**Иванов И.С., Чепасов В.И.**
Оренбургский государственный университет

# НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОЛОСОВОЙ НАГРУЗКИ, ПРИЛОЖЕННОЙ ВНУТРИ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

**В статье рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии упругой, однородной по глубине, невесомой полуплоскости при воздействии на нее вертикальной полосовой нагрузки для условий плоского напряженного состояния.**

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии упругой, однородной по глубине, невесомой полуплоскости с модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, нагруженной вертикальной полосовой нагрузкой на глубине d от поверхности (см. рис. 1 – схема расчета) для условий плоского напряженного состояния.

Известно решение Е. Мелана, исправленное и дополненное М.И. Горбуновым-Посадовым [1], для действия вертикальной сосредоточенной силы P, приложенной на глубине d от поверхности; в частности, бигармоническое уравнение $\varphi_м$ дано в виде:

$$\varphi_{м}=-\frac{p}{\pi}\left\{\frac{1}{2}y\left(arctg\frac{y}{x-d}+arctg\frac{y}{x+d}\right)-\frac{1+\nu}{2}\cdot\frac{dx(x+d)}{(x+d)^2+y^2}-\frac{1-\nu}{4}(x-d)ln\left|\frac{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}{(x+d)^2+y^2}\right|\right\} \quad (1)$$

На основании уравнения (1) определены компоненты напряжений и перемещений по известным соотношениям теории упругости [2].

Воспользуемся решением Е. Мелана для решения поставленной задачи. Выделим бесконечно малый элемент dξ на расстоянии ξ от оси x, при этом (– b = ξ = b), и тогда бигармоническая функция от полосовой нагрузки интенсивностью p = const будет:

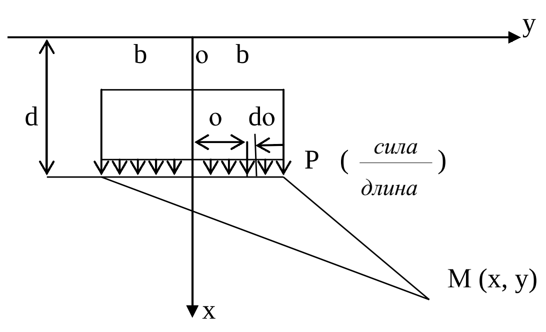


Рисунок 1.

$$\varphi=\int_{-b}^{b}-\frac{p}{\pi}\left\{\frac{1}{2}(y-\xi)\left(arctg\frac{y-\xi}{x-d}+arctg\frac{y-\xi}{x+d}\right)-\frac{1+\nu}{2}\cdot\frac{dx(x+d)}{(x+d)^2+(y-\xi)^2}-\frac{1-\nu}{4}(x-d)ln\left|\frac{\sqrt{(x-d)^2+(y-\xi)^2}}{\sqrt{(x+d)^2+(y-\xi)^2}}\right|\right\}d\xi \quad (2)$$

Интегрируя выражение (2), имеем:

$$\varphi=-\frac{p}{\pi}\left\{\frac{1+\nu}{2}\left[\frac{(x-d)^2+(y+b)^2}{4}arctg\frac{y+b}{x-d}-\frac{(x-d)^2+(y-b)^2}{4}arctg\frac{y-b}{x-d}+\frac{(x+d)^2+(y+b)^2}{4}\cdot arctg\frac{y+b}{x+d}-\frac{(x+d)^2+(y-b)^2}{4}arctg\frac{y-b}{x+d}-dx\left(arctg\frac{y+b}{x+d}-arctg\frac{y-b}{x+d}\right)\right]+\right.$$

$$+\frac{1-\nu}{4}\left[\frac{-(x-d)^2+(y+b)^2}{2}arctg\frac{y+b}{x-d}-\frac{-(x-d)^2+(y-b)^2}{2}arctg\frac{y-b}{x-d}+\frac{3(x+d)^2+(y+b)^2}{2}arctg\frac{y+b}{x+d}-\frac{3(x+d)^2+(y-b)^2}{2}arctg\frac{y-b}{x+d}-2d(x+d)\left(arctg\frac{y+b}{x+d}-arctg\frac{y-b}{x+d}\right)+\frac{(x-d)(y+b)}{2}ln\left|\frac{(x+d)^2+(y+b)^2}{(x-d)^2+(y+b)^2}\right|-\left.\frac{(x-d)(y-b)}{2}ln\left|\frac{(x+d)^2+(y-b)^2}{(x-d)^2+(y-b)^2}\right|\right]\right\} \quad (3)$$

Частный случай выражения (3), при d = 0, будет:

$$\varphi_{d=0}=-\frac{p}{2\pi}\left\{\left[x^2+(y+b)^2\right]arctg\frac{y+b}{x}-\left[x^2+(y-b)^2\right]arctg\frac{y-b}{x}\right\} \quad (4)$$

Выражение (4) точно совпадает с бигармонической функцией, полученной из известного решения Г.В. Колосова [3] от действия полосовой нагрузки, приложенной к поверхности полуплоскости.

Компоненты напряжений и перемещений определим, используя известные соотношения теории упругости [2].

