

УПРАВЛЯЕМАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ЛЕСОНАСАЖДЕНИЙ ТВЕРСКОЙ И АРХАНГЕЛЬСКОЙ ОБЛАСТЕЙ

В статье рассматривается общая n -мерная управляемая модель, описывающая процесс развития лесонасаждений. Приводится расчет параметров трехмерной динамической системы для Тверской и Архангельской областей. Исследуется положение равновесия каждой системы и строится оптимальное управление.

1. Общая модель

В настоящее время большое внимание уделяется использованию и сохранению природных ресурсов. В статье рассматривается модель, описывающая динамику развития лесных массивов. Существует большое количество математических моделей, описывающих этот процесс. Модель может учитывать влияние внешних факторов (освещенность, влажность почв, присутствие насекомых-вредителей), факторов естественного воспроизводства, гибели, а также учитывать взаимодействие деревьев.

Математическая модель, учитывающая взаимодействие трех возрастных групп деревьев, была предложена М.Д. Корзухиным [2]. В статье рассмотрена более общая n -мерная модель развития лесонасаждений, кроме того, рассматривается n -мерная управляемая модель.

Деревья, принадлежащие разным возрастным группам, отличаются высотой, диаметром ствола, развитостью корневой системы, потребностью в свете и доступностью к нему. Обозначим через x_i – количество деревьев в i -м возрастном классе, где $i = \overline{1, n}$, n – количество классов разбиения.

$$\dot{x}_i = \sum_{k=m}^n \rho_k x_k - \gamma_i(x_1, x_{i+1}, \dots, x_n) x_i - f_i x_i + f_{i-1} x_{i-1}, \quad (1)$$

где ρ_k – коэффициенты рождения, а слагаемые $\rho_k x_k$ характеризуют скорость рождения деревьев младшего возраста, которая зависит только от численности деревьев в k -ой возрастной группе, эти слагаемые содержатся лишь в уравнениях, описывающих динамику молодых деревьев; m – номер возрастного класса, с которого дерево способно плодоносить; $\gamma_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ – функция гибели, характеризует зависимость гибели деревьев i -го класса от деревьев более старшего возраста, l – номер возрастного класса, начиная с которого деревья препятствуют развитию деревьев более младшего возраста, $l > i$; f_i – коэффициенты переходов деревьев из i -го возрастного класса в $(i+1)$ -ый класс.

Рассмотрим динамику развития лесонасаждений на заданном временном интервале $[0, T]$. Введем управление в описанную выше систему. В качестве управления будут выступать функции, характеризующие скорость вырубki и посадки деревьев. Тогда управляемая модель развития лесонасаждений будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=m}^n \rho_k x_k - \gamma_i(x_1, x_{i+1}, \dots, x_n) x_i - f_i x_i + f_{i-1} x_{i-1} - u_i \quad (2)$$

с краевыми условиями:

$$x_i(0) = X_i^0, \quad x_i(T) \geq X_i^T, \quad (3)$$

где функции управления $u_i(t)$ – характеризуют скорость вырубki деревьев i -го класса в единицу времени. Вырубka осуществляется с класса p , начиная с которого вырубленный лес является деловой древесиной и вырубается человеком. Функции управления удовлетворяют ограничениям:

$$0 \leq \sum_{i=p}^n u_i(t) \leq \alpha_i, \quad u_i(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{p, n}, \quad (4)$$

где α_i – заданное максимальное значение вырубki деревьев i -го класса, зависящее от используемых технологий; p – номер возрастного класса.

