Муллабаев А.А., Фот А.П., Павлов С.И.
Оренбургский государственный университет

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Использование математических моделей существенно упрощает процесс оптимизации параметров сложных технических объектов (например, коробок скоростей и подач станков, энергетических систем и др.). В работе предлагается решение одной из важных задач машиностроения – оптимизации параметров наборов концевых мер.

Для настройки стрелочных и других измерительных приборов широко используются наборы концевых мер, которые могут быть специальными и универсальными. В первых число составленных размеров равно числу мер в наборе, в связи с чем такие наборы имеют ограниченное применение. Более распространены универсальные наборы, где каждый составленный размер получается из притертых друг к другу нескольких концевых мер в различных сочетаниях из имеющихся в наборе. При этом число мер в наборе из экономических соображений должно быть как можно меньше.

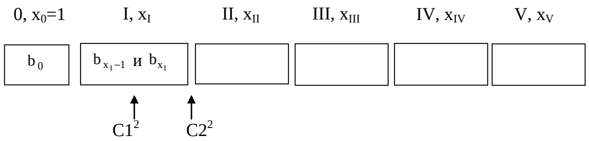
Прямая задача минимизации общего числа мер в наборе при заданном количестве составленных размеров поставлена давно, но до настоящего времени аналитически не решается (решается лишь трудоемким методом проб и ошибок).

На первом этапе нами решена обратная задача (решение ее ложится в основу решения прямой задачи) – максимизация количества составленных размеров при заданном произвольно числе концевых мер в наборе. Эта задача может быть отнесена к задачам нелинейного программирования, в которых область допустимых значений аргумента представляет многомерный невыпуклый многогранник, а целевая функция линейна [1]. В нашем случае ограничение – ряд составленных размеров должен удовлетворять требованию условия плотности – накладывается на аргумент не непосредственно, а через оператор перевода ряда значений аргумента в ряд составленных размеров.

Стандартные отечественные и зарубежные наборы концевых мер весьма далеки от оптимальных, что подтверждается расчетами по предлагаемому нами способу оптимизации, который представляется нам перспективным и предлагается для профессиональной оценки специалистами.

Предположим, что имеется несколько групп элементов «b_i» некоторой числовой последовательности, причем можно, используя любые элементы из этих групп, составлять элементы «a_i» некоторой другой последовательности чисел. Примем определенный порядок получения «a_i» из «b_i», а именно, что «a_i» получаются с использованием только «b_i», находящихся левее условных ограничителей – стрелок, устанавливаемых между элементами «b_i» имеющейся последовательности, причем «a_i» – элемент формируемой последовательности, устанавливаемый над стрелкой. Максимальное количество стрелок для получения «a_i» из «b_i» равно числу групп элементов минус единица (для ниже приведенных примеров максимальное число стрелок равно пяти), причем стрелки имеют номера и стрелка с предыдущим номером никогда не может занять положение правее стрелки с последующим номером либо совместиться с другой стрелкой (если стрелок две и более). Это исходные положения предлагаемого авторами метода формирования оптимальных числовых последовательностей – метода «стрелок».

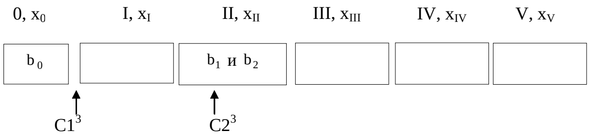
Нижеприведенные схемы иллюстрируют способ получения значений так называемых составленных размеров «N_i» (1), которые определяются значениями членов в наборах «x_i» из членов различных групп, причем в группах значения первых членов групп «b_{1-x_i}» возрастают, начиная от первой группы до последней. Вторые члены (3) в каждой группе больше первого члена на определенную величину, все последующие члены в группе равны друг другу и равны второму члену. Исключение составляют члены двух групп – нулевой и первой. В нулевой группе находится только один член $b_0(x_0 = 1)$, а в первой группе все члены равны друг другу и равны условной единице $(b_{1-I} = ...b_{x_1-I} = 1)$, абсолютное значение которой равно «δ» – минимальной разности значений составляемых размеров «N_i». Размер «δ» принимается как исходный для определения значений членов во всех группах в относительных единицах (по условию плотности $\Delta_i \le 1$, см. ниже). На схемах обозначены стрелки C_1, C_2 и так далее с верхними индексами 2, 3 и так далее получаемых составленных размеров.



$$N_{c_1}^2 = b_0 + x_I - 1$$

$$N_{c_2}^2 = b_0 + x_I \tag{1}$$

$$N_{c_1c_2}^2 = N_{c_1}^2 + N_{c_2}^2 = 2b_0 + 2x_I - 1$$



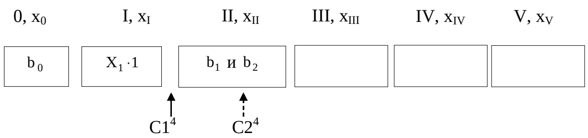
$$N_{c_1}^3 = b_0$$

$$N_{c_2}^3 = b_0 + x_I + b_{1-II}$$

$$N_{c_1c_2}^3 = N_{c_1}^3 + N_{c_2}^3 = b_0 + b_0 + x_I + b_{1-II} = 2b_0 + x_I + b_{1-II}$$