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\frac{\rho}{\pi}\left\{\frac{1+\nu}{2}\left[\frac{1}{2}\left(arctg\,\frac{y+b}{x-d}-arctg\,\frac{y-b}{x-d}\right)+\right.\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left(arctg\,\frac{y+b}{x+d}-arctg\,\frac{y-b}{x+d}\right)+\frac{(x-d)(y+b)}{2\left[(x-d)^2+(y+b)^2\right]}-$$
$$\left.-\frac{2dx(x+d)(y-b)}{\left[(x+d)^2+(y-b)^2\right]^2}\right]+\frac{1-\nu}{4}\left[\left[\left(arctg\,\frac{y+b}{x-d}-\right.\right.\right.$$
$$\left.-arctg\,\frac{y-b}{x-d}\right)+\left(arctg\,\frac{y+b}{x+d}-arctg\,\frac{y-b}{x+d}\right)+$$
$$\left.\left.\left.+\frac{2x(y+b)}{(x+d)^2+(y+b)^2}-\frac{2x(y-b)}{(x+d)^2+(y-b)^2}\right]\right]\right\} \qquad (5)$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\frac{\rho}{\pi}\left\{\frac{1+\nu}{2}\left[\frac{1}{2}\left(arctg\,\frac{y+b}{x-d}-arctg\,\frac{y-b}{x-d}\right)+\right.\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left(arctg\,\frac{y+b}{x+d}-arctg\,\frac{y-b}{x+d}\right)-\frac{(x-d)(y+b)}{2\left[(x-d)^2+(y+b)^2\right]}+$$
$$+\frac{(x-d)(y-b)}{2\left[(x-d)^2+(y-b)^2\right]}-\frac{(x+d)(y+b)}{2\left[(x+d)^2+(y+b)^2\right]}+$$
$$+\frac{(x+d)(y-b)}{2\left[(x+d)^2+(y-b)^2\right]}+\frac{2d(y+b)}{(x+d)^2+(y+b)^2}-$$
$$-\frac{2d(y-b)}{(x+d)^2+(y-b)^2}-\frac{2dx(x+d)(y+b)}{\left[(x+d)^2+(y+b)^2\right]^2}+$$
$$\left.+\frac{2dx(x+d)(y-b)}{\left[(x+d)^2+(y-b)^2\right]^2}\right]+\frac{1-\nu}{4}\left[-\left(arctg\frac{y+b}{x-d}-arctg\frac{y-b}{x-d}\right)+\right.$$
$$+3\left(arctg\,\frac{y+b}{x+d}-arctg\,\frac{y-b}{x+d}\right)-\frac{2x(y+b)}{(x+d)^2+(y+b)^2}+$$
$$\left.\left.+\frac{2x(y-b)}{(x+d)^2+(y-b)^2}\right]\right\} \qquad (6)$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial_x\partial_y}=-\frac{\rho}{\pi}\left\{\frac{1+\nu}{2}\left[-\frac{(x-d)^2}{2\left[(x-d)^2+(y+b)^2\right]}+\right.\right.$$
$$+\frac{(x-d)^2}{2\left[(x-d)^2+(y-b)^2\right]}-\frac{x^2-2dx-d^2}{2\left[(x+d)^2+(y+b)^2\right]}+$$
$$+\frac{x^2-2dx-d^2}{2\left[(x+d)^2+(y-b)^2\right]}-\frac{2dx(x+d)^2}{\left[(x+d)^2+(y+b)^2\right]^2}+$$
$$\left.+\frac{2dx(x+d)^2}{\left[(x+d)^2+(y-b)^2\right]^2}\right]+\frac{1-\nu}{4}\left[\frac{1}{2}ln\left|\frac{(x-d)^2+(y+b)^2}{(x-d)^2+(y-b)^2}\right|-\right.$$
$$+\frac{1-\nu}{4}\left[\frac{1}{2}ln\left|\frac{(x-d)^2+(y+b)^2}{(x-d)^2+(y-b)^2}\right|-\frac{1}{2}ln\left|\frac{(x+d)^2+(y+b)^2}{(x+d)^2+(y-b)^2}\right|-\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{2x(x+d)}{(x+d)^2+(y+b)^2}+\frac{2x(x+d)}{(x+d)^2+(y-b)^2}\right]\right]\right\} \qquad (7)$$

$$u=\int\varepsilon_x dx=\int\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\sigma_y\right]dx=$$
$$-\frac{\rho}{\pi E}\left\{\frac{1-\nu^2}{2}(x-d)\left(arctg\,\frac{y+b}{x-d}-arctg\,\frac{y-b}{x-d}\right)+\right.$$
$$+\frac{(1-\nu)^2}{2}(x+d)\left(arctg\,\frac{y+b}{x+d}-arctg\,\frac{y-b}{x+d}\right)+$$
$$+\frac{3+2\nu-\nu^2}{8}(y+b)ln\left|(x-d)^2+(y+b)^2\right|-$$
$$-\frac{3+2\nu-\nu^2}{8}(y-b)ln\left|(x-d)^2+(y-b)^2\right|+$$
$$+\frac{5-2\nu+\nu^2}{8}(y+b)ln\left|(x+d)^2+(y+b)^2\right|-$$
$$-\frac{5-2\nu+\nu^2}{8}(y-b)ln\left|(x+d)^2+(y-b)^2\right|-$$
$$\left.-\frac{(1+\nu)^2}{2}\frac{dx(y+b)}{(x+d)^2+(y+b)^2}+\frac{(1+\nu)^2}{2}\frac{dx(y-b)}{(x+d)^2+(y-b)^2}\right\} \qquad (8)$$

