

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ РАВНОАМПЛИТУДНЫХ ПОЛИНОМОВ

Показана низкая эффективность применения современных измерительных сигналов для измерения частотных характеристик в области инфранизких частот. Предложен новый сигнал – тригонометрический полином с равномерным дискретным спектром и метод его аппроксимации. Получены аналитические выражения дискретного гармонического спектра аппроксимирующей функции. Предложена методика оценки погрешности аппроксимации в виде коэффициента гармоник паразитного спектра и неравномерности амплитудного спектра в рабочей области.

В процессе разработки, производства и эксплуатации отдельных образцов радиоэлектронной аппаратуры остаются востребованными измерение и идентификация их амплитудно-частотных (АЧХ) и фазо-частотных характеристик (ФЧХ) в диапазоне частот от значительных, близких к нулю, до нескольких десятков герц.

Ручные высокоточные методы анализа частотных характеристик (ЧХ) малопроизводительны и в указанном диапазоне потребуют значительных трудозатрат – до нескольких десятков человеко-часов.

Самая низкая анализируемая частота современных автоматизированных измерителей АЧХ (ИАЧХ), в которых в качестве источника испытательного сигнала используется генератор качающейся частоты (ГКЧ), ограничена величиной 20 Гц [1]. Ограниченность применения таких устройств на низких частотах связана с тем, что спектр испытательного сигнала на выходе ГКЧ – частотно-модулированного импульса – неравномерен в полосе качания. Известно, что степень неравномерности спектральной плотности одиночного линейно частотно-модулированного (ЛЧМ) импульса напрямую связана с величиной так называемой базы [2]

$$B = \Delta f \cdot \tau_u, \quad (1)$$

где Δf – девиация частоты ЛЧМ-импульса или ширина полосы измерения АЧХ;

τ_u – длительность ЛЧМ-импульса.

С увеличением величины базы B спектральная плотность ЛЧМ-импульса становится более равномерной в полосе качания [2]. Из выражения (1) следует, что для улучшения равномерности спектра с той же шириной полосы качания необходимо увеличивать длительность ЛЧМ-импульса. В измерителе АЧХ Х1-41 минимально возможная величина ширины полосы качания – 100 Гц, нижняя граничная частота полосы – $f_n = 20$ Гц, максимальное значение длительности рабочего хода развертки (длительности ЛЧМ-импульса) – 10 с [1]. Соответственно, база

выражения (1) не превысит величины $B = 1000$, при которой обеспечивается паспортная величина неравномерности уровня выходного напряжения ГКЧ $\delta U = 0,5$ Дб, или 5,92%. Для измерения ЧХ в более низком частотном диапазоне неизбежно встанет необходимость сужения полосы качания. Иначе измерения станут малоэффективными – получится так, что оператор будет проводить избыточные лишние измерения АЧХ на не интересующих его высоких частотах и получит недостаточную информацию в интересующем его низкочастотном диапазоне. Поэтому для сохранения или улучшения той же равномерности напряжения на выходе ГКЧ при более узкой полосе измерения ЧХ необходимо обеспечить величину базы $B \geq 1000$, то есть в соответствии с (1) – увеличить длительность ЛЧМ-импульса τ_u . Для измерения ЧХ на частотах $f \leq 20$ Гц потребуются величины τ_u порядка сотен – нескольких тысяч секунд. То есть для измерения потребуется время, соизмеримое с временными затратами в ручных методах, а в конструкции ИАЧХ потребуются дополнительные устройства стабилизации внутренних параметров измерителя для уменьшения влияния внешних дестабилизирующих факторов – колебаний температуры, влажности, напряжения внешней питающей сети и так далее. Кроме того, ЛЧМ-импульсы, другие частотно модулированные сигналы имеют ненулевой нелинейный фазовый спектр, что делает их малоприспособными для измерения ФЧХ.

Кроме ЛЧМ-сигналов в современных измерителях ЧХ в качестве источников сигнала воздействия могут применяться генераторы коротких импульсов, многочастотные генераторы и некоторые другие.

В генераторах коротких импульсов на выходе стремятся получить периодически повторяющиеся импульсы, по своим свойствам приближающиеся к дельта-импульсам, спектр которых бесконечен и постоянен [2]. Однако ввиду бесконечности амплитуды дельта-импульса

реализовать генератор такого сигнала невозможно, и на практике генерируют прямоугольные импульсы короткой длительности τ_u , спектральная плотность одиночной реализации которых уже отличается от прямоугольной формы (рисунок 1). Например, для измерения ЧХ в области низших частот с точностью до 5% допустимо использовать только лишь часть главного лепестка спектра импульса – диапазон частот

$$\Delta f = 0, \dots, 0.17 \cdot \frac{1}{\tau_u}, \quad (2)$$

при этом энергия испытательного сигнала будет использоваться неэффективно. Для повышения точности измерения ЧХ в том же диапазоне необходимо уменьшить длительность импульса, а соответственно и увеличить скважность импульсного сигнала, что потребует увеличения требований к разрешающей способности задания длительности τ_u и его долговременной нестабильности.

В некоторых устройствах измерения ЧХ в качестве испытательного сигнала может использоваться сигнал произвольной формы. Но в таком случае при измерениях необходима дополнительная операция нормирования спектра сигнала, принятого с выхода исследуемого объекта, а в конструкции измерителя ЧХ необходимо предусмотреть дополнительное запоминающее устройство с информацией о спектре испытательного сигнала.