Целью управления является максимизация функционала $J(u)$, который выражает прибыль лесозаготовительного предприятия, полученную от продаж вырубленного леса за данный интервал времени:

$$J(u) = \int_0^T \sum_{i=p}^n [p_i(x_i) - c_i(x_i)] u_i dt + \sum_{i=p}^n b_i x_i(T), \quad (5)$$

где $p_i(x_i)$, $c_i(x_i)$, $i = \overline{p, n}$ – невозрастающие функции стоимости продаваемого леса и технологии добычи леса, b_i , $i = \overline{p, n}$ – потенциальная стоимость оставшегося на конечный момент времени T леса i -го возраста. Невозрастающий характер функций стоимости леса вызван особенностью рынка деревообрабатывающей промышленности и является следствием экономических законов функционирования производ-

ства. Невозрастающий же характер функций стоимости технологии добычи леса связан с увеличением затрат добычи леса, находящегося на отдаленных территориях.

Рассмотрим ситуацию, когда $n = 3$. Будем исходить из предположений, что деревья старшего возраста затрудняют развитие только подроста (деревьев 1-го возрастного класса), для описания этой зависимости выберем функцию четвертой степени $\gamma(x_3) = ax_3^4 + b$, где коэффициент b характеризует смертность подроста в отсутствие деревьев старшего возраста, а коэффициент a – степень влияния деревьев старшего возраста на смертность подроста. Подрост не является деловой древесиной. Обозначив за $x = x_1, y = x_2, z = x_3$, получим трехвозрастную управляемую модель, описываемую следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho z - \gamma(z)x - fx \\ \dot{y} &= fx - (q + d)y - u_2 \\ \dot{z} &= qy - hz - u_3 \end{aligned} \quad (6)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} x(0) &= X_0, \quad y(0) = Y_0, \quad z(0) = Z_0, \\ x(T) &\geq X_T, \quad y(T) \geq Y_T, \quad z(T) \geq Z_T. \end{aligned} \quad (7)$$

Функции управления $u_2(t), u_3(t)$ удовлетворяют ограничениям:

$$0 \leq u_2(t) + u_3(t) \leq \alpha, \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

где α – заданное максимальное значение вырубки деревьев, зависящее от используемых технологий.

Целью управления является максимизация функционала:

$$J(u) = \int_0^T \sum_{i=2}^3 [\rho_i(y, z) - c_i(y, z)] u_i dt + b_2 y(T) + b_3 z(T). \quad (9)$$

Функции $x(t), y(t), z(t)$ являются абсолютно непрерывными, а функции управления $u_2(t), u_3(t)$ – кусочно-непрерывными на отрезке $[0, T]$.

2. Обработка статистических данных по Тверской и Архангельской областям для неуправляемой динамической системы

Для проведения эксперимента на реальной модели взаимодействия природы и человека были взяты статистические данные по состоянию лесонасаждений по Тверской и Архангельской областям, предоставленные «Рослесинфорг», г. Москва. Проблемой для моделирования явился тот факт, что статистика ведется по фактическому состоянию лесосек, то есть нет разделения данных по естественному развитию леса и развитию с участием человека, которое проявляется в виде вырубок и посадок леса. Таким образом, полученная информация была непригодна для непосредственного проведения численных экспериментов и требовала предварительной обработки. Обработка данных позволила получить следующие результаты (таблица 1).

Под естественной динамикой мы будем понимать развитие лесонасаждений без вмешательства человеческого фактора. Полученные результаты дают возможность построений и оценки естественной динамики развития лесонасаждений в каждой из областей.

Для вычисления коэффициентов, характеризующих динамику развития молодняка (подроста), выбираем первое уравнение системы дифференциальных уравнений для неуправляемой модели,

$\frac{dx}{dt} = \rho z - (az^4 + b)x - fx$. Величина $\Delta t = 1$ (год). Подставляя последовательно значения x, z и $\Delta t = dt$, за три года получим линейную систему, содержащую три уравнения и три неизвестных a, b, f, ρ , решить которую можно, например, методом Крамера. Составив три такие системы (1998-2001; 2001-2003; 2002-2004), получим три набора коэффициентов a, b, f и ρ . За величины этих параметров выбираем сред-