$$\upsilon=\int\varepsilon_y dy=\int\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\sigma_x\right]dy=$$
$$=-\frac{\rho}{\pi E}\left\{(1-\nu)(y+b)arctg\,\frac{y+b}{x+d}-(1-\nu)(y-b)arctg\,\frac{y-b}{x-d}+\right.$$
$$+\frac{7-2\nu-\nu^2}{8}(x+d)ln\left|\frac{(x+d)^2+(y-b)^2}{(x+d)^2+(y+b)^2}\right|+$$
$$+\frac{(1+\nu)^2}{8}(x-d)ln\left|\frac{(x-d)^2+(y-b)^2}{(x-d)^2+(y+b)^2}\right|-$$
$$-\frac{3+2\nu-\nu^2}{4}d\,ln\left|\frac{(x+d)^2+(y-b)^2}{(x+d)^2+(y+b)^2}\right|+$$
$$\left.+\frac{(1+\nu)^2}{2}\frac{dx(x+d)}{(x+d)^2+(y+b)^2}-\frac{(1+\nu)^2}{2}\frac{dx(x+d)}{\left[(x+d)^2+(y-b)^2\right]}\right\} \qquad (9)$$

$$-\frac{x^2-2dx-d^2}{2\left[(x+d)^2+(y+b)^2\right]}+\frac{x^2-2dx-d^2}{2\left[(x+d)^2+(y-b)^2\right]}-$$

$$-\frac{2dx(x+d)^2}{\left[(x+d)^2+(y+b)^2\right]^2}+\frac{2dx(x+d)^2}{\left[(x+d)^2+(y-b)^2\right]^2}\Bigg]+$$

$$+\frac{1-\nu}{4}\left[\frac{1}{2}ln\left|\frac{(x-d)^2+(y+b)^2}{(x-d)^2+(y-b)^2}\right|-\frac{1}{2}ln\left|\frac{(x+d)^2+(y+b)^2}{(x+d)^2+(y-b)^2}\right|-\right.$$

$$\left.-\frac{2x(x+d)}{(x+d)^2+(y+b)^2}+\frac{2x(x+d)}{(x+d)^2+(y-b)^2}\right]\Bigg\} \quad (10)$$

При d = 0 выражения (5)÷(10) точно соответствуют частному случаю, рассмотренному Г.В. Колосовым от полосовой нагрузки, приложенной к поверхности полуплоскости.

Проанализируем результаты полученного решения.

Компоненты напряжений $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$, а также перемещений u, $\upsilon$, $\gamma_{xy}$ при удалении точки M (x, y) на бесконечность ( $x \to \infty$ , $y \to \infty$ ) обращаются в ноль.

При x = d в интервале ($-$ b$\le$ y$\le$ b) $\sigma_x$ = p, а при x = 0 $\sigma_x$ = 0 ($\lim\limits_{x\to 0}\sigma_x = 0$), что и должно быть, т. к. поверхность полуплоскости свободна.

Напряжение $\sigma_x$, $\sigma_y$, перемещение u, $\upsilon$ симметричны относительно оси x, напряжение $\tau_{xy}$, перемещение $\gamma_{xy}$ обращаются в нуль на оси симметрии (y = 0), что полностью соответствует теории упругости для задач с симметрией.

Для доказательства правильности решения выполнена проверка условия совместности деформаций вида:

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \quad (11)$$

Дифференцируя уравнение (8) по y и уравнение (9) по x, после математических преобразований убеждаемся в точном выполнении уравнения (11) (математические выкладки ввиду громоздкости не приводим).

Наконец, наиболее важным требованием теории упругости для бигармонической функции (функции Эри) должно выполняться условие бигармоничности в виде (невесомая среда):

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0 \quad (12)$$

Дифференцируя выражение (3) после сложных математических преобразований, убеждаемся, что условие (12) для выражения (3) выполняется.

В связи с тем, что функции в найденном решении достаточно сложны, дополнительно были разработаны программы на ЭВМ, позволившие численными методами доказать полное соответствие найденных функций требованиям теории упругости.