Измерители ЧХ, использующие в качестве испытательного сигнала многочастотный сигнал – суммарный сигнал с выходов нескольких синхронизированных генераторов гармонических сигналов разных частот, – пригодны для измерения в ограниченном диапазоне частот. Кроме того, для изготовления одного синусои-

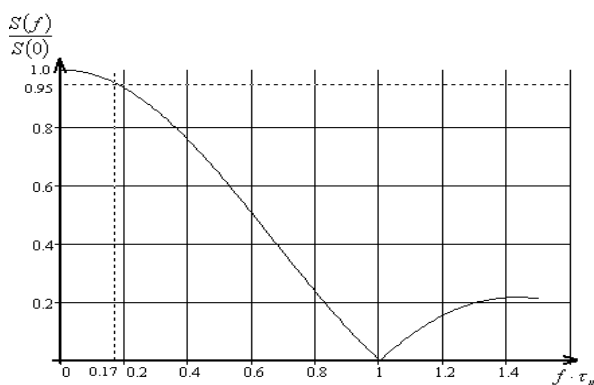


Рисунок 1

дального генератора инфранизкой частоты требуются реактивные элементы (в основном конденсаторы) с большими значениями параметров, а соответственно и габаритных размеров, а также дополнительное устройство стабилизации частоты и амплитуды. Таким образом, конструкция многочастотного генератора в области инфранизких частот получится очень громоздкой.

Поэтому для усовершенствования измерителей ЧХ в плане снижения трудоемкости, повышения производительности измерений с сохранением приемлемой точности (не меньше 5-10%) предлагается использовать в качестве генераторов испытательных воздействий генераторы равноамплитудных полиномов – функций, разлагающихся в тригонометрический ряд Фурье с одинаковыми амплитудами и нулевыми начальными фазами [3]. При вычислении значений полиномов применяются операции умножения и деления. Но реализация их генераторов на аналоговых схемах умножения и деления невозможна ввиду присутствия в полиномах точек с неопределенностью вида «ноль на ноль».

Один из вариантов решения задачи генерации полиномов – разработка метода аппроксимации равноамплитудного полинома. В настоящей работе предлагается метод аппроксимации функции

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad N = 3, 4, \dots, \quad (3)$$

частично изложенный авторами в работе [4]. Известно, что функция (3) разлагается в равномерный ограниченный косинусоидальный ряд Фурье [3]

$$D_N(x) = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{n=1}^{0.5(N-1)} \cos(n \cdot x) \text{ при нечётных } N, \\ 2 \sum_{n=1}^{0.5N} \cos\left((2n-1)\frac{x}{2}\right) \text{ при чётных } N. \end{cases} \quad (4)$$

Метод аппроксимации функции (3) или (4) заключается в следующем:

1) главные «лепестки» функции (3) – отрезки кривых на промежутках

$$x \in \left(-\frac{2\pi}{N} + 2\pi j, \frac{2\pi}{N} + 2\pi j\right), \quad j \in Z \quad (5)$$

(рисунок 2) – аппроксимируется полувошной косинусоидальной функцией

$$D1_N^{\approx}(x) = (-1)^{j(N+1)} \cdot N \cdot \cos\left(\frac{N(x-2\pi j)}{4}\right) \quad (6)$$

с амплитудой N . С помощью множителя $(-1)^{j(N+1)}$ учитывается закономерность изменений «полярности лепестков» для двух интервалов (5) с соседними значениями j при четных и нечетных значениях N . Множество Z в выражении (5) – множество действительных чисел;

2) на остальных промежутках

$$x \in \left(-\frac{2\pi(i+1)}{N} + 2\pi j, -\frac{2\pi i}{N} + 2\pi j\right) \cup \left[\frac{2\pi i}{N} + 2\pi j, \frac{2\pi(i+1)}{N} + 2\pi j\right), \quad (7)$$

$i = 1, \dots, N-2; j \in Z$

полином (3) аппроксимируется полуволнами синусоидальной функции с величиной частоты в два раза большей, чем у косинусоиды (6):

$$D1_N^{\approx}(x) = (-1)^{j(N+1)} |D_N(x0_i)| \sin\left(\frac{N(x-2\pi j)}{2}\right). \quad (8)$$

Амплитудные значения полуволн синусоиды в выражении (8) соответствуют значениям функции $D_N(x)$ в точках $x0_i = \frac{\pi(2i+1)}{N}$, а множитель $(-1)^{j(N+1)}$ выполняет ту же функцию, что и

в выражении (6), только для двух интервалов (7) с соседними значениями j . Общее выражение аппроксимирующей функции запишется в следующем виде

$$D1_N^{\approx}(x) = \begin{cases} (-1)^{j(N+1)} \cdot N \cdot \cos\left(\frac{N(x-2\pi j)}{4}\right) \\ \text{при } x \in \left(-\frac{2\pi}{N} + 2\pi j, \frac{2\pi}{N} + 2\pi j\right), \\ (-1)^{j(N+1)} |D_N(x0_i)| \sin\left(\frac{N(x-2\pi j)}{2}\right) \\ \text{при } |x-2\pi j| \in \left[\frac{2\pi i}{N}, \frac{2\pi(i+1)}{N}\right), \\ \text{где } x0_i = \frac{\pi(2i+1)}{N}; i = 1, \dots, N-2; \\ j \in Z, Z - \text{множ-во действительных чисел} \end{cases} \quad (9)$$

По графику относительного, приведенного к N отклонения функции (9) от функции (3), просчитанного в среде MathCAD для $N=9$ (рисунок 3), видим, что максимальное отклонение $\Delta 1_{9,\max}$ чуть больше 8%. Эксперимент в той же среде показал, что величина $\Delta 1_{N,\max}$ не увеличивается и для больших значений N .