Таблица 1. Естественная динамика лесонасаждений

возрастные группы	1998	2001	2002	2003	2004	2005
<i>Тверская обл.</i> молодняки	466,9	516,4	538,6	549,4	553,8	545,4
средневозрастные	785,9	821,0	813,7	810,1	772,3	763,2
приспевающие, спелые и перестойные	876,0	889,8	877,0	869,2	898,9	916,2
<i>Общее количество</i>	2128,8	2227,2	2229,3	2228,8	2225,0	2224,8
<i>Архангельская обл.</i> молодняки	4650,4	4505,6	4543,6	4407,4	4215,6	4135,0
средневозрастные	3352,8	3538,9	3443,0	3586,8	3800,3	3880,7
приспевающие, спелые и перестойные	12231,4	12324,6	12096,5	12128,3	12109,6	12126,4
<i>Общее количество</i>	20234,6	20369,1	20083,1	20122,5	20125,5	20142,2

нее арифметическое между найденными значениями для каждого из коэффициентов.

Со вторым и третьим уравнением системы дифференциальных уравнений, описывающих естественную динамику развития лесонасаждений, поступаем аналогичным образом и вычисляем коэффициенты $f, q+d, d$ и h .

В итоге получены значения коэффициентов системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс развития лесонасаждений Тверской и Архангельской областей, которые приведены в табл. 2.

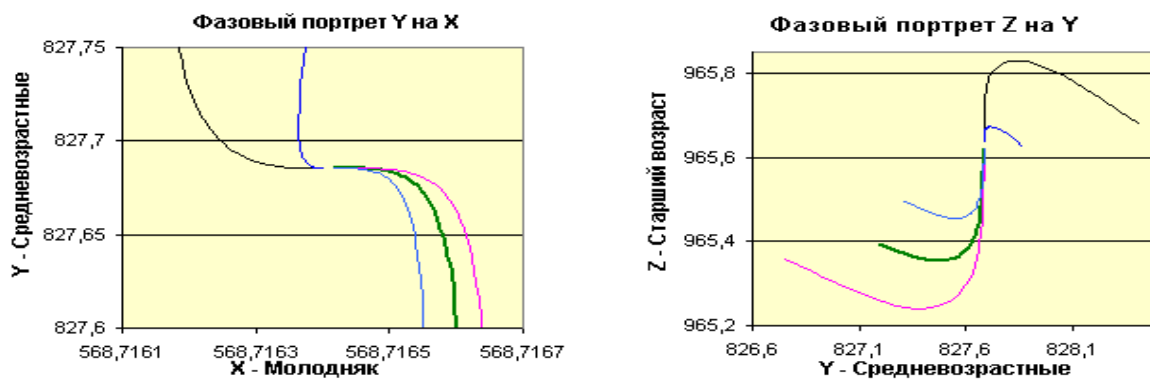
3. Поведение динамической системы в малой окрестности положения равновесия

Основную роль в описании структуры фазового пространства динамической системы играет разделение фазовых траекторий на обыкновенные и особые. К последним принадлежат особые точки, соответствующие состояниям равновесия системы или ее стационарным движениям; изолированные замкнутые траектории, называемые предельными циклами, которые соответствуют периодическим движениям; сепаратрисные кривые и поверх-

Таблица 2. Коэффициенты системы дифференциальных уравнений

коэффициенты функции гибели подроста $g(z)=az^4+b$		Коэф-нт перехода из I во II группу	Коэф-нт рождения	Коэф-нт гибели II группы	Коэф-нт перехода из II в III группу	Коэф-нт гибели III группы
a	b	f	ρ	d	q	h
Тверская обл.						
1,56E-13	0,243	0,163	0,319	0,07	0,042	0,036
Архангельская обл.						
2,21E-17	0,056	0,263	0,305	0,166	0,169	0,050

Фазовые портреты динамической системы в малой окрестности положения равновесия (Тверская область).