Ввиду важности исследования приводим текст программы по проверке всех теоретических выкладок (алгоритмический язык FORTRAN).

```
$large
   double precision x,dx,pr1x,pr2x,
  *pr3x,pr4x,pr1y,pr2y,pr3y,pr4y,
  *smyx,dy,y,dyp,xn,xk,yn,yk,b,d,pu,dxp
   double precision pr1xm(500),
  *pr2xm(500),pr3xm(500),xm(500),
  *pr4xm(500),pr1ym(500),pr2ym(500),
  *pr3ym(500),pr4ym(500),smyxm(500)
   common b,d,pu
   open(6,file='iwanow',status='Unknown')
   write(*,101)
101 format(1x,'введите через пробел
  *начальную и конечную границу',
  *' по X')
   read(*,*) xn,xk
   write(*,301)
301 format(1x,'введите через пробел
  *шаги движения и',
  *'дифференцирования по X')
   read(*,*)dxp,dx
   write(*,1101)
1101 format(1x,'введите через пробел
  *начальную и конечную границу',
  *' по Y')
   read(*,*) yn,yk
   write(*,1301)
1301 format(1x,'введите через пробел
  *шаги движения и',
  *' дифференцирования по Y')
   read(*,*)dyp,dy
   write(*,103)
103 format(1x,'введите через пробел
  *b,d')
   read(*,*) b,d
   write(6,115) xn,xk,dxp,dx,yn,yk,
  *dyp,dy,b,d
115 format(1x,'начальная граница по
  *X=',f10.4//1x,
  *'конечная граница по X=',f10.4//1x,
  *'шаг движения по X=',f10.4//1x,
  *'шаг дифференцирования по
  *X=',f10.4//1x,
  *'начальная граница по Y=',f10.4//1x,
  *'конечная граница по Y=',f10.4//1x,
  *'шаг движения по Y=',f10.4//1x,
  *'шаг дифференцирования по
  *Y=',f10.4//1x,
  *'b=',f10.4,' d=',f10.4//)
   pu=0.3
   y=yn
75 continue
```

```
   x=xn
   k=1
65 continue
   call proizw(x,dx,y,dy,pr1x,pr2x,
  *pr3x,pr4x,pr1y,pr2y,pr3y,pr4y,smyx)
   pr1xm(k)=pr1x
   pr2xm(k)=pr2x
   pr3xm(k)=pr3x
   pr4xm(k)=pr4x
   pr1ym(k)=pr1y
   pr2ym(k)=pr2y
   pr3ym(k)=pr3y
   pr4ym(k)=pr4y
   smyxm(k)=smyx
   xm(k)=x
   k=k+1
   if(k.le.500) goto 1111
   write(6,1112)
1112 format(1x,'количество точек
  *больше 500')
   goto 7799
1111 continue
   x=x+dxp
   if(x.le.xk) goto 65
   k=k-1
   write(6,2010) y
2010 format(/1x,'изменение по X,
  *графики для точек с y=',f10.5/)
   write(6,2001)
2001 format(1x,'график первой
  *производной по X'/)
   call graf(k,dxp,xm,pr1xm)
   write(6,2002)
2002 format(1x,'график второй
  *производной по X'/)
   call graf(k,dxp,xm,pr2xm)
   write(6,2003)
2003 format(1x,'график третьей
  *производной по X'/)
   call graf(k,dxp,xm,pr3xm)
   write(6,2004)
2004 format(1x,'график четвертой
  *производной по X'/)
   call graf(k,dxp,xm,pr4xm)
   write(6,2005)
2005 format(1x,'график первой
  *производной по Y'/)
   call graf(k,dxp,xm,pr1ym)
   write(6,2006)
2006 format(1x,'график второй
  *производной по Y'/)
   call graf(k,dxp,xm,pr2ym)
   write(6,2007)
2007 format(1x,'график третьей
  *производной по Y'/)
   call graf(k,dxp,xm,pr3ym)
   write(6,2008)
2008 format(1x,'график четвертой
  *производной по Y'/)
   call graf(k,dxp,xm,pr4ym)
   write(6,2017)
2017 format(/1x,'график удвоенной
  *смешанной производной'/1x,
  *'(сначала дважды по y,потом дважды
  *по x)'/)
   call graf(k,dxp,xm,smyxm)
   y=y+dyp
   if(y.le.yk) goto 75
   x=xn
775 continue
   y=yn
   k=1
765 continue
   call proizw(x,dx,y,dy,pr1x,pr2x,
  *pr3x,pr4x,pr1y,pr2y,pr3y,pr4y,smyx)
   pr1xm(k)=pr1x
   pr2xm(k)=pr2x
   pr3xm(k)=pr3x
   pr4xm(k)=pr4x
   pr1ym(k)=pr1y
   pr2ym(k)=pr2y
   pr3ym(k)=pr3y
   pr4ym(k)=pr4y
   smyxm(k)=smyx
   xm(k)=y
   k=k+1
   y=y+dyp
   if(y.le.yk) goto 765
   k=k-1
   write(6,3010) x
3010 format(/1x,'изменение по Y,графики
  *для точек с x=',f10.5/)
   write(6,2001)
   call graf(k,dyp,xm,pr1xm)
   write(6,2002)
   call graf(k,dyp,xm,pr2xm)
   write(6,2003)
   call graf(k,dyp,xm,pr3xm)
   write(6,2004)
   call graf(k,dyp,xm,pr4xm)
   write(6,2005)
   call graf(k,dyp,xm,pr1ym)
   write(6,2006)
   call graf(k,dyp,xm,pr2ym)
   write(6,2007)
   call graf(k,dyp,xm,pr3ym)
   write(6,2008)
   call graf(k,dyp,xm,pr4ym)
   write(6,2017)
   call graf(k,dyp,xm,smyxm)
   x=x+dxp
   if(x.le.xk) goto 775
7799 continue
   write(*,*) 'результат в файле iwanow'
   pause
   close(6,status='keep')
```

```
      end
      function fig(x,y)
      double precision b,d,pu,x,y,s1,s2,
     *s3,s4,s5,f1,z1,z2,z3,z4,z5,z6,z7,f2
      common b,d,pu
      s1=((x-d)**2+(y+b)**2)/
     *4*datan((y+b)/(x-d))