Условие плотности: $\Delta_3 \le 1$ (2)

$$\Delta_3 = N_{c_1c_2}^3 - N_{c_1c_2}^2 = 2b_0 + x_I + b_{1-II} - 2b_0 - 2x_I + \\ +1 \le 1 \rightarrow b_{1-II} \le x_I \tag{3}$$

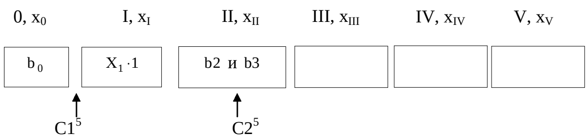


$$N_{c_1}^4 = b_0 + x_I$$

$$N_{c_2}^4 = N_{c_1}^4 + b_{1II} = b_0 + x_I + b_{1-II}$$

$$N_{c_1c_2}^4 = N_{c_1}^4 + N_{c_2}^4 = b_0 + x_I + b_0 + x_I + b_{1-II} =$$

$$= 2b_0 + 2x_I + b_{1-II} = 2b_0 + 3x_I$$



$$N_{c_1}^5 = b_0$$

$$N_{c_2}^5 = N_{c_1}^4 + b_{1-II} + b_{2-II} = b_0 + x_I + b_{1-II} + b_{2-II} =$$

$$= b_0 + 2x_I + b_{2-II}$$

$$N_{c_1c_2}^5 = N_{c_1}^5 + N_{c_2}^5 = b_0 + b_0 + 2x_I + b_{2-II} =$$

$$= 2b_0 + 2x_I + b_{2-II}$$

Условие плотности: $\Delta_5 \le 1$

$$\Delta_5 = N_{c_1c_2}^5 - N_{c_1c_2}^4 = 2b_0 + 2x_I + b_{2-II} - 2b_0 - 3x_I \le$$

$$\le 1 \rightarrow b_{2-II} \le x_I + 1$$

Можно, перемещая стрелки, по условию плотности (2) доказать, что все остальные члены группы $b_{3-II} = b_{4-II} = b_{5-II} = ... = b_{x-II} = = b_{2-II} = x_I + 1$, и, далее, что последующие члены группы III равны друг другу и равны b_{2-III}:

$$b_{3-III} = b_{4-III} = b_{5-III} = b_{6-III} = ... = b_{xIII-III} =$$

$$= b_{2-III} = b_{1-III} + b_{x-II} = 2x_I + x_{II} + x_I x_{II} - 1$$

Число «Z» составленных размеров (максимальное) некоторого набора концевых мер определяется значениями трех величин:

– размер «δ»;

– минимальный составленный размер «N_{min}»;

– максимальный составленный размер «N_{max}».

$$Z = \left[\frac{(N_{max} - N_{min})}{\delta}\right] + 1 \tag{4}$$

Применительно к задаче о концевых мерах размер «b_i» определяется разностью между относительными размерами «a_i» и «a_{i-1}» соседних концевых мер, причем «a_i» и «a_{i-1}» задаются через абсолютные размеры «A_i» и «A_{i-1}» концевых мер по исходному параметру «δ»:

$$b_i = a_i - a_{i-1}, \tag{5}$$

где: $a_i = \frac{A_i}{\delta}$ и $a_{i-1} = \frac{A_{i-1}}{\delta}$ (здесь i – номер меры, i = 1, 2, 3,….q, q – общее число концевых мер).

Размер «b_i» может определяться через абсолютные размеры «A_i» концевых мер

$$b_i = \frac{(A_i - A_{i-1})}{\delta}. \tag{6}$$

Следует учитывать, что в предлагаемой методике для получения оптимальной последовательности чисел «b_i» предусматривается $n+1$ групп (одна нулевая), где n – максимальное число элементов, используемых для получения составленных размеров. Нулевая группа является хранилищем условного минимального размера концевой меры, определяемого технологическими возможностями изготовления собственно концевой меры (как правило, не менее 0,5 мм).

В результате предварительного анализа было установлено, что для решения часто встречающихся задач оптимизации вполне достаточно значение «n» принять равным не более пяти (увеличение «n» ведет к снижению точности составленных размеров). Обозначим группы римскими цифрами I, II, III, IV и V, а неизвестное количество размеров в группах соответственно $X_I, X_{II}, X_{III}, X_{IV}$ и X_V. Количество элементов X_0 в нулевой группе (как было отмечено ранее) равно 1. Каждый член группы имеет индекс, включающий номер члена в группе и (через тире) номер самой группы. Например, первый член пятой группы «b_{1-V}», а последний член пятой группы «b_{x_V-V}» (b_{x_V-V} – член с не известным нам номером, равным количеству членов в пятой группе).

Стратегическая задача данного исследования состоит в минимизации общего числа «q» элементов (концевых мер) во всех $(n+1)$ группах при обеспечении значений ряда «N_i» составленных размеров в виде арифметической прогрессии с разностью «δ» без выпадения членов в пределах интервала $(N_{min}....N_{max})$. Но для решения этой задачи необходимо вначале получить оптимальные значения членов «b_i» числовой последовательности, то есть найти общие зависимости для определения значений этих членов через значения чисел $X_I, X_{II}, X_{III}, X_{IV}$ и X_V групп членов с учетом значения члена «b_0» нулевой группы.