Фазовые портреты динамической системы в малой окрестности положения равновесия (Архангельская область).

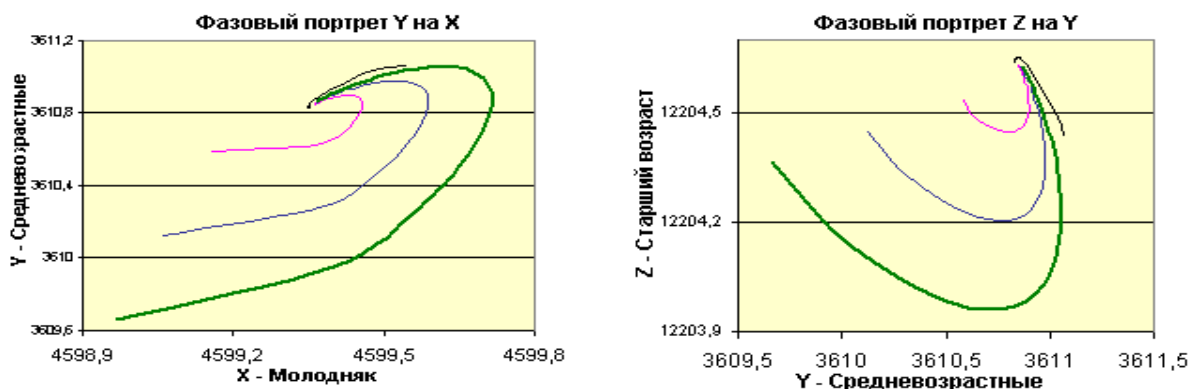


Рисунок 1

ности, которые являются границами областей притяжения к различным устойчивым особым траекториям [3].

Используем определение положения равновесия по Ляпунову. Линеаризуем нелинейную систему (6) в окрестности положения равновесия (x^*, y^*, z^*) и исследуем устойчивость положения равновесия для каждой области.

Нелинейные системы дифференциальных уравнений, характеризующих динамику развития лесонасаждений в Тверской и Архангельской областях, имеют по одной точке равновесия, приведенные в табл. 3.

Таблица 3. Положение равновесия системы для Тверской и Архангельской областей

	X	Y	Z
Тверская обл.	568,716	827,685	965,633
Архангельская обл.	4599,357	3610,838	12204,635

Для этих двух систем дифференциальных уравнений получаем следующие характеристические многочлены, вычисленные при $x = x^*$, $y = y^*$, $z = z^*$:

Тверская область

$$\lambda^3 + 0.6896354 \cdot \lambda^2 + 0.084194 \cdot \lambda + 0.006555 = 0$$

Архангельская область

$$\lambda^3 + 1.194333 \cdot \lambda^2 + 0.328343 \cdot \lambda + 0.059965 = 0$$

Оба этих многочлена имеют один действительный и два комплексных корня, причем все корни имеют отрицательные действительные части, поэтому обе системы имеют одну точку равновесия, которая является устойчивым фокусом, иллюстрация которого приведена ниже (рисунки 1).

4. Управляемая модель

Для нахождения условий существования в задаче (6)-(9) оптимального управления переформулируем поставленную задачу. Введем краевые условия $x(T) \geq X_T$, $y(T) \geq Y_T$, $z(T) \geq Z_T$ в функционал с помощью функции штрафа:

$$J(u) = - \int_0^T [(\rho_2(y) - c_2(y))u_2 + (\rho_3(z) - c_3(z))u_3] dt - b_2 y(T) - b_3 z(T) + M_x \max(0, X_T - x(T))^2 + M_y \max(0, Y_T - y(T))^2 + M_z \max(0, Z_T - z(T))^2 \quad (10)$$

Задача оптимального управления состоит в минимизации функционала (10), при ограничениях (6), (8).