      s2=-((x-d)**2+(y-b)**2)/
     *4*datan((y-b)/(x-d))
      s3=((x+d)**2+(y+b)**2)/
     *4*datan((y+b)/(x+d))
      s4=-((x+d)**2+(y-b)**2)/
     *4*datan((y-b)/(x+d))
      s5=-d*x*(atan((y+b)/(x+d))-
     *datan((y-b)/(x+d)))
      f1=(1+pu)/2*(s1+s2+s3+s4+s5)
      z1=((y+b)**2-(x-d)**2)/
     *2*datan((y+b)/(x-d))
      z2=-((y-b)**2-(x-d)**2)/
     *2*datan((y-b)/(x-d))
      z3=(3*(x+d)**2+(y+b)**2)/
     *2*datan((y+b)/(x+d))
      z4=(-(3*(x+d)**2+(y-b)**2))/
     *2*datan((y-b)/(x+d))
      z5=-2*d*(x+d)*(datan((y+b)/(x+d))-
     *datan((y-b)/(x+d)))
      z6=(x-d)*(y+b)/2*alog(((x+d)**2+
     *(y+b)**2)/((x-d)**2+(y+b)**2))
      z7=-(x-d)*(y-b)/2*alog(((x+d)**2+
     *(y-b)**2)/((x-d)**2+(y-b)**2))
      f2=(1-pu)/4*(z1+z2+z3+z4+z5+z6+z7)
      fig=-1./(datan(1.)*4)*(f1+f2)
      return
      end
      subroutine proizw(x,dx,y,dy,pr1x,
     *pr2x,pr3x,pr4x,pr1y,pr2y,pr3y,pr4y,smyx)
      double precision x,dx,pr1x,pr2x,
     *pr3x,pr4x,pr1y,pr2y,pr3y,pr4y,
     *del1,del2,del3,del4,ar1,ar2,z1,z2,
     *z4,z6,z3,z5,z9,z10,z12,*z14,z11,z8,z7,z13,z17,a
     *r,s1,s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9,smyx,sum,dy,
     *y,dyp,xn,xk,yn,yk,b,d,pu,sigxw,sigyw,tayxy,
     *tau,tau1,upox,vpoy,upoxw,vpoyw,gamxyi,
     *gamxyw,upoy,vpox
      pu=0.3
      ar1=x+dx
      ar2=x-dx
      ar=y
      pr1x=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/
     *(2*dx)
      ar1=x+2*dx
      ar2=x
      z1=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      ar2=x-2*dx
      ar1=x
      z2=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      pr2x=(z1-z2)/(2*dx)
      ar1=x+3*dx
      ar2=x+dx
      z4=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      ar1=x-dx
      ar2=x-3*dx
      z6=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      z3=(z4-pr1x)/(2*dx)
      z5=(pr1x-z6)/(2*dx)
      pr3x=(z3-z5)/(2*dx)
      ar1=x+4*dx
      ar2=x+2*dx
      z9=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      ar1=x+2*dx
      ar2=x
      z10=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/
     *(2*dx)
      ar1=x
      ar2=x-2*dx
      z12=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/
     *(2*dx)
      ar1=x-2*dx
      ar2=x-4*dx
      z14=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/
     *(2*dx)
      z11=(z10-z12)/(2*dx)
      z8=(z9-z10)/(2*dx)
      z7=(z8-z11)/(2*dx)
      z13=(z12-z14)/(2*dx)
      z11=(z10-z12)/(2*dx)
      z17=(z11-z13)/(2*dx)
      pr4x=(z7-z17)/(2*dx)
      ar1=y+dy
      ar2=y-dy
      ar=x
      pr1y=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/
     *(2*dy)
      ar1=y+2*dy
      ar2=y
      z1=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/(2*dy)
      ar2=y-2*dy
      ar1=y
      z2=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/(2*dy)
      pr2y=(z1-z2)/(2*dy)
      ar1=y+3*dy
      ar2=y+dy
      z4=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/(2*dy)
      ar1=y-dy
      ar2=y-3*dy
      z6=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/(2*dy)
      z3=(z4-pr1y)/(2*dy)
      z5=(pr1y-z6)/(2*dy)
      pr3y=(z3-z5)/(2*dy)
      ar1=y+4*dy
      ar2=y+2*dy
      z9=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/(2*dy)
      ar1=y+2*dy
      ar2=y
      z10=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/
     *(2*dy)
```

```
      ar1=y
      ar2=y-2*dy
      z12=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/
     *(2*dy)
      ar1=y-2*dy
      ar2=y-4*dy
      z14=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/
     *(2*dy)
      z11=(z10-z12)/(2*dy)
      z8=(z9-z10)/(2*dy)
      z7=(z8-z11)/(2*dy)
      z13=(z12-z14)/(2*dy)
      z11=(z10-z12)/(2*dy)
      z17=(z11-z13)/(2*dy)
      pr4y=(z7-z17)/(2*dy)
      ar1=x+2*dx
      ar2=x
      ar=y+2*dy
      s2=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      ar1=x
      ar2=x-2*dx
      s3=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      s1=(s2-s3)/(2*dx)
      ar1=x+2*dx
      ar2=x
      ar=y
      s5=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      ar1=x
      ar2=x-2*dx
      s6=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      s4=(s5-s6)/(2*dx)