При этом должно выполняться условие равенства общего числа «q» концевых мер сумме числа концевых мер во всех группах (включая нулевую группу):

$$X_0 + X_I + X_{II} + X_{III} + X_{IV} + X_V = q. \qquad (7)$$

Вышеприведенные схемы для нахождения значений составленных размеров при условии сохранения разности «δ» позволили выявить, что минимальное значение составленного размера следует принимать $N_{min} = N^2_{c_1c_2} = 2b_0 + 1$ (в относительных единицах). Кроме того, выявлены определенные закономерности расчета значений чисел «b_i» отдельных групп (II, III, IV и V). Поясняются эти закономерности данными нижеприведенной табл. 1.

Для членов групп, начиная со второй, значения размеров второго и последующих членов групп одинаковы и равны сумме значений размера первого элемента данной группы и размера второго члена предыдущей группы.

Более сложен вопрос определения значения размера первого элемента в группах II, III, IV и V, так как эти значения могут быть получены только процедурой перемещения стрелок (как было показано выше).

Напомним, что положение стрелки всегда определяется с учетом ее индекса (стрелки располагаются под группами слева направо по возрастанию индекса стрелки, причем две стрелки не могут стоять в одной позиции – предыдущая стрелка не может «догнать» следующую стрелку).

Следует заметить, что X_i в зависимостях (1), (3) и других при определении значений «b_i» означают не просто количество членов групп, а являются произведением этого количества на условную единицу (что и позволяют считать их некоторым условным размером).

Из полученных выше зависимостей можно сделать вывод о том, что размер первого члена любой группы определяется с учетом размеров членов только предыдущих групп (согласно принципу, что «a_i» получаются с использованием только «b_i», находящихся левее условных ограничителей – стрелок).

На основе анализа полученных ранее зависимостей разработана схема для нахождения первых членов групп как некоторой разности двух величин – уменьшаемого (У) и вычитаемого (В) в условии плотности $\Delta_I = У - В \le 1$ (2).

Схема нахождения составляющих уравнения плотности для расчета значений первых членов групп элементов

– уменьшаемое «У» (составленный размер определяется крайним левым положением всех стрелок (первая левее группы I, следующие по порядку с интервалом в один член этой группы),

Таблица 1.

№ гр.	Первый член группы	Второй член группы	Последующие члены группы
0	b_{1-0}	$b_{2-0} = 0$	$b_{3-0} = ... = b_{x0-0} = 0$
I	b_{1-I}	$b_{2-I} \le b_{1-I} = 1$	$b_{3-I} = ... = b_{xI-I} = b_{1-I} = 1$
II	b_{1-II}	$b_{2-II} \le b_{1-II} + b_{xI-I}$	$b_{3-II} = ... = b_{xII-II} = b_{1-II} + b_{xI-I}$
III	b_{1-III}	$b_{2-III} \le b_{1-III} + b_{xII-II}$	$b_{3-III} = ... = b_{xIII-III} = b_{1-III} + b_{xII-II}$
IV	b_{1-IV}	$b_{2-IV} \le b_{1-IV} + b_{xIII-III}$	$b_{3-IV} = ... = b_{xIV-IV} = b_{I-IV} + b_{xIII-III}$
V	b_{1-V}	$b_{2-V} \le b_{1-V} + b_{xIV-IV}$	$b_{3-V} = ... = b_{xV-V} = b_{1-V} + b_{xIV-IV} = b_{1-V} + b_{1-IV} + b_{1-III} + b_{1-II} + b_{1-I}$

кроме стрелки с максимальным индексом, которая ставится в группу с номером, равным индексу стрелки, между первым и вторым членами этой группы). Такое положение стрелок соответствует минимальному значению составленного размера с использованием первого члена группы, вовлекаемой в процесс получения размера (при минимально возможном числе используемых концевых мер из имеющихся групп);

– вычитаемое «В» (составленный размер определяется крайним правым положением стрелок (правее групп с номерами, равными индексам стрелок), кроме двух стрелок – последней (она ставится левее группы с номером, равным индексу стрелки) и предпоследней (которая ставится между предпоследним и последним членами группы с номером, равным индексу стрелки). Такое положение стрелок соответствует максимально возможному значению составленного размера из членов групп, предшествующих вновь вводимой в процесс получения размера группе (при максимально возможном числе используемых концевых мер). При этом обеспечивается достаточно большое значение первого члена этой группы, что позволяет увеличить диапазон составленных размеров при меньшем числе концевых мер.