Построим функцию Понтрягина и функцию переключения для задачи (6), (8), (10)

$$H(t, x, y, z, u, p(t), \lambda_0) = -\lambda_0 [(\rho_2(y) - c_2(y))u_2 + (\rho_3(z) - c_3(z))u_3] + (p_1(t), \rho z - \gamma(z)x - fx) + (p_2(t), fx - (q + d)y - u_1) + (p_3(t), qy - hz - u_2);$$

$$\dot{p}_2(t) = \rho_2(y) + c_2(y) - p_2(t),$$

$$\dot{p}_3(t) = \rho_3(z) + c_3(z) - p_3(t).$$

Функции стоимости продаваемого леса и технологии добычи леса выберем следующие:

$$\rho_2(x_2) = \rho_2, \rho_3(x_3) = \rho_3, c_2(x_2) = K_2 - \mu_2 x_2, c_3(x_3) = K_3 - \mu_3 x_3.$$

Используя принцип максимума Понтрягина [1], сформулируем теорему о необходимых условиях оптимальности в задаче (6), (8), (10).

Теорема. Пусть $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ – локально-оптимальный процесс задачи (6), (7), (10), тогда оптимальное управление определяется условиями:

1. если $\varphi_2(t) > \varphi_3(t) > 0$, тогда $\bar{u}_2 = \alpha$, $\bar{u}_3 = 0$;
2. если $\varphi_2(t) > 0$, $\varphi_3(t) < 0$, тогда $\bar{u}_2 = \alpha$, $\bar{u}_3 = 0$;
3. если $\varphi_3(t) > \varphi_2(t) > 0$, тогда $\bar{u}_2 = 0$, $\bar{u}_3 = \alpha$;
4. если $\varphi_3(t) > 0$, $\varphi_2(t) < 0$, тогда $\bar{u}_2 = 0$, $\bar{u}_3 = \alpha$;
5. если, $\varphi_2(t) < 0$, $\varphi_3(t) < 0$, тогда $\bar{u}_2 = 0$, $\bar{u}_3 = 0$;
6. если, $\varphi_2(t) = 0$, $\varphi_3(t) = 0$, тогда $\bar{u}_2 + \bar{u}_3 \in [0, \alpha]$,

где сопряженные функции $p_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{p}_1 = p_1(az^4 + b - f) - p_2 f$$

$$\dot{p}_2 = -\mu_1 u_2 + p_2(q + d) - p_3 q$$

$$\dot{p}_3 = -\mu_2 u_3 - p_1(\rho - 4az^3 x) + p_3 h$$

с граничными условиями:

$$p_1(T) = -2Mx \max(0, X_T - x(T)),$$

$$p_2(T) = -2My \max(0, Y_T - y(T)) + b_1,$$

$$p_3(T) = -2Mz \max(0, Z_T - z(T)) + b_2.$$

Если $\varphi_2(t) = \varphi_3(t)$ на некотором интервале $(\tau_1, \tau_2) \in [0, T]$, то на этом интервале реализуется особое оптимальное управление для $u_2(t)$ и $u_3(t)$.

5. Численная реализация

Для решения задачи оптимального управления (6), (8), (10) использовался метод проекции градиента. В качестве начальных условий задачи были выбраны координаты, близкие к положению равновесия нелинейной динамической системы (6), описывающей динамику развития лесонасаждений Тверской области. Зада-

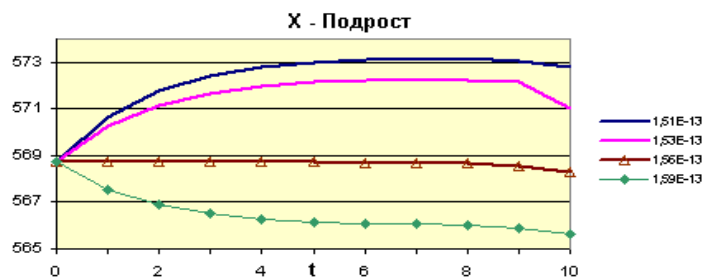


Рисунок 2. График функций X(t)