      ar1=x+2*dx
      ar2=x
      ar=y-2*dy
      s8=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      ar1=x
      ar2=x-2*dx
      s9=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      s7=(s8-s9)/(2*dx)
      smyx=2*(s1-2*s4+s7)/(4*dy*dy)
      sum=pr4x+pr4y+smyx
      sigxw=sigx(x,y)
      sigyw=sigy(x,y)
      tayxy=tay(x,y)
      ar1=x+dx
      ar2=x-dx
      ar=y+dy
      s1=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      ar=y-dy
      s2=(fig(ar1,ar)-fig(ar2,ar))/(2*dx)
      tau=-(s1-s2)/(2*dy)
      ar1=y+dy
      ar2=y-dy
      ar=x+dx
      s1=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/(2*dy)
      ar=x-dx
      s2=(fig(ar,ar1)-fig(ar,ar2))/(2*dy)
      tau1=-(s1-s2)/(2*dx)
```

```
      ar1=x+dx
      ar2=x-dx
      ar=y
      upox=(uper(ar1,ar)-uper(ar2,ar))/
     *(2*dx)
      ar1=y+dy
      ar2=y-dy
      ar=x
      vpoy=(vper(ar,ar1)-vper(ar,ar2))/
     *(2*dy)
      upoxw=(pr2y-pu*pr2x)
      vpoyw=(pr2x-pu*pr2y)
c     write(6,7812)pr2y,pu,pr2x,upoxw,
     *vpoyw
7812  format(1x,'sig x,pu,sig y,du/dx,
     *dv/dy',5f10.5/)
      gamxyi=gamxy(x,y)
      gamxyw=2*(1+pu)*tau1
      write(6,231) x,y,pr1x,pr2x,sigyw,
     *pr3x,pr4x
      write(6,431) pr1y,pr2y,sigxw,pr3y,
     *pr4y,smyx,sum
231   format(1x,'координаты точки
     *x=',f10.5,' y=',f10.5//1x,'первая
     *производная по X=',e15.7/1X,
     *'счет вторая производная по X(сигма
     *y)=',e15.7/1x,'сигма y Иванов=',
     *e15.7/1x,'третья производная по
     *X=',e15.7/1x,'четвертая производная
     *по X=',e15.7/)
431   format(1x,'первая производная по
     *Y=',e15.7/1X,'счет вторая
     *производная по Y(сигма x)=',e15.7/
     *1x,'сигма x Иванов=',e15.7/1x,
     *'третья производная по Y=',e15.7/
     *1x,'четвертая производная по
     *Y=',e15.7//1x,'удвоенная смешанная
     *производная(дважды по y,дважды по
     *x)=',e15.7/' сумма четвертых
     *производных по X,Y и удвоенной
     *смешанной=',e15.7/)
      write(6,567) tayxy,tau,tau1
567   format(/1x,'tau по Иванову=',
     *e15.7/1x,' tau счет(сначала
     *производная по y,потом по x)=',
     *e15.7/' tau счет(сначала
     *производная по x,потом по y)='
     *e15.7/)
      ar1=y+dy
      ar2=y-dy
      ar=x
      upoy=(uper(ar,ar1)-uper(ar,ar2))/
     *(2*dy)
      ar1=x+dx
      ar2=x-dx
      ar=y
      vpox=(vper(ar1,y)-vper(ar2,ar))/
     *(2*dx)
```

```
   sum=upoy+vpox
   write(6,4301) upox,upoxw,vpoy,
  *vpoyw,gamxyi,gamxyw,sum
4301 format(1x,'производная du/
  *dx(Иванов)=',f10.5/1x,'производная
  *du/dx(бигармоника)=',f10.5/1x,
  *'производная dv/dy(Иванов)=',f10.5/
  *1x,'производная dv/
  *dy(бигармоника)=',f10.5/1x,
  *'gammaxy(Иванов)=',f10.5/1x,
  *'gammaxy(бигармоника)=',f10.5/1x,
  *'сумма du/dy+dv/dx(Иванов)=',
  *f10.5/)
   return
   end
   subroutine graf(kt,dx,x,y)
   dimension y(1),str(41),x(1),
  *xminx(500),xmaxx(500),yminx(500),
  *ymaxx(500),kminm(500),kmaxm(500)
   double precision y,xmax,xmas,dx,x,
  *xminx,xmaxx,yminx,ymaxx,y1,y2
   data prob/' «/,sim/»*'/
   if(kt.le.500) goto 5555
   write(6,5556) kt
5556 format(1x,'количество точек для
  *графики>500=',i4)
   write(*,5556) kt
   pause
   stop
5555 continue
   xmax=dabs(y(1))
   do 1 i=1,kt
   if(xmax.ge.dabs(y(i))) goto 1
   xmax=dabs(y(i))
1  continue
   kx=kt
   xmas=xmax/20
   write(6,2) dx,xmas
2  format(/1x,'Цена деления по оси
  *координаты(X) =',f19.7/1x,'Цена
  *деления по оси координаты(Y) =',
  *f19.7//)
   write(6,3)
3  format(20(«_»),'X',19(«_»),'Y')
c  y1=dabs(y(1))
   if(y(1).eq.0) y1=1d-16
   do 4 i=1,kt
   do 5 j=1,41
   str(j)=prob
5  continue
   str(21)='|'
   if(y(i).lt.0) goto 7
   if(y(i).gt.0) goto 8
   str(21)='0'
   goto 10
7  continue
   kk=dabs(y(i))/xmas+0.5
   if(kk.eq.0) str(21)='0'
   kn=20-kk+1
   do 20 j=kn,20
   str(j)=sim
20 continue
   goto 10
8  continue
   kk=y(i)/xmas+0.5
   if(kk.eq.0) str(21)='0'
   kkon=21+kk
   do 27 j=22,kkon
   str(j)=sim
27 continue
10 continue
c  y2=y(i)/y1
   write(6,76) str,y(i)
76 format(41a1,' y=',f24.9)
4  continue
   write(6,345)
345 format(//)
   return
   end
   function sigx(x,y)
   double precision x,y,b,d,s1,s2,s3,