Используя предложенную схему, авторы получили общую формулу (8) первого члена N-ой*[1] группы (начиная с первого члена второй группы):

$$b_{1-N}=(N-1)\cdot b_{1-I}+(N-2)\cdot b_{1-II}+(N-3)\cdot b_{1-III}+$$
$$+(N-4)\cdot b_{1-IV}+(N-5)\cdot b_{1-V}+....+[N-(N-1)]\cdot b_{[1-(N-1)]}+$$
$$+\sum_{N=2}^{N}\left\{\begin{aligned}&(N-1)\cdot b_{1-I}\cdot(x_I-1)+(N-2)\cdot(b_{1-II}+b_{1-I})\cdot\\&\cdot(x_{II}-1)+(N-3)\cdot(b_{1-III}+b_{1-II}+b_{1-I})\cdot\\&\cdot(x_{III}-1)+...+[N(N-2)]\cdot(b_{1-(N-2)}+b_{1-(N-3)}+\\&+b_{1-(N-4)}+...+b_{1-I})\cdot(x_{(N-2)}-1)\end{aligned}\right\}+ \qquad (8)$$
$$+[N-(N-1)]\cdot(b_{[1-(N-1)]}+b_{[1-(N-2)]}+b_{[1-(N-3)]}+$$
$$+b_{[1-(N-4)]}+b_{[1-(N-5)]}+...+b_{\{1-[N-(N-1)]\}}\cdot(x_{N-1})-2)-$$
$$-b_{1-I}\cdot\{(N-2)+(N-3)+(N-4)+(N-5)+...+[N-(N-1)]\}+1$$

Таким образом, получены зависимости для нахождения любого члена каждой группы элементов (зависимости (8) и зависимости табл. 1).

Напомним, что стратегическая задача данного исследования состоит в минимизации общего числа «q» элементов (концевых мер) во всех (n + 1) группах при обеспечении значений ряда «N_i» составленных размеров в виде арифметической прогрессии с разностью «δ» без выпадения членов в пределах интервала $(N_{min}...N_{max})$.

Имея в общем виде значения «b_i» как функций значений чисел элементов в группах $X_I, X_{II}, X_{III}, X_{IV}$ и X_V (с учетом значения члена «b_0» нулевой группы), можно записать выражение для целевой функции U как разность значений максимального «N_{max}» и минимального «N_{min}» составленных размеров, причем достижение наибольшего значения U при заданном значении «q» является решением оптимизационной задачи, поскольку определит согласно (4) максимальное число составленных размеров Z при заданном «q»:

$$U = N_{max} - N_{min} \rightarrow \text{максимум} \qquad (9)$$

Минимальное значение составленного размера $N_{min}=2b_0+1$ (см. выше).

Максимальное значение составленного размера «N_{max}» определяется соответствующим положением стрелок 1...5 (см. схему выше). В нашем случае, используя схемы размещения стрелок и выражение (7), получим:

$$\begin{aligned}N_{max}&=5b_0+5x_I+4b_{1-II}+3b_{1-III}+2b_{1-IV}+b_{1-V}+\\&+4b_{2-II}(x_{II}-1)+3b_{2-III}(x_{III}-1)+2b_{2-IV}(x_{IV}-1)+\\&+b_{2-V}(q-x_1-x_{II}-x_{III}-x_{IV}-2)\end{aligned} \qquad (10)$$

Используя данные табл. 1 (выражения b_i через x_i), получим далее:

$$N_{max}=5b_0-4x_I+2x_{II}-4x_{III}-15x_{IV}+2x_Ix_{II}+$$
$$+8x_Ix_{III}+6x_Ix_{IV}+4x_{II}x_{III}+6x_{II}x_{IV}-3x_{III}x_{IV}+$$
$$+4x_Ix_{II}x_{III}+6x_Ix_{II}x_{IV}+6x_Ix_{III}x_{IV}+3x_{II}x_{III}x_{IV}+$$
$$+3x_Ix_{II}x_{III}x_{IV}-9+$$
$$+\begin{pmatrix}2x_{II}-2x_{III}-5x_{IV}+2x_Ix_{II}+4x_Ix_{III}+2x_Ix_{IV}+\\+2x_{II}x_{III}+2x_{II}x_{IV}-x_{III}x_{IV}+2x_Ix_{II}x_{III}+2x_Ix_{II}x_{IV}+\\+2x_Ix_{III}x_{IV}+x_{II}x_{III}x_{IV}+x_Ix_{II}x_{III}x_{IV}-9\end{pmatrix}\cdot$$
$$\cdot(q-x_I-x_{II}-x_{III}-x_{IV}-2) \qquad (11)$$

Подставив выражения для N_{max} и N_{min} в формулу (9), получим выражение для целевой функции U:

$$U=3b_0-4x_I+2x_{II}-4x_{III}-15x_{IV}+2x_Ix_{II}+8x_Ix_{III}+$$
$$+6x_Ix_{IV}+4x_{II}x_{III}+6x_{II}x_{IV}-3x_{III}x_{IV}+$$
$$+4x_Ix_{II}x_{III}+6x_Ix_{II}x_{IV}+6x_Ix_{III}x_{IV}+3x_{II}x_{III}x_{IV}+$$
$$3x_Ix_{II}x_{III}x_{IV}-10+$$

[1]) Необходимо учитывать, что в формулу (8) для конкретного значения N должны входить лишь члены, в которых выражение (N-K) является натуральным числом (в формулу включают элементы только из предшествующих «K» групп, за исключением нулевой группы, то есть, b_0 ; здесь: K – номер группы, члены которой используются в формуле для определения первого члена N-ой группы, K =1, 2, 3, ...(N-1)).