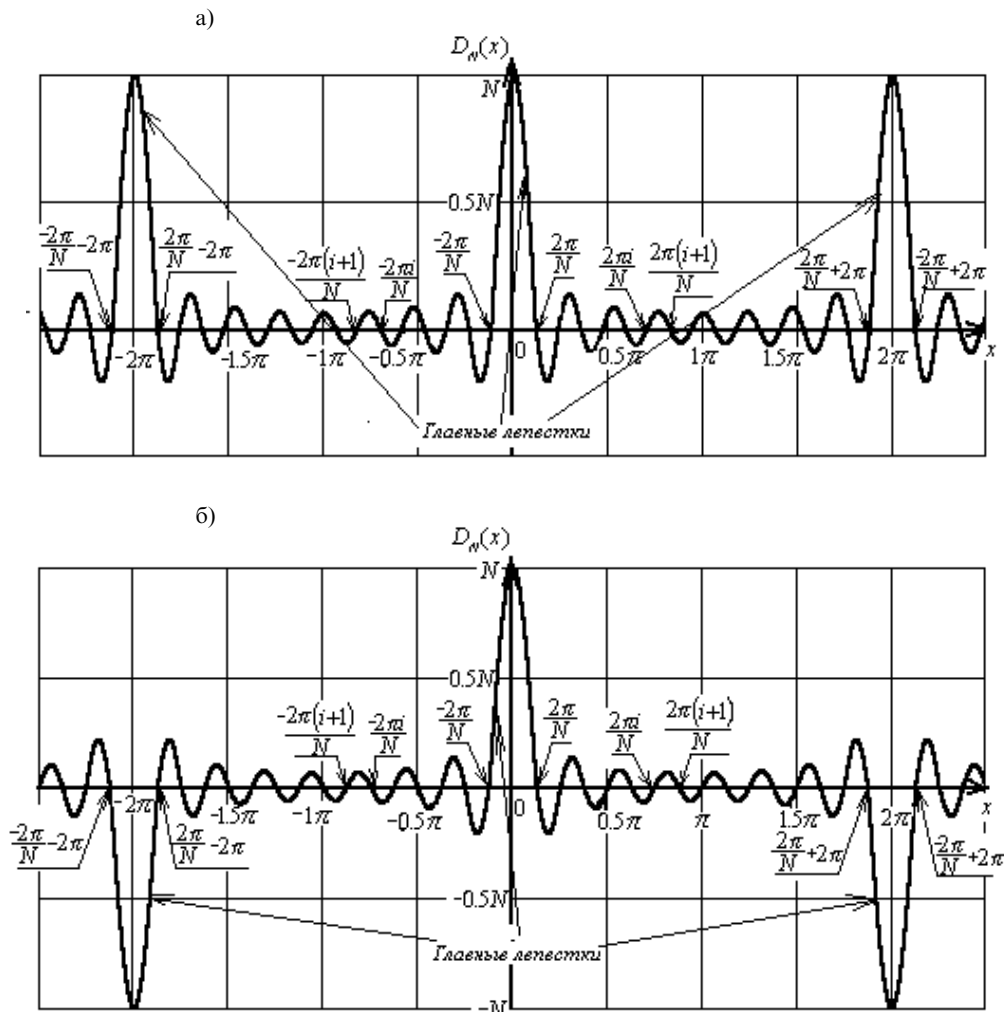


Рисунок 2. Графики функции $D_N(x)$ для нечетных (а) и четных (б) значений N

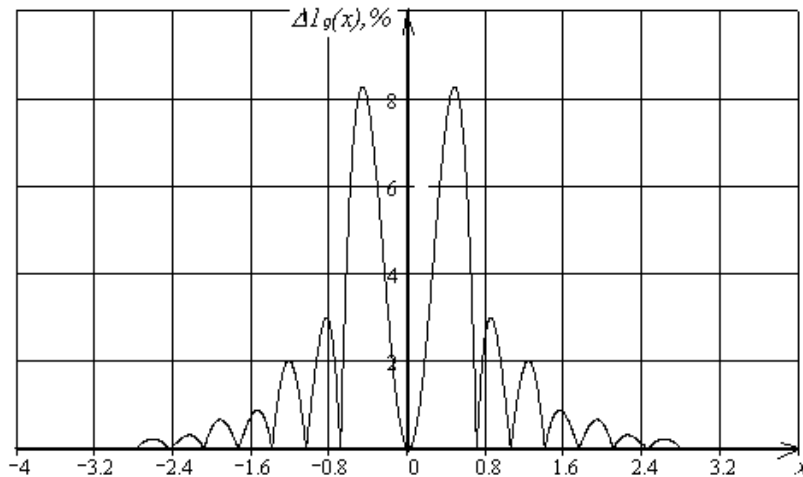


Рисунок 3

Так как функцию (9) предполагается использовать в качестве испытательного воздействия в устройствах измерения ЧХ, то нас в первую очередь интересуют отличия спектральных свойств и характеристик модели (9) и равноамплитудного полинома (3). Конкретно нас интересует следующее:

- 1) неравномерность амплитудного дискретного спектра модели (9) в рабочей области, то есть на частотах, на которых определен дискретный спектр полинома (3) или (4);
- 2) отличие от нуля значений фазового спектра для тех же частот;
- 3) количественные характеристики новых «паразитных» гармоник.