  *s4,s5,s6,s7,s8,s9,pu
   common b,d,pu
   s1=0.5*(datan((y+b)/(x-d))-
  *datan((y-b)/(x-d)))
   s2=0.5*(datan((y+b)/(x+d))-
  *datan((y-b)/(x+d)))
   s3=(x-d)*(y+b)/(2*((x-d)**2+
  *(y+b)**2))
   s4=-(x-d)*(y-b)/(2*((x-d)**2+
  *(y-b)**2))
   s5=(x+d)*(y+b)/(2*((x+d)**2+
  *(y+b)**2))
   s6=-(x+d)*(y-b)/(2*((x+d)**2+
  *(y-b)**2))
   s7=2*d*x*(x+d)*(y+b)/((x+d)**2+
  *(y+b)**2)**2
   s8=-2*d*x*(x+d)*(y-b)/((x+d)**2+
  *(y-b)**2)**2
   s9=(1+pu)/2*(s1+s2+s3+s4+s5+s6+
  *s7+s8)
   s1=(datan((y+b)/(x-d))-datan((y-
  *b)/(x-d)))
   s2=(datan((y+b)/(x+d))-datan((y-
  *b)/(x+d)))
   s3=2*x*(y+b)/((x+d)**2+(y+b)**2)
   s4=-2*x*(y-b)/((x+d)**2+(y-b)**2)
   s5=(1-pu)/4*(s1+s2+s3+s4)
   sigx=-(s9+s5)/(datan(1.)*4)
   return
   end
   function sigy(x,y)
   double precision x,y,s1,s2,s3,s4,
  *s5,s6,s7,s8,s9,s10,s11,b,d,pu
   common b,d,pu
   s1=0.5*(datan((y+b)/(x-d))-
```

```
*datan((y-b)/(x-d)))
 s2=0.5*(datan((y+b)/(x+d))-
*datan((y-b)/(x+d)))
 s3=-(x-d)*(y+b)/(2*((x-d)**2+
*(y+b)**2))
 s4=(x-d)*(y-b)/(2*((x-d)**2+
*(y-b)**2))
 s5=-(x+d)*(y+b)/(2*((x+d)**2+
*(y+b)**2))
 s6=(x+d)*(y-b)/(2*((x+d)**2+
*(y-b)**2))
 s7=2*d*(y+b)/((x+d)**2+(y+b)**2)
 s8=-2*d*(y-b)/((x+d)**2+(y-b)**2)
 s9=-2*d*x*(x+d)*(y+b)/((x+d)**2+
*(y+b)**2)**2
 s10=2*d*x*(x+d)*(y-b)/((x+d)**2+
*(y-b)**2)**2
 s11=(1+pu)/2*(s1+s2+s3+s4+s5+s6+
*s7+s8+s9+s10)
 s1=-(datan((y+b)/(x-d))-datan
*((y-b)/(x-d)))
 s2=3*(datan((y+b)/(x+d))-datan
*((y-b)/(x+d)))
 s3=-2*x*(y+b)/((x+d)**2+(y+b)**2)
 s4=2*x*(y-b)/((x+d)**2+(y-b)**2)
 s5=(1-pu)/4*(s1+s2+s3+s4)
 sigy=-(s11+s5)/(datan(1.)*4)
 return
 end
 function tay(x,y)
 double precision x,y,b,d,pu,s1,s2,
*s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9
 common b,d,pu
 s1=-(x-d)**2/(2*((x-d)**2+
*(y+b)**2))
 s2=(x-d)**2/(2*((x-d)**2+(y-
*b)**2))
 s3=-(x*x-2*d*x-d*d)/(2*((x+d)**2+
*(y+b)**2))
 s4= (x*x-2*d*x-d*d)/(2*((x+d)**2+
*(y-b)**2))
 s5=-2*d*x*(x+d)**2/((x+d)**2+
*(y+b)**2)**2
 s6=2*d*x*(x+d)**2/((x+d)**2+
*(y-b)**2)**2
 s7=(1+pu)/2*(s1+s2+s3+s4+s5+s6)
 s8=0.5*alog(((x-d)**2+(y+b)**2)/
*((x-d)**2+(y-b)**2))
 s9=-0.5*alog(((x+d)**2+(y+b)**2)/
*((x+d)**2+(y-b)**2))
 s1=-2*x*(x+d)/((x+d)**2+(y+b)**2)
 s2=2*x*(x+d)/((x+d)**2+(y-b)**2)
 s3=(1-pu)/4*(s8+s9+s1+s2)
 tay=-(s7+s3)/(datan(1.)*4)
 return
 end
 function uper(x,y)
 double precision s1,s2,s3,s4,s5,
*s6,s7,s8,s9,x,y,b,d,pu
 common b,d,pu
 s1=(1-pu*pu)/2*(x-d)*(datan((y+b)/
*(x-d))-datan((y-b)/(x-d)))
 s2=(1-pu)**2/2*(x+d)*(datan((y+b)/
*(x+d))-datan((y-b)/(x+d)))
 s3=-(1+pu)**2/2*(d*x*(y+b)/
*((x+d)**2+(y+b)**2)-d*x*(y-b)/
*((x+d)**2+(y-b)**2))
 s4=(3+2*pu-pu*pu)/8*(y+b)*alog
*((x-d)**2+(y+b)**2)
 s5=-(3+2*pu-pu*pu)/8*(y-b)*alog
*((x-d)**2+(y-b)**2)
 s6=(5-2*pu+pu**2)/8*(y+b)*alog
*((x+d)**2+(y+b)**2)
 s7=-(5-2*pu+pu*pu)/8*(y-b)*alog
*((x+d)**2+(y-b)**2)

 s8=datan(1.)*4
 uper=-1/s8*(s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7)
 return
 end
 function vper(x,y)
 double precision x,y,b,d,pu,s1,
*s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9
 common b,d,pu
 s1=(7-2*pu-pu*pu)/8*(x+d)*alog
*(((x+d)**2+(y-b)**2)/
*((x+d)**2+(y+b)**2))
 s2=(1+pu)**2/8*(x-d)*alog
*(((x-d)**2+(y-b)**2)/
*((x-d)**2+(y+b)**2))
 s3=-(3+2*pu-pu*pu)/4*d*alog
*(((x+d)**2+(y-b)**2)/
*((x+d)**2+(y+b)**2))
 s4=(1-pu)*y*(datan((y+b)/(x+d))-
*datan((y-b)/(x+d)))
 s5=(1-pu)*b*(datan((y+b)/
*(x+d))+datan((y-b)/(x+d)))
 s6=(1+pu)**2/4*(d*x*(x+d)/
*((x+d)**2+(y+b)**2)-d*x*(x+d)/
*((x+d)**2+(y-b)**2))
 s8=datan(1.)*4
 vper=-1/s8*(s1+s2+s3+s4+s5+s6)
 return
 end
 function gamxy(x,y)
 double precision x,y,b,d,pu,s1,s2,
*s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9
 common b,d,pu
 s1=-(x-d)**2/(2*((x-d)**2+
*(y+b)**2))
 s2=(x-d)**2/(2*((x-d)**2+
*(y-b)**2))
 s3=-(x*x-2*d*x-d*d)/(2*((x+d)**2+
*(y+b)**2))
 s4=(x*x-2*d*x-d*d)/(2*((x+d)**2+
*(y-b)**2))
```

```
 s5=-2*d*x*(x+d)**2/((x+d)**2+
*(y+b)**2)**2
 s6=2*d*x*(x+d)**2/((x+d)**2+
*(y-b)**2)**2
 s7=(1+pu)/2*(s1+s2+s3+s4+s5+s6)
 s1=0.5*alog(((x-d)**2+(y+b)**2)/
*((x-d)**2+(y-b)**2))
 s2=-0.5*alog(((x+d)**2+(y+b)**2)/
*((x+d)**2+(y-b)**2))
 s3=-2*x*(x+d)/((x+d)**2+(y+b)**2)
 s4=2*x*(x+d)/((x+d)**2+(y-b)**2)
 s5=(1-pu)/4*(s1+s2+s3+s4)
 s9=atan(1.)*4
 gamxy=-2*(1+pu)/s9*(s7+s5)
 return
 end
```