$$
+\begin{pmatrix} 2x_{II}-2x_{III}-5x_{IV}+2x_{I}x_{II}+4x_{I}x_{III}+2x_{I}x_{IV}+ \\ +2x_{II}x_{III}+2x_{II}x_{IV}-x_{III}x_{IV}++2x_{I}x_{II}x_{III}+ \\ +2x_{I}x_{II}x_{IV}+2x_{I}x_{III}x_{IV}+x_{II}x_{III}x_{IV}+x_{I}x_{II}x_{III}x_{IV}-9 \end{pmatrix}\cdot
\cdot\left(q-x_{I}-x_{II}-x_{III}-x_{IV}-2\right) \qquad (12)
$$

Таким образом (при фиксированном значении количества концевых мер «q» в наборе) U является фактически функцией переменных X_{I}, X_{II}, X_{III} и X_{IV}.

Напомним, что функция U=U(q, x_I, x_{II}, x_{II}, x_{III}, x_{IV}) является функцией целочисленных аргументов (общее число концевых мер «q» и количество концевых мер «x_i» в группах не могут быть дробными), причем число значений целочисленных аргументов и их сочетаний весьма велико. Поэтому вначале необходимо исследовать U как функцию непрерывного аргумента для определения ее экстремального значения в некоторой точке «α». Заметим, что функция U является выпуклой, то есть эквипотенциальные поверхности незначительно отличаются от (n-1)-мерных сфер. Поэтому после нахождения «α» достаточно вычислить значения U в $2^{(n-1)}$ целочисленных вершинах единичного (n-1)-мерного куба, содержащего «α», причем наибольшее из полученных значений U будет соответствовать оптимальным значениям переменных $X_{I}, X_{II}, X_{III}, X_{IV}$ и X_{V} (последняя опосредованно через «q»).

Известно, что экстремальные значения функции могут быть получены с использованием частных производных функции по соответствующим переменным (в нашем случае таких производных будет четыре x_{I}, x_{II}, x_{III} – и x_{IV}):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x_{I}}=-4+10x_{III}+11x_{IV}-2x_{I}x_{II}-4x_{I}x_{III}- \\
&-2x_{I}x_{IV}+2x_{II}x_{III}+4x_{II}x_{IV}+7x_{III}x_{IV}-2x_{I}x_{II}x_{III}- \\
&-2x_{I}x_{II}x_{IV}-2x_{I}x_{III}x_{IV}+2x_{II}x_{III}x_{IV}-x_{I}x_{II}x_{III}x_{IV}+9+ \qquad (13)\\
&+\left(2x_{II}+4x_{III}+2x_{IV}+2x_{II}x_{III}+2x_{II}x_{IV}+2x_{III}x_{IV}+\right. \\
&\left.+x_{II}x_{III}x_{IV}\right)\cdot\left(q-x_{I}-x_{II}-x_{III}-x_{IV}-2\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x_{II}}=2+2x_{I}-2x_{II}+6x_{III}+11x_{IV}-2x_{I}x_{II}+4x_{I}x_{IV}- \\
&-2x_{II}x_{III}-2x_{II}x_{IV}+4x_{III}x_{IV}-2x_{I}x_{II}x_{III}-2x_{I}x_{II}x_{IV}+ \\
&+x_{I}x_{III}x_{IV}-x_{II}x_{III}x_{IV}-x_{I}x_{II}x_{III}x_{IV}+9+\left(2+2x_{I}+\right. \qquad (14)\\
&\left.+2x_{III}+2x_{IV}+2x_{I}x_{III}+2x_{I}x_{IV}+x_{III}x_{IV}+x_{I}x_{III}x_{IV}\right)\times \\
&\times\left(q-x_{I}-x_{II}-x_{III}-x_{IV}-2\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x_{III}}=-4+8x_{I}-2x_{II}+2x_{III}+2x_{IV}+2x_{I}x_{II}- \\
&-4x_{I}x_{III}+4x_{I}x_{VI}-2x_{II}x_{III}+x_{II}x_{IV}+x_{III}x_{IV}- \\
&-2x_{I}x_{II}x_{III}+x_{I}x_{II}x_{IV}-2x_{I}x_{III}x_{IV}-x_{II}x_{III}x_{IV}- \\
&-x_{I}x_{II}x_{III}x_{IV}+9+\left(-2+4x_{I}+2x_{II}-x_{IV}+\right. \qquad (15)\\
&\left.+2x_{I}x_{II}+2x_{I}x_{IV}+x_{II}x_{IV}+x_{I}x_{II}x_{IV}\right)\cdot \\
&\cdot\left(q-x_{I}-x_{II}-x_{III}-x_{IV}-2\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x_{IV}}=-15+6x_{I}+4x_{II}-x_{III}+5x_{IV}+4x_{I}x_{II}+ \\
&+2x_{I}x_{III}-2x_{I}x_{VI}+x_{II}x_{III}-2x_{II}x_{IV}+x_{III}x_{IV}+ \\
&+x_{I}x_{II}x_{III}-2x_{I}x_{II}x_{IV}-2x_{I}x_{III}x_{IV}-x_{II}x_{III}x_{IV}- \\
&-x_{I}x_{II}x_{III}x_{IV}+9+\left(-5+2x_{I}+2x_{II}-x_{III}+\right. \qquad (16)\\
&\left.+2x_{I}x_{II}+2x_{I}x_{III}+x_{II}x_{III}+x_{I}x_{II}x_{IV}\right)\cdot \\
&\cdot\left(q-x_{I}-x_{II}-x_{III}-x_{IV}-2\right)=0
\end{aligned}
$$

