\cos\beta -$$

$$-\cos\alpha\ \sin\beta - i\ \sin\alpha\ \sin\beta\ P(\pi)] + O(\mu^{-2}).$$

Разделив все выражение на $\sin\alpha\sin\beta$, получим уравнение для определения собственных значений краевой задачи (1) в случае, когда $0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi$

$$\sin\mu\pi + \frac{\cos\mu\pi}{\mu}\{ctg\beta - ctg\alpha - i\,P(\pi)\} + O(\mu^{-2}) = 0 \quad (7)$$

В [1] приведена общая теорема о нулях вещественнозначной функции с известным асимптотическим представлением. Переформулируем эту теорему для случая комплекснозначной функции:

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ при $|z_0| \le |z| < \infty$ имеет ограниченную вторую производную и представима в виде:*

$$f(z) = g_0(z) + \frac{a+ib}{z}g_1(z) + O(z^{-2}) \ \ (|z|\to\infty),$$

где функции $g_0''(z), g_1(z), g_1'(z)$ ограничены и $|g_0(z)| + |g_0'(z)| \ge d > 0$ (d – некоторая постоянная). Пусть далее нули функции $g_0(z)$ при $|z_0| \le |z| < \infty$ образуют бесконечную последовательность $|z_1| < |z_2| < \ldots \to \infty$. Тогда при достаточно больших z нули функции $f(z)$ также образуют также бесконечную последовательность $|z_1^*| < |z_2^*| < \ldots < z_n^* < \ldots$, причем

$$z_n^* = z_n - \frac{a+ib}{z_n\, g_0'(z_n)}g_1(z_n) + O(z^{-2})$$

$$(n\to\infty) \quad (8)$$

Введем обозначения:

$$g_0(\mu) = \sin\mu\pi \quad g_0'(\mu) = \pi\cos\mu\pi$$

$$g_1(\mu) = \cos\mu\pi \quad a = ctg\beta - ctg\alpha \quad b = -P(\pi)$$

Откуда в силу (8) следует, что

$$\mu_n = n + \frac{1}{\pi n}[ctg\alpha - ctg\beta + i\,P(\pi)] + O(n^{-2}) \quad (9)$$

То есть асимптотика собственных значений краевой задачи (1) для случая $0<\alpha<\pi$, $,0<\beta<\pi$ имеет вид:

$$\lambda_n = n^2 + \frac{2}{\pi}\left(ctg\alpha - ctg\beta + \frac{i}{2\mu}\int_0^\pi q(t)dt\right) + O(n^{-2}) \quad (10)$$

2. Случай, когда $\alpha = 0, \beta = \pi$

Вернемся к уравнению (3). Для рассматриваемого случая оно примет вид:

$$z(x) = \frac{1}{\mu}\sin\mu x + i\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n}\int_0^x A_n(x,\xi)\ \frac{1}{\mu}\sin\mu x d\xi \quad (11)$$

В этом случае удобно вместо $z(x)$ рассмотреть $\frac{z(x)}{\mu}$, тогда формула (11), взятая до члена $n=1$, примет вид:

$$z(x)=\sin\mu x+\frac{i}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-\xi)\,\sin\mu\xi\, q(\xi)\,d\xi+O(\mu^{-2})=$$

$$=\sin\mu x-\frac{i}{\mu}\cos\mu x\,P(x)+O(\mu^{-2}) \qquad (12)$$

$$z'(x)=\mu\cos\mu x+i\sin\mu x\,P(x)+O(\mu^{-2}) \qquad (13)$$

Докажем, что ряд (13) абсолютно и равномерно сходится. Для этого введем обозначения:

$$z_0=\frac{1}{\mu}\sin\mu x,$$

$$z_1=\frac{1}{\mu}\sin\mu x+\frac{i}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-\xi)\,q(\xi)\,z_0 d\xi$$

$$z_2=\frac{1}{\mu}\sin\mu x+\frac{i}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-\xi)\,q(\xi)\,z_1 d\xi$$

$$\vdots$$

$$z_n=\frac{1}{\mu}\sin\mu x+\frac{i}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-\xi)\,q(\xi)\,z_{n-1} d\xi$$

$$\vdots$$

Рассмотрим ряд:

$u_0+\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_0=z_0$, $u_i=z_i-z_{i-1}, i=1,2,\ldots$ (14)

Рассмотрим $|\,z_i-z_{i-1}\,|$.

$$|z_1-z_2|=\left|\frac{i}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-\xi)q(\xi)\right|\le\frac{M}{|\mu|}x$$

$$|\,z_2-z_1\,|=\left|\,\frac{i}{\mu}\int_0^x \sin\mu(x-\xi)\,q(\xi)\{\,z_1(\xi)-z_0(\xi)\}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{|\mu|}\int_0^x|\,\sin\mu(x-\xi)\,q(\xi)\,|\cdot|\,z_1(\xi)-z_0(\xi)\,|\,d\xi\le$$

$$\le\frac{1}{|\mu|}\frac{M}{|\mu|}\int|\,\sin\mu(x-\xi)\,q(\xi)|\,\xi\,d\xi\le\frac{M^2}{|\mu|^2}\frac{x^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$|\,z_k-z_{k-1}\,|\le\frac{M^k}{|\mu|^k}\frac{x^k}{k!}$$