Для оценки отличий необходимо рассчитать дискретный спектр аппроксимирующей функции (9). Так как полином (3) на промежутках (5) и (7) аппроксимируется функциями разного вида и, кроме того, для каждого i -го интервала в выражении (7) паре полувольт аппроксимирующей синусоиды соответствует свое, отличное от других значение амплитуды, то расчет спектра целесообразно выполнить в следующей последовательности:

– определить выражения спектральных плотностей одиночных аппроксимирующих полувольт для каждого интервала в выражении (9) для $x \in (-2\pi, 2\pi)$ – то есть для полувольт одного периода колебаний функции (9) при четных N и для двух периодов при нечетных N . Обобщение сделано для сокращения расчетов;

– приняв за величину периода повторения одной полувольты выражения (9)

$$T = 4\pi,$$

определить выражения для комплексных амплитуд гармоник ее дискретного спектра как выборки из соответствующего выражения спектральной плотности на частотах, кратных частоте первой гармоники [5]

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}; \tag{10}$$

– воспользовавшись принципом суперпозиции для каждой гармонической составляющей сложить все полученные выражения для ее комплексной амплитуды. Несмотря на то, что для нечетных значений N величина периода T избыточна – действительный период повторения в этом случае в два раза меньше, величины амплитуд «новых» гармоник с частотами $\omega = \omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$ при правильном расчете будут равны нулю, и останутся лишь гармоники с частотами, кратными реальной частоте повторения

$$\omega'_1 = \frac{2\pi}{\left(\frac{T}{2}\right)} = 1. \tag{11}$$

Итак, определим спектр функции (9).

1) Определение спектра главного лепестка на интервале

$$x \in \left(-\frac{2\pi}{N} + 4\pi l, \frac{2\pi}{N} + 4\pi l\right), l \in Z; \tag{12}$$

а) спектральная плотность одиночного лепестка определяется как

$$S_0(\omega) = N \int_{-\frac{2\pi}{N}}^{\frac{2\pi}{N}} \cos\left(\frac{Nx}{4}\right) e^{-j\omega x} dx =$$

$$= 2N \int_0^{\frac{2\pi}{N}} \cos\left(\frac{Nx}{4}\right) \cos(\omega x) dx = \frac{8N^2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\omega\right)}{N^2 - 16\omega^2}. \tag{13}$$

При $\omega \rightarrow \frac{N}{4}$ выражение (13) примет вид:

$$S_0\left(\omega = \frac{N}{4}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{N}{4}} \frac{8N^2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\omega\right)}{N^2 - 16\omega^2} = 2\pi. \quad (14)$$

б) выражение для комплексных амплитуд составляющих дискретного спектра главного лепестка определим, сделав выборки из выражений спектральной плотности (13, 14) [5] для частот, кратных частоте первой гармоники

$$\omega = n\omega_1, n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

и для $\omega = 0$. Для n -й гармоники это выражение примет вид

$$A'_{0,n} = \frac{2}{T} S_0(n\omega_1) = \frac{4N^2 \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{\pi(N^2 - 4n^2)}, \quad (16)$$

для $n = \frac{N}{2}$ при четных N

$$A'_{0,n} \Big|_{n=\frac{N}{2}} = \frac{2}{T} S_0\left(\omega = \frac{N}{4}\right) = 1, \quad (17)$$

а для постоянной составляющей для нечетных N

$$A'_{0,0} = \frac{1}{T} S_0(0) = \frac{8N^2}{4\pi N^2} = \frac{2}{\pi}. \quad (18)$$

Для четных значений N постоянную составляющую для каждой полуволны вычислять не имеет смысла, так как функция (9) при этом – нечетная и результирующая постоянная составляющая спектра будет нулевой.

2) Определение спектра половинок лепестков на промежутке

$$x \in \left(-2\pi + 4\pi l; -2\pi + \frac{2\pi}{N} + 4\pi l\right) \cup \left(2\pi - \frac{2\pi}{N} + 4\pi l; 2\pi + 4\pi l\right), l \in Z. \quad (19)$$

а) выражение спектральной плотности на промежутке (19) примет вид

$$S_0^\pm(\omega) = -2N(-1)^N \int_{2\pi - \frac{2\pi}{N}}^{2\pi} \cos\left(\frac{N(x-2\pi)}{4}\right) e^{-j\omega x} dx = (-1)^{N+1} 8N \frac{N \cos\left(2\pi\omega\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) - 4\omega \sin(2\pi\omega)}{N^2 - 16\omega^2}. \quad (20)$$

б) выражение для составляющих дискретного спектра на интервале (19):

– для постоянной составляющей при нечетных значениях N :

$$A_{0,0}^\pm = \frac{1}{T} S_0^\pm(0) = \frac{8 \cdot (-1)^{N+1} N^2}{4\pi N^2} = \frac{2}{\pi} = A'_{0,0}; \quad (21)$$

– для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$A_{0,n}^\pm = \frac{2}{T} S_0^\pm(n\omega_1) = (-1)^{N+n+1} \frac{4N^2 \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{\pi(N^2 - 4n^2)} = (-1)^{N+n+1} A'_{0,n}. \quad (22)$$

При $n=0.5N$ для четных значений N выражение (22) примет вид

$$A_{0,n}^\pm \Big|_{n=\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \frac{N}{2}} \frac{2}{T} S_0^\pm(n\omega_1) = (-1)^{0.5N+1}. \quad (23)$$

3) Суммарный дискретный спектр лепестков на интервалах (12) и (19):