Для поиска значений переменных «x_i» предлагается использовать так называемый метод «половинного шага», часто используемый для исследования функций одной переменной и адаптированный автором Муллабаевым А.А. к исследованию функции нескольких переменных [1]. Метод «половинного шага» отчасти напоминает метод «скорейшего спуска», но в нашем случае позволяет существенно уменьшить объем вычислительных операций.

Далее предложенный метод описывается последовательностью действий с использованием получаемых зависимостей в общем виде, а затем на конкретном примере решения одной из задач оптимизации набора концевых мер.

Последовательность действий по нахождению значений переменных «x_i»:

1) Назначаем некоторое «нулевое» приближение x_{i0} значений «x_i»

$$\bar{x}_0...(x_{I0}, x_{II0}, x_{III0}, x_{iV0});$$

2) Определяем градиент $\overline{Grad \cdot U_0}$ целевой функции при «нулевом» приближении по формуле (17):

$$
\overline{Grad\cdot U_0}=\left(\frac{\partial U}{\partial x_{I}}\right)_0\cdot\bar{i}+\left(\frac{\partial U}{\partial x_{II}}\right)_0\cdot\bar{j}+
+\left(\frac{\partial U}{\partial x_{III}}\right)_0\cdot\bar{k}+\left(\frac{\partial U}{\partial x_{IV}}\right)_0\cdot\bar{1} \qquad (17)
$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и $\bar{1}$ – единичные векторы многомерного пространства;

3) Определяем абсолютное значение (модуль) градиента «нулевого» приближе-ния по формуле (18):

$$\left|\mathrm{Grad}\,U_0\right| = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x_I}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_{II}}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_{III}}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_{IV}}\right)_0^2\right]^{0,5} \quad (18)$$

4) Назначаем шаг λ_0 изменения аргумента (ориентируясь на абсолютное значение градиента – для малых значений градиента использовать малые значения λ_0, ориентировочно 0,05% значения градиента);

5) Вычисляем значение аргумента $\bar{x}(\lambda_1)$ первого приближения по формуле (19):

$$\bar{x}(\lambda_1) = \bar{x}(\lambda_0) \pm \left(\lambda_0 \cdot \overline{\mathrm{Grad}} \cdot U_0\right) / \left(\left|\mathrm{Grad} \cdot U_0\right|\right) \quad (19)$$

При исследовании функции (13) на максимум в формуле между слагаемыми ставят знак «+», а при исследовании на минимум – знак «–».

6) Определяем координаты вектора $\bar{x}_{i1}$ из формулы (19):

$$\begin{aligned} x_{I1} &= x_{I0} + \lambda_0\left[\frac{(\partial U/\partial x_1)_0}{(|\mathrm{Grad} \cdot U_0|)}\right] \\ x_{II1} &= x_{II0} + \lambda_0\left[\frac{(\partial U/\partial x_{II})_0}{(|\mathrm{Grad} \cdot U_0|)}\right] \\ x_{III1} &= x_{III0} + \lambda_0\left[\frac{(\partial U/\partial x_{III})_0}{(|\mathrm{Grad} \cdot U_0|)}\right] \\ x_{IV1} &= x_{IV0} + \lambda_0\left[\frac{(\partial U/\partial x_{IV})_0}{(|\mathrm{Grad} \cdot U_0|)}\right] \end{aligned} \quad (20)$$

7) Определяем значение градиента $\mathrm{Grand}\ U_1$ целевой функции первого приближения по формуле (17), заменив индексы 0 на 1:

$$\overline{\mathrm{Grad} \cdot U_1} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_I}\right)_1 \cdot \bar{i} + \left(\frac{\partial U}{\partial x_{II}}\right)_1 \cdot \bar{j} + \left(\frac{\partial U}{\partial x_{III}}\right)_1 \cdot \bar{k} + \left(\frac{\partial U}{\partial x_{IV}}\right)_1 \cdot \bar{1}$$

8) Определяем скалярное произведение «А» двух полученных градиентов по формуле (21) в общем виде и через частные производные (22):

$$A = \overline{\mathrm{Grad}} \cdot \overline{U_0} \cdot \overline{\mathrm{Grad}} \cdot \overline{U_1} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} A = {} & \left(\frac{\partial U}{\partial x_I}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x_I}\right)_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_{II}}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x_{II}}\right)_1 + \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial x_{III}}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x_{III}}\right)_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_{IV}}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x_{IV}}\right)_1 \end{aligned} \quad (22)$$

9) Если скалярное произведение «А» получается положительным, то это означает, угол между двумя градиентами в четырехмерном пространстве меньше 90 градусов, то есть выбранное направление изменения градиента соответствует приближению к искомому решению – максимуму целевой функции в экстремальной точке $\alpha(x_I, x_{II}, x_{III}, x_{IV})$. Дальнейший поиск можно продолжить с сохранением шага изменения аргумента $(\lambda_1 = \lambda_0)$.