$$\vdots$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M^k}{|\mu|^k}\frac{x^k}{k!}$ – мажоранта для (14). Его сумма равна $e^{\frac{Mx}{\mu}}-1$, откуда получаем, что при выполнении неравенства $\frac{x}{\mu}<\infty$ рассматриваемый ряд сходится. Подставим во второе краевое условие уравнения (12) и (13), получим уравнение для определения асимптотики собственных значений в случае, когда $\alpha=0,\beta=\pi$:

$$\sin\mu\pi-\frac{i}{\mu}\cos\mu\pi\,P(\pi)+O(\mu^{-2})=0 \qquad (15)$$

Аналогично применим к (15) вышеуказанную теорему. Обозначая через

$$g_0(\mu)=\sin\mu\pi \quad g_0'(\mu)=\pi\cos\mu\pi$$

$$g_1(\mu)=\cos\mu\pi \quad b=-P(\pi)$$

в силу (8), получаем

$$\mu_n=n+\frac{i\,P(\pi)}{\pi\,n}+O(1) \qquad (16)$$

Из (16) получаем асимптотику собственных значений краевой задачи (1):

$$\lambda_n=n^2+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}q(t)dt+O(1) \qquad (17)$$

3. Случай, когда $\alpha>0,\beta=\pi$

Уравнение (7) нужно заменить на уравнение $z(\pi)=0$, которое после деления на $\sin\alpha$ приобретает вид:

$$\cos\mu\pi+\frac{\sin\mu\pi}{\mu}\{\,ctg\alpha+i\,P(\pi)\}+O(\mu^{-2})=0$$

Отсюда, как и выше, выводится формула:

$$\mu_n=n+\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi(n+1/2)}\big(ctg\alpha+i\,P(\pi)\big)+O(n^{-2})$$

Или

$$\lambda_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{\pi}\left(ctg\alpha+i\int_0^{\pi}q(t)dt\right)+O(n^{-2})$$

4. Случай $\alpha=0,\beta<\pi$

Уравнение составляется на основе уравнений (12) и (13). Если это уравнение разделить на $-\mu\sin\alpha$, то оно приобретает вид:

$$\cos\mu\pi+\frac{-ctg\beta+i\,P(\pi)}{\mu}\sin\mu\pi+O(\mu^{-2})=0$$

Из этого уравнения находим асимптотику собственных значений:

$$\lambda_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{\pi}\left(-ctg\beta+i\int_0^{\pi}q(t)dt\right)+O(n^{-2}).$$

5. Примеры

В работе [2] рассматривается оператор Орра – Зоммерфельда:

$$\left(D^2-\alpha^2\right)^2 y - i\alpha R\left[q(x)\left(D^2-\alpha^2\right)-q''(x)\right]y =$$
$$= -i\alpha R\lambda\left(D^2-\alpha^2\right)y$$
$$y(-1)=y'(-1)=y(1)=y'(1)=0, \qquad (18)$$

где α – волновое число, R – число Рейнольдса, характеризующее вязкость жидкости, а $q(x)$ – профиль скорости течения жидкости в канале. Наряду с задачей (18) рассматривается соответствующая ей модельная задача:

$$\begin{aligned} &-i\varepsilon y'' - q(x)y = -\lambda y \\ &y(-1)=y(1)=0 \end{aligned} \qquad (19)$$

Здесь λ – спектральный параметр, а $\varepsilon \to 0$. Модельная задача рассмотрена для случая $q(x)=x$.

В [2] показано, что собственные значения задачи (19) для случая $q(x)=x$ локализуются на луче $\gamma_\infty = \left[\frac{-i}{\sqrt{3}}, -i\infty\right]$ и их плотность увеличивается при $\varepsilon \to 0$. Поделим уравнение в (19) на $-i\varepsilon$:

$$\begin{aligned} &y'' + \left(\frac{q(x)}{i\varepsilon} - \frac{\lambda}{i\varepsilon}\right)y = 0 \quad y'' + \left(i\frac{\lambda}{\varepsilon} - i\frac{q(x)}{\varepsilon}\right)y = 0 \\ &y(-1)=y(1)=0 \qquad\qquad\quad y(-1)=y(1)=0 \end{aligned} \qquad (20)$$

Обозначим $i\frac{\lambda}{\varepsilon}$ через μ, $\frac{q(x)}{\varepsilon}$ через $f(x)$, тогда получим задачу, аналогичную рассмотренной в случае 3. Тогда к задаче (20) можно применить формулу (17), но с основным отрезком [a, b]. Тогда формула (17) примет вид:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b-a}\right)^2 + \frac{i}{b-a}\int_a^b q(t)dt + O(1) \qquad (21)$$

Собственные значения (20) по (21):

$$\frac{i\lambda_n}{\varepsilon} = \frac{\pi^2}{4}n^2 - \frac{i}{2}\int_{-1}^{1}\frac{q(t)}{\varepsilon}dt + O(1) \quad n\to\infty \qquad (22)$$

или

$$\lambda_n = -i\varepsilon\frac{\pi^2}{4}n^2 + O(1) \qquad n\to\infty, \qquad (23)$$

который показывает, что собственные значения локализуются на том же луче γ_∞ при $n\to\infty$.

Список использованной литературы:

1. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения. Москва, Изд-во «Иностранная литература», 1962.
2. А.А. Шкаликов. Спектральные портреты оператора Орра – Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 3 (2003). С. 89–112.