– выражения для постоянной составляющей:

$$A_{0,0} = A'_{0,0} + A_{0,0}^\pm = A'_{0,0} \left(1 - (-1)^N\right) = \begin{cases} 4 \\ \pi \end{cases}, \text{ при нечётных } N, \quad (24)$$

$$= \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}, \text{ при чётных } N.$$

– выражения для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$A_{0,n} = A'_{0,n} + A_{0,n}^\pm = A'_{0,n} \left(1 - (-1)^{N+n}\right) = \left(1 - (-1)^{N+n}\right) \frac{4N^2 \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)}{\pi(N^2 - 4n^2)}; \quad (25)$$

– для четных N для $n=0.5N$:

$$A_{0,n} \Big|_{n=0.5N} = \left(A'_{0,n} + A_{0,n}^\pm\right) \Big|_{n=0.5N} = 1 - (-1)^{0.5N}. \quad (26)$$

4) Спектральная характеристика i -й полуволны на интервале

$$x \in \left(-\frac{2\pi(i+1)}{N} + 4\pi l; -\frac{2\pi i}{N} + 4\pi l\right) \cup \left[\frac{2\pi i}{N} + 4\pi l; \frac{2\pi(i+1)}{N} + 4\pi l\right), l \in Z \quad (27)$$

где $i = \begin{cases} 1, \dots, (0.5N - 1) & \text{при чётных } N, \\ 1, \dots, (0.5(N - 1) - 1) & \text{при нечётных } N. \end{cases}$

а) спектральная плотность одной пары полуволн на интервале (27) для одного из значений i определится как

$$S_i(\omega) = 2|D_N(x_{0,i})| \int_{\frac{2\pi i}{N}}^{2(i+1)\frac{\pi}{N}} \sin\left(\frac{Nx}{2}\right) \cos(\omega x) dx = (-1)^i 8|D_N(x_{0,i})| N \frac{\cos\left((2i+1)\frac{\pi\omega}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi\omega}{N}\right)}{N^2 - 4\omega^2}. \quad (28)$$

При $\omega = 0.5N$ выражение (28) преобразуется к виду

$$S_i\left(\omega = \frac{N}{2}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{N}{2}} \left\{ (-1)^i |D_N(x_{0,i})| 8N \frac{\cos\left((2i+1)\frac{\pi\omega}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi\omega}{N}\right)}{N^2 - 4\omega^2} \right\} = 0. \quad (29)$$

б) выражения для составляющих дискретного спектра на интервале (27):

– для постоянной составляющей:

$$A'_{i,0} = \frac{S_i(0)}{T} = \frac{(-1)^i 2|D_N(x_{0,i})| N}{\pi N^2} = \frac{(-1)^i 2|D_N(x_{0,i})|}{\pi N}; \quad (30)$$

– для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$A'_{i,n} = \frac{S_i(n\omega_1)}{T} = \frac{(-1)^i 4 |D_N(x0_i)| N \cos\left((2i+1)\frac{\pi n}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2N}\right)}{\pi(N^2 - n^2)}; \quad (31)$$

– для гармоники с номером $n=N$:

$$A'_{i,N} = 0. \quad (32)$$

5) По аналогии с выражениями (20)-(26) выражения для составляющих дискретного спектра i -х полуволин на интервалах

$$x \in \left(-2\pi + \frac{2\pi i}{N} + 4\pi l, -2\pi + \frac{2\pi}{N}(i+1) + 4\pi l\right) \cup \left[2\pi - \frac{2\pi}{N}(i+1) + 4\pi l, 2\pi - \frac{2\pi i}{N} + 4\pi l\right], l \in Z \quad (33)$$

примут вид:

– для постоянной составляющей

$$A_{i,0}^{\pm} = -(-1)^N A'_{i,0} = -(-1)^N \frac{(-1)^i 2 |D_N(x0_i)|}{\pi N}; \quad (34)$$

– для комплексной амплитуды n -й гармоники

$$A_{i,n}^{\pm} = -(-1)^{N+n} A'_{i,n} = -(-1)^{N+n} \frac{(-1)^i 4 |D_N(x0_i)| N \cos\left((2i+1)\frac{\pi n}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2N}\right)}{\pi(N^2 - n^2)}; \quad (35)$$

– для $n=N$:

$$A_{i,N}^{\pm} = 0, \quad (36)$$

6) Суммарный дискретный спектр полуволин на интервалах (27) и (33):

– выражение для постоянной составляющей:

$$A_{i,0} = (1 - (-1)^N) A'_{i,0} = \begin{cases} 4 \frac{(-1)^i |D_N(x0_i)|}{\pi N} \text{ при нечётных } N, \\ 0, \text{ при чётных } N; \end{cases} \quad (37)$$

– выражение для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$A_{i,n} = (1 - (-1)^{N+n}) A'_{i,n} = (1 - (-1)^{N+n}) \frac{(-1)^i 4 |D_N(x0_i)| N \cos\left((2i+1)\frac{\pi n}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2N}\right)}{\pi(N^2 - n^2)}; \quad (38)$$

– выражение для гармоники с номером $n=N$:

$$A_{i,N} = 0. \quad (39)$$

7) Определение спектральной характеристики «хвостов» (рисунок 4) – отрезков кривых функции (9) для нечетных значений N на интервалах

$$x \in \left(-\pi + 4\pi l, -\pi + \frac{\pi}{N} + 4\pi l\right) \cup \left[\pi - \frac{\pi}{N} + 4\pi l, \pi + 4\pi l\right) \quad (40)$$