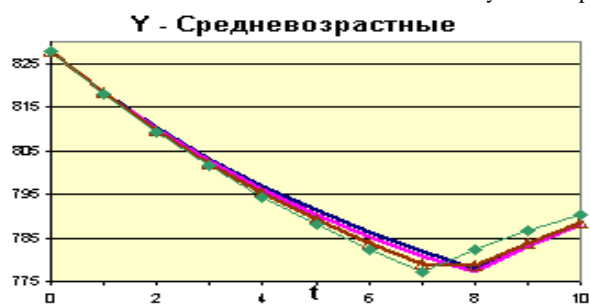


Рисунок 3. График функций Y(t)

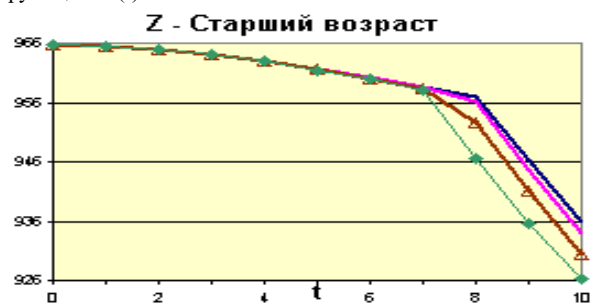


Рисунок 4. График функций Z(t)

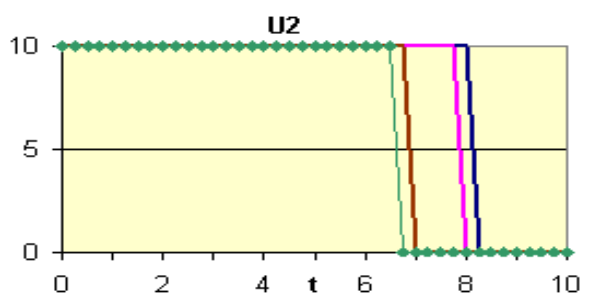


Рисунок 5. График функций U2(t)

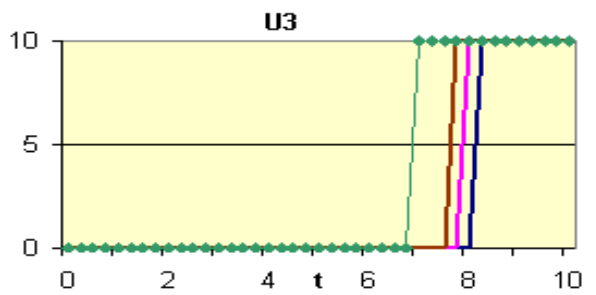


Рисунок 6. График функций U3(t)

ча решена для параметров, характеризующих динамику лесонасаждений. Рассматривался временной промежуток 10 лет.

Решения задачи в зависимости от величины параметра a представлены на рис. 2-6. Коэффициент a входит в функцию гибели $\gamma(z) = az^4 + b$ системы дифференциальных уравнений (6) и характеризует степень влияния деревьев старшего возраста на гибель подростка.

Таким образом, при увеличении коэффициента a численность деревьев в каждой возрастной группе уменьшается, при этом вырубку деревьев следует прекращать раньше. Изменение параметра a в функции гибели подростка в диапазоне от $1,51 \cdot 10^{-13}$ до $1,591 \cdot 10^{-13}$ приводит к смещению точки переключения управления в меньшую сторону. Полученный практический результат совпадает с теорией.

Список использованной литературы:

1. Андреева Е.А. Оптимальное управление динамическими системами. Тверь: ТьГУ, 1999.
2. Корзухин М.Д. Возрастная динамика популяции деревьев, являющихся сильными эдификаторами // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Т.3. М., 1980. С. 162-178.
3. Буетин Н.В. Введение в теорию нелинейных колебаний. М., 1976.

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-1737.2003.1)