В случае, если значение «А» получается отрицательным, то это означает, что мы «проскочили» либо можем «проскочить» искомое решение, так как угол между градиентами в этом случае больше 90 градусов (удаляемся от экстремальной точки). Шаг изменения аргумента следует уменьшить, приняв $\lambda_1 = 0{,}5\lambda_0$ («половинный шаг») для обеспечения сходимости процесса, и продолжить расчет.

Процесс счета можно прекратить либо когда новое значение шага «λ_i» станет меньше наперед заданной величины «ε», либо когда результаты последнего и предпоследнего расчетов позволяют произвести одинаковые округления получаемых значений x_i до целых значений.

Если указанные условия выполняются, то найденное решение является достаточно близким к оптимальному, и расчет завершается. Если условия не выполняются, то расчет производится вновь, начиная с пятого пункта вышеприведенной последовательности.

Целесообразность использования в нашем случае метода «половинного шага» заключается в следующем.

В известном методе «скорейшего спуска» после расчета градиента целевой функции при «нулевом» приближении необходимо определять значение функции одной переменной $U = U(\lambda_0)$ и исследовать эту функцию на экстремум, что, в свою очередь, осуществимо исключительно численными методами и весьма трудоемко.

В методе же «половинного шага» отпадают равно как необходимость отыскания указанной функции, так и ее исследование на экстремум.

Суть произведенной адаптации метода «половинного шага» для исследования функции неограниченного числа переменных заключается в том, что автором предлагается новый прием – вычисление скалярного произведения «А» двух соседних градиентов и принятие решения о дальнейших действиях с учетом значения этого произведения. В итоге значительно упрощается программа расчета и сокращаются объемы вычислений.

Подтверждением эффективности предлагаемого способа поиска оптимальных решений многомерных задач оптимизации с использованием метода «стрелок» и метода «половинного шага» являются результаты расчета конкретного примера – определения параметров набора концевых мер, задаваемых в настоящее время универсальными наборами по ГОСТ 9038-90.

Примем, что число «q» мер в наборе равно 43, используемое для получения составленного размера максимальное число «n» мер равно 5 (наиболее часто в ГОСТ 9038-90), требуемое значение разности соседних составленных размеров равно δ = 0, 005 мм, размер наименьшей концевой меры $A_0 = 0{,}5$ мм (наиболее часто в наборах ГОСТ 9038-90, поскольку меньшие размеры сложно получать по технологическим причинам).

Необходимо определить оптимальные значения размеров концевых мер, обеспечивающих получение максимального числа составленных размеров без пробелов в ряду (ряд в виде арифметической прогрессии).

Расчет ведется в относительных размерах, причем размер меры в «нулевой» группе $b_0 = A_0/\delta = 0{,}5/0{,}005 = 100$ условных единиц. Для первой группы разность b_I между размерами соседних концевых мер равна условной единице.

Примем для «нулевого» приближения, что в группах I… IV общее количество концевых мер распределено примерно поровну, а именно:

$$\bar{x}\cdot(\lambda_0)..(9{,}9{,}9{,}9)$$

Из 43 мер одна размещается в «нулевой» группе, а 6 мер – в пятой.

Учитывая опыт предыдущих расчетов, принимаем значение шага $\lambda_0 = 2$, а значение $\varepsilon = 0{,}25$. В таблице 2 приведены результаты расчета.

Заметим, что дробные числа «x_i» в строках 3 и 4 таблицы 2 допускают одинаковое округление до целых чисел (x_I от 9 до 10, а x_{II}, x_{III} и x_{IV} – от 8 до 9.

Таким образом, искомое решение (экстремальная точка) определяется в данном случае, как:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\ (9{,}28;\ 8{,}38;\ 8{,}28;\ 8{,}29)$$

Принятие другого нулевого приближения, близкого к x (λ_0)(9, 9, 9, 9), приводит к тому же ответу α. Следовательно, можно сделать вывод о том, что α является точкой максимума U. Поведение функции U в других областях аргумента представляет лишь теоретический интерес и нами не рассматривалось.

В таблице 3 представлены результаты расчета значений целевой функции в целочисленных $2^{(n-1)} = 2^{(5-1)} = 16$ вершинах четырехмерного куба. Максимальное значение функции U = 100959 соответствует вершине с координатами

$$\bar{x}\cdot(\lambda_{min})..(9{,}9{,}8{,}8)$$

Таблица 2.