и

$$x \in \left(-\pi - \frac{\pi}{N} + 4\pi l, -\pi + 4\pi l\right) \cup \left[\pi + 4\pi l, \pi + \frac{\pi}{N} + 4\pi l\right), l \in Z. \quad (41)$$

а) спектральная плотность одиночной пары «хвостов» на интервале (40)

$$S_k(\omega) = 2 \cdot \int_{\pi - \frac{\pi}{N}}^{\pi} \sin\left(\frac{Nx}{2}\right) e^{-j\omega x} dx = 4 \cdot (-1)^{0.5(N+1)} \cdot \frac{2\omega \sin(\pi\omega) - N \cos(\pi\omega - \frac{\pi\omega}{N})}{N^2 - 4\omega^2}, \quad (42)$$

где $k = 0.5(N - 1)$

При $\omega = 0.5N$ выражение (42) примет вид

$$S_k\left(\omega = \frac{N}{2}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{N}{2}} \left\{ 4 \cdot (-1)^{0.5(N+1)} \cdot \frac{2\omega \sin(\pi\omega) - N \cos(\pi\omega - \frac{\pi\omega}{N})}{N^2 - 4\omega^2} \right\} = \frac{2}{N}. \quad (43)$$

б) определение дискретного спектра «хвостов» на интервале (40):

– выражение для постоянной составляющей:

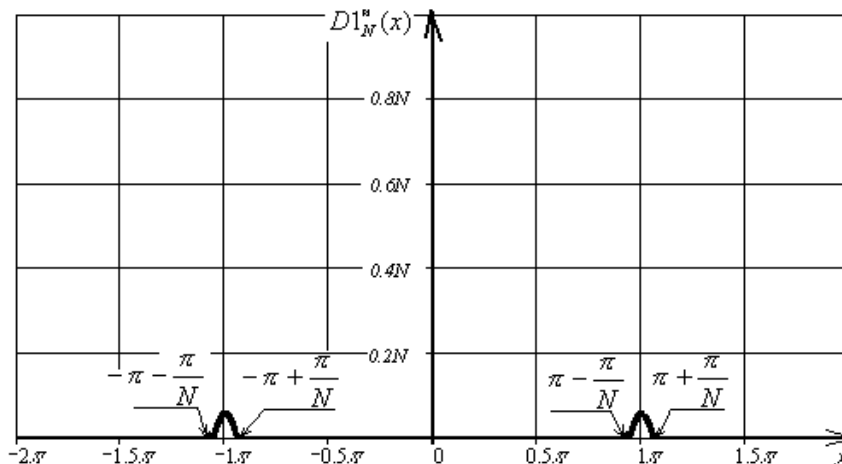


Рисунок 4. График «хвостов»

$$A'_{k,0} = \frac{S_k(0)}{T} = \frac{-(-1)^{0.5(N+1)}N}{\pi N^2} = \frac{(-1)^{0.5(N-1)}}{\pi N}; \quad (44)$$

– выражение для комплексной амплитуды n -й гармоники

$$A'_{k,n} = \frac{2S_k(n\omega_1)}{T} = 2(-1)^{0.5(N+1)} \frac{n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - N \cos\left(\frac{\pi n}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)}{\pi(N^2 - n^2)}; \quad (45)$$

– выражение для гармоники с номером $n=N$:

$$A'_{k,N} = \frac{1}{\pi N}. \quad (46)$$

8) По аналогии с выражениями (20)-(26) выражения для составляющих дискретного спектра «хвостов» на интервале (43) примут следующий вид:

– для постоянной составляющей:

$$A_{k,0}^{\pm} = -(-1)^N A'_{k,0} = A'_{k,0} = \frac{(-1)^{0.5(N-1)}}{\pi N}; \quad (47)$$

– для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$A_{k,n}^{\pm} = -(-1)^{N+n} A'_{k,n} = 2 \cdot (-1)^{0.5(N+1)+n} \cdot \frac{n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - N \cos\left(\frac{\pi n}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)}{\pi(N^2 - n^2)}; \quad (48)$$

– для $n=N$:

$$A_{k,N}^{\pm} = -(-1)^{N+N} A'_{k,N} = -A'_{k,N} = -\frac{1}{\pi N}. \quad (49)$$

9) Суммарный дискретный спектр «хвостов» на интервалах (40) и (41):

– выражение для постоянной составляющей:

$$A_{k,0} = A'_{k,0} + A_{k,0}^{\pm} = 2A'_{k,0} = \frac{2(-1)^{0.5(N-1)}}{\pi N}; \quad (50)$$

– выражение для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$A_{k,n} = (1 + (-1)^n) A'_{k,n} = 2(1 + (-1)^n) (-1)^{0.5(N+1)} \cdot \frac{n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - N \cos\left(\frac{\pi n}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)}{\pi(N^2 - n^2)}; \quad (51)$$

– выражение для гармоники с номером $n=N$:

$$A_{k,N} = A'_{k,N} - A'_{k,N} = 0. \quad (52)$$

10) Выражения составляющих общего дискретного спектра функции (9):

а) для постоянной составляющей:

$$A_0 = A_{0,0} + \sum_{i=1}^{0.5(N-1)-1} A_{i,0} + A_{k,0} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \left[1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{0.5(N-1)-1} \frac{(-1)^i}{\sin\left((2i+1)\frac{\pi}{2N}\right)} \right] + \\ 0 \text{ при чётных } N, \\ + \frac{(-1)^{0.5(N-1)}}{2N} \end{cases} \text{ при нечётных } N, \quad (53)$$