Фрагмент результатов проверки:

```
начальная граница по X= 3.0000

конечная граница по X= 4.0000

шаг движения по X=.2500

шаг дифференцирования по X=.1000

начальная граница по Y= 3.0000

конечная граница по Y= 4.0000

шаг движения по Y=.2500

шаг дифференцирования по Y=.1000

b= 1.0000 d= 1.5000


координаты точки
x= 3.00000 y= 3.00000

первая производная по
X=.4282594E-01
счет вторая производная по
X(сигма y)= -.1106322E+00
сигма y Иванов= -.1106880E+00
третья производная по
X=.2378225E-01
четвертая производная по
X=.1907349E-01

первая производная по
Y= -.8350170E+00
счет вторая производная по
Y(сигма x)= -.9820461E-01
сигма x Иванов= -.9805545E-01
третья производная по
Y=.6374717E-01
четвертая производная по
Y= -.4321337E-01

удвоенная смешанная производная
(дважды по y,дважды  по x)=
.2503395E-01
сумма четвертых производных по X,Y
и удвоенной смешанной=.8940697E-03

tau по Иванову= -.9591695E-01
tau счет(сначала производная по
y,потом по x)= -.9588599E-01
tau счет(сначала производная по
x,потом по y)= -.9588599E-01

производная du/dx(Иванов)= -.06484
производная du/dx(бигармоника)=
-.06501
производная dv/dy(Иванов)= -.07929
производная dv/dy(бигармоника)=
-.08117
gammaxy(Иванов)= -.24938
gammaxy(бигармоника)= -.24930
сумма du/dy+dv/dx(Иванов)= -.24693
координаты точки
x= 3.25000 y= 3.00000

первая производная по
X=.1595140E-01
счет вторая производная по
X(сигма y)= -.1041830E+00
сигма y Иванов= -.1042180E+00
третья производная по
X=.2726912E-01
четвертая производная по
X=.1013279E-01

первая производная по
Y= -.8107674E+00
счет вторая производная по
Y(сигма x)= -.1064718E+00
сигма x Иванов= -.1063339E+00
третья производная по
Y=.6523728E-01
четвертая производная по
Y= -.4127622E-01

удвоенная смешанная производная
(дважды по y,дважды по  x)=
.3099442E-01
сумма четвертых производных по
X,Y и удвоенной смешанной =
-.1490116E-03

tau по Иванову= -.9781913E-01
tau счет(сначала производная по
y,потом по x)= -.9778738E-01
tau счет(сначала производная по
```

```
x,потом по y)= -.9778738E-01

производная du/dx(Иванов)= -.07505
производная du/dx(бигармоника)=
-.07522
производная dv/dy(Иванов)= -.07138
производная dv/dy(бигармоника)=
-.07224
gammaxy(Иванов)= -.25433
gammaxy(бигармоника)= -.25425
сумма du/dy+dv/dx(Иванов)= -.25110
```

Задача решена для плоского напряженного состояния, но позволяет перейти к условиям плоской деформации с известной заменой коэффициента Пуассона $\nu$ на величину $\mu$ в виде:

$$\mu = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad (13)$$

При этом размерность величины P изменится, вместо ($\frac{\textit{сила}}{\textit{длину}}$) должна иметь размерность ($\frac{\textit{сила}}{\textit{площадь}}$).


**Список использованной литературы:**

1. М.И. Горбунов-Посадов. Поправка к формуле для определения перемещений упругой полуплоскости // Основания, фундаменты и механика грунтов, №2, 1964.
2. С.П. Тимошенко, Д. Гудьер. Теория упругости. Пер. с английского М.И. Рейтмана, под ред. Шапиро Г.С. изд. 2, М.: Наука, 1970.
3. П.Л. Иванов Грунты и основания гидротехнических сооружений. М., «Высшая школа», 1985.