№№ п.п.	Координаты приближения X				Градиент Grad U				Знак скалярного произведения A	Значение шага λ_i
	x_I	x_{II_I}	x_{III}	x_{IV}	$\frac{\partial U}{\partial x_I}$	$\frac{\partial U}{\partial x_{II}}$	$\frac{\partial U}{\partial x_{III}}$	$\frac{\partial U}{\partial x_{IV}}$		
0	9	9	9	9	-2443	-3201	-3299	-3253	-	2
1	8,20	7,96	7,93	7,94	2620	1989	1791	1308	< 0	1
2	8,86	8,46	8,38	8,27	258	-157	-183	-80	< 0	0,5
3	9,22	8,24	8,13	8,16	132	314	332	284	< 0	0,25
4	9,28	8,38	8,28	8,29						

Таблица 3

Номер вершины многомерного куба	Значения координат				Значение целевой функции
	x_I	x_{II}	x_{III}	x_{IV}	
1	9	8	8	8	100654
2	9	8	8	9	100849
3	9	8	9	8	100865
4	9	8	9	9	100014
5	9	9	8	8	100959
6	9	9	8	9	100125
7	9	9	9	8	100100
8	9	9	9	9	98003
9	10	8	8	8	100763
10	10	8	8	9	99931
11	10	8	9	8	99924
12	10	8	9	9	97831
13	10	9	8	8	99990
14	10	9	8	9	97913
15	10	9	9	8	97861
16	10	9	9	9	94273

Таким образом, оптимальный набор из 43 концевых мер имеет 6 групп:

– x_0 = 1 – одна (наименьшая мера);

– x_I = 9;

– x_{II} = 9;

– x_{III} = 8;

– x_{IV} = 8;

– x_V = 8.

Абсолютные значения размеров концевых мер $A_{iм}$, мм, в группах (табл. 4).

Таблица 4.

Группа	Абсолютные значения размеров концевых мер $A_{iм}$, мм								
0	0,500								
I	0,505;	0,510;	0,515;	0,520;	0,525;	0,530;	0,535;	0,540;	0,545
II	0,590;	0,640;	0,690;	0,740;	0,790;	0,840;	0,890;	0,940;	0,990
III	1,475;	2,010;	2,545;	3,080;	3,615;	4,150;	4,685;	5,220	
IV	9,930;	15,175;	20,420;	25,665;	30,910;	36,155;	41,400;	46,645	
V	92,775;	144,150;	195,525;	246,900;	298,275;	349,650;	401,025;	452,400	

Таблица 5.

Параметры наборов концевых мер: ГОСТ 9038-90 / предлагаемый						
№ набора	q	Z	δ, мм	n	$N_{мин}$, мм	$N_{мак}$, мм
3	112	22701	0,005	6	1,500	130,005
-	43	100960	0,005	5	1,005*[2]	505,800

С помощью данного набора концевых мер можно получить «Z» составленных размеров (без пробелов* в части обеспечения разности соседних размеров 0,005 мм):

$$Z = U + 1 = 100959 + 1 = 100960$$

Минимальное значение составленного размера в ряду равно 1,005 мм, максимальное – 505,800 мм.

Для оценки эффективности проведенной оптимизации произведем сравнение параметров представленного набора с набором по ГОСТ 9038-90, содержащем максимальное количество концевых (набор №3, 112 мер) и обеспечивающим разность соседних составленных размеров в 0,005 мм (табл. 5).

Сравнение наборов показывает, что:

– количество составленных размеров предлагаемого набора больше в 4,45 раза;

– точность составленного размера (за счет уменьшения числа групп) выше в 1,2 раза;

– значение минимального составленного размера меньше в 1,49 раза;

– значение максимального составленного размера больше в 3,89 раза;

– количество мер (стоимость изготовления) предлагаемого набора меньше примерно в 2,6 раза (без учета изменения массы набора и размеров концевых мер).

Практически возможности стандартного набора могут быть обеспечены при реализации предлагаемым способом набора из q = 43 со значением n = 4 (то есть, с повышением точности в 1,5 раза и многократным снижением стоимости изготовления).

Выводы и результаты

Оптимальные наборы концевых мер возможны при значениях общего количества концевых мер набора в относительно широком интервале – от 15 до 60. Непосредственное решение задачи оптимизации наборов концевых мер (перебором всех возможных вариантов) требует значительного времени даже при использовании современных средств вычислительной техники.

Предлагаемый способ решения задач многомерной оптимизации с использованием метода «стрелок» и адаптированного метода «половинного шага» обладает высокой эффективностью и существенно сокращает объем вычислительных операций по сравнению с известными методами.

Для решения прямой задачи оптимизации (минимизации общего числа концевых мер в наборе) целесообразно использовать таблицы, составленные по результатам решения обратных задач (исходя из параметров существующих в настоящее время наборов различных производителей). Для составления требуемых таблиц авторами осуществлена программная реализация предложенного способа на персональном компьютере с целью обеспечения доступности и широкого использования в практике инженерных расчетов.

Список использованной литературы:

1. Муллабаев А.А. Исследование механизмов со сменными и связанными шестернями // Автореферат дисс. на соискание уч. ст. канд. техн. наук. – Куйбышев: КПИ, 1968. – 24 с.

*[2]) с пробелами (с разностью соседних размеров, отличных от значения 0,005 мм) можно получить расширенный ряд с минимальным размером 0,500 мм