б) для комплексных амплитуд n -х гармоник:

– для четных значений N при $n \neq N$ и $n \neq 0.5N$

$$A_n = A_{0,n} + \sum_{i=1}^{0.5N-1} A_{i,n} = \frac{4N(1 - (-1)^n)}{\pi} \left\{ \frac{N \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)}{(N^2 - 4n^2)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{(N^2 - n^2)} \sum_{i=1}^{0.5N-1} (-1)^i \frac{\cos\left((2i+1)\frac{\pi}{2N}\right)}{\sin\left((2i+1)\frac{\pi}{2N}\right)} \right\}; \quad (54)$$

– для четных значений N при $n=0.5N$:

$$A_n|_{n=0.5N} = \left(A_{0,n} + \sum_{i=1}^{0.5N-1} A_{i,n} \right)_{n=0.5N} = (1 - (-1)^{0.5N}) \left\{ 1 + \frac{16}{\sqrt{2} \cdot 3N\pi} \sum_{i=1}^{0.5N-1} (-1)^i \frac{\cos\left((2i+1)\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left((2i+1)\frac{\pi}{2N}\right)} \right\}; \quad (55)$$

– для четных значений N при $n=N$:

$$A_N = A_{0,N} = 0; \quad (56)$$

– для нечетных значений N при $n \neq N$:

$$A_n = A_{0,n} + \sum_{i=1}^{0.5(N-1)-1} A_{i,n} + A_{k,n} = \frac{4(1 + (-1)^n)}{\pi} \left\{ \frac{N^2 \cos\frac{\pi n}{N}}{N^2 - 4n^2} + \frac{N \cos\frac{\pi n}{2N}}{N^2 - n^2} \cdot \sum_{i=1}^{0.5(N-1)-1} \left((-1)^i \frac{\cos\left(\frac{(2i+1)\pi n}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{2N}\right)} \right) + (-1)^{0.5(N+1)} \frac{n \sin\frac{\pi n}{2} - N \cos\left(\frac{\pi n}{2}\left(1 - \frac{\pi n}{2N}\right)\right)}{2(N^2 - n^2)} \right\}; \quad (57)$$

– для нечетных значений N при $n=N$:

$$A_N = A_{0,N} = \frac{4(1 + (-1)^N)N^2 \cos(\pi)}{\pi(N^2 - 4N^2)} = 0. \quad (58)$$

При подстановке в выражения (53) – (58) четных значений n при четных N и нечетных n при нечетных значениях N получаются нулевые значения амплитуд – действительно, косинусоиды функции (4) с соответствующими номерами n при соответствующих значениях N отсутствуют. Достоверность выражений (53) – (58) также была проверена в программной среде MathCAD анализом относительного приведенного к N отклонения значений суммы ряда Фурье $D_{N,\varphi} \approx A_0 + \sum_{n=1}^{kN} A_n \cos\left(\frac{n\varphi}{2}\right)$ от значений функции (9) для точек $x = -4\pi, -4\pi + \frac{\pi}{100N}, \dots, 4\pi$ (на нескольких периодах повторения) для различных значений N и kN . С помощью параметра kN здесь варьируется количество взятых в сумму гармоник. При $kN=20$ отклонение не превышает 0,5% и с увеличением kN уменьшается.

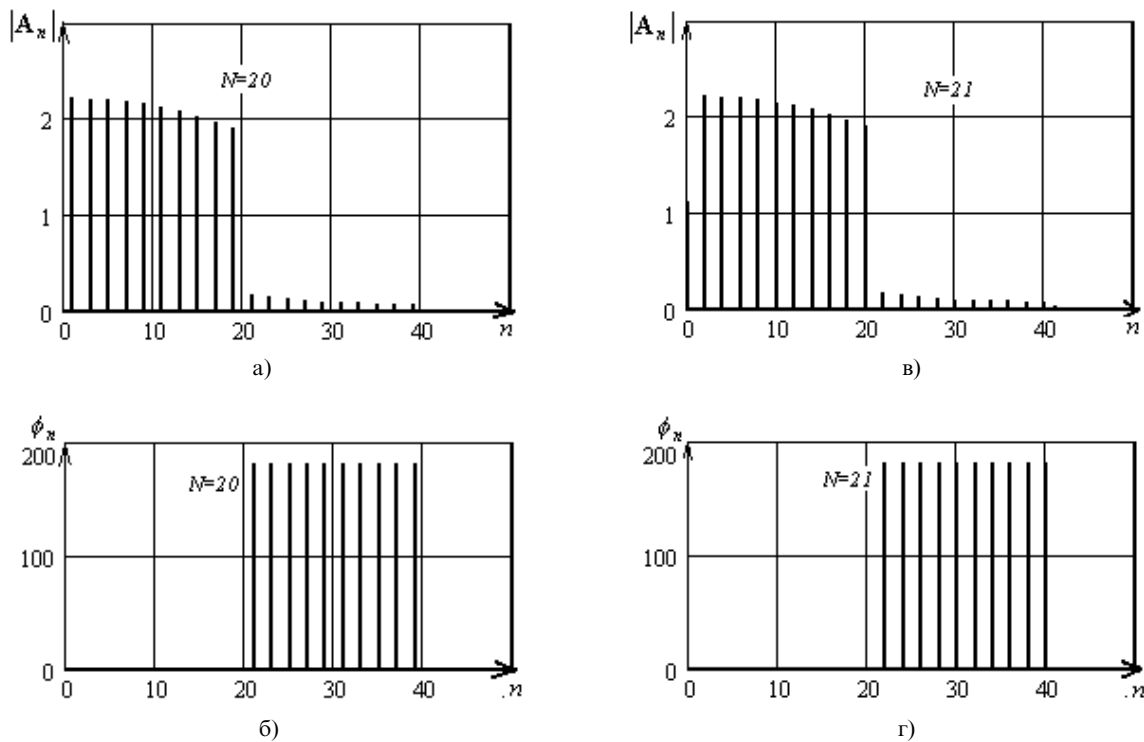


Рисунок 5.

По графикам полученного амплитудного (рисунок 5, а, в) и фазового (рисунок 5, б, г, где $\phi_n = \arg(A_n)$) спектра для четных и нечетных значений N видим:

- 1) появление в спектре функции (9) паразитных гармоник;
- 2) искажение равномерности основного амплитудного спектра;

3) фазовый спектр принимает два значения – 0 и 180 градусов, причем основной фазовый спектр нулевой.

Вклад паразитных гармоник предлагается оценивать с помощью выражения для коэффициента гармоник

$$k_{z,N} = \sqrt{\frac{0.5 \sum_{n=N+1}^{kN-N} A_n^2}{A_0^2 + 0.5 \sum_{n=1}^N A_n^2}} \cdot 100. \quad (59)$$

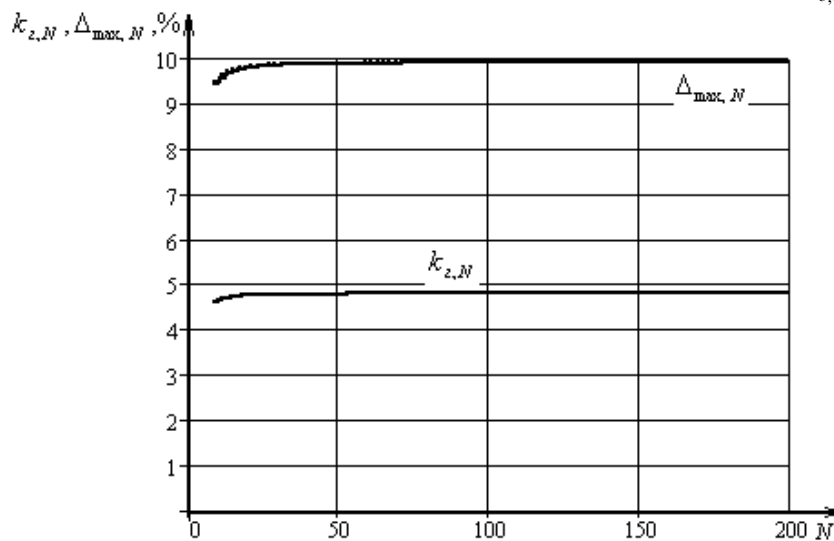


Рисунок 6

Так как в рабочей области значения амплитудного спектра модели (9) колеблется относительно значения $Am = 2$ – значения амплитуд косинусоидального спектра полинома (4), то неравномерность предлагается оценивать с помощью выражения

$$\Delta_{\max,N} = \begin{cases} \max_{n=2,4,\dots,N-1} \left(\frac{|A_n - A_m|}{A_m} \cdot 100 \right) \text{ при нечётных } N, \\ \max_{n=1,3,\dots,N-1} \left(\frac{|A_n - A_m|}{A_m} \cdot 100 \right) \text{ при чётных } N. \end{cases} \quad (60)$$

По графикам рисунка 6, также просчитанным в среде MathCAD для $N=6, \dots, 200$, видим, что $k_{e,N} < 5\%$, а неравномерность $\Delta_{\max,N} \leq 10\%$.

Предлагаемая модель (9) по величине неравномерности несколько уступает ЛЧМ-импульсу. Но ее использование в качестве функции испытательного сигнала в устройствах измерения ЧХ в указанном в начале статьи частотном диапазоне позволит значительно снизить время измерения ЧХ по сравнению с ручными методами и методами, основанными на использовании ЛЧМ-импульса, а также даст измерителям ЧХ следующие преимущества:

– генератор функции (9) потребует синхронизации и стабилизации частотно-задающих

цепей генераторов лишь двух гармонических функций выражения (9) в отличие от многочастотных генераторов. Амплитуды этих функций меняются и принимают новые значения соответствующих амплитуд на соответствующих промежутках, указанных в выражении (9), но подобная амплитудная модуляция, а также синхронизация генераторов сегодня осуществима с помощью несложных систем на микропроцессорах или микроконтроллерах;

– не требуется процедура нормирования значений составляющих спектра принятого с испытуемого устройства сигнала в отличие от измерителей, использующих испытательные сигналы произвольной формы;

– по сравнению с импульсными сигналами с короткой длительностью большая часть энергии спектра модели (9) сосредоточена в рабочей области.

Список использованной литературы:

1. Прибор для исследования амплитудно-частотных характеристик X1-41 / Техническое описание и инструкция по эксплуатации. – 1982.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов по специальности «Радиотехника». – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
3. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы: Пер. с англ. Н.В. Леви / Под ред. К.А. Семендяева. – М.: Наука, 1977. – 244 с.
4. Фролов С.С. Способы реализации равноамплитудных полиномов. // Материалы всероссийской научно-практической конференции «Современные информационные технологии в науке, образовании и практике». – Оренбург, 2004. – С.166-175.
5. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 1. Сигналы. Линейные системы с постоянными и переменными параметрами. – М.: «Советское радио», 1966. – 439 с.