Кажанова И.Г.
Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе изучен вопрос о существовании периодических решений однородной системы совместных уравнений в частных производных первого порядка с одинаковыми главными частями.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений в частных производных первого порядка вида:

$$H[y]=Ay \tag{1}$$

Здесь A – постоянная $(n\times n)$ – матрица; $x=(x_1,x_2)$ – вектор независимых переменных, $y=y(x)-n$ – вектор искомых функций, а оператор

$$H[y]=\frac{D(y)}{D(x)}\cdot Q(x),$$

где $\frac{D(y)}{D(x)}$ – матрица Якоби, $Q(x)=\begin{pmatrix}Q_1(x)\\Q_2(x)\end{pmatrix}$ – матрица-столбец. Матрица $Q(x)$ определена в E_2, E_2 – двухмерное евклидово пространство.

Предположим, что:

I) Матрица $Q(x)\in H_\omega$ (класс непрерывных ω-периодических функций, $\omega=(\omega_1,\omega_2)$ – постоянный вектор, $\omega_k>0$ – некоторые вещественные числа, $(k=1,2)$);

II) $\inf\limits_{x\in G}|Q_k(x)|\geq\sigma>0$, для $\forall x\in G$, где σ – некоторое вещественное число.

I. Выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{Q_1(x)}{\|Q(x)\|^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{Q_2(x)}{\|Q(x)\|^2}\right)$$

для $\forall x\in E_2$, где $\|Q(x)\|=\sqrt{Q_1^2(x)+Q_2^2(x)}$.

Цель работы – изучить вопрос о существовании ω-периодических решений системы (1).

2. Необходимые сведения. Приведем сначала некоторые сведения, которые будут необходимы в дальнейшем. С этой целью рассмотрим скалярное уравнение в частных производных вида:

$$H[V]\equiv\langle Q(x)\cdot gradV\rangle=1,\qquad V=V(x), \tag{2}$$

где знаком $\langle\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение векторов $Q(x)=(Q_1(x),Q_2(x))$ и $gradV=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$V(x)=\int_0^{x_1}\frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt+\int_0^{x_2}\frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau \tag{3}$$

является решением уравнения в частных производных (2).

Справедливы следующие леммы и следствие.

Лемма 2.1. *Для того чтобы функция $V(x)$ в (3) была ω-периодической, необходимо и достаточно выполнения следующего соотношения*

$$\int_0^{\omega_1}\frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt+n\int_0^{\omega_2}\frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau=0, \tag{4}$$

для $\forall x\in E_2$, $\forall n\in N$, N – множество натуральных чисел.

Доказательство. ***Необходимость.*** Действительно, предположим, что функция $V(x)$ – ω-периодична. Докажем справедливость соотношения (4). Очевидно, что для функции $V(x)$ выполняется

$$V(x+n\omega)=V(x), \tag{5}$$

для $\forall x\in E_2$; здесь и далее $(x+n\omega)=(x_1+\omega_1,x_2+n\omega_2)$, n – любое натуральное число. Из (3), вспоминая периодичность функций $Q_k(x)$, $(k=1,2)$, получим:

$$V(x+n\omega)=\int_0^{x_1+\omega_1}\frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt+\int_0^{x_2+n\omega_2}\frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau=$$

$$=\int_0^{\omega_1}\frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt+\int_{\omega_1}^{x_1+\omega_1}\frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt+$$

$$\int_0^{n\omega_2}\frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau+\int_{n\omega_2}^{x_2+n\omega_2}\frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau \tag{6}$$

Теперь преобразуем второй и четвертый интегралы в (6):

1) В интеграле $\int_{\omega_1}^{x_1+\omega_1}\frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt$, сделав замену $t=\Theta+\omega_1$ и учитывая периодичность функции $Q_1(x_1,x_2)$, а затем в полученном интеграле заменив Θ снова на t, будем иметь:

$$\int_0^{x_1} \frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt \qquad (6_1)$$

2) Аналогично из интеграла $\int\limits_{n\omega_2}^{x_2+n\omega_2} \frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau$ получим:

$$\int_0^{x_2} \frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau \qquad (6_2)$$

Запишем (6) с учетом (6_1), (6_2) и (3) в следующем виде:

$$V(x+n\omega) = V(x) + \int_0^{\omega_1} \frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt + \int_0^{n\omega_2} \frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau \qquad (7)$$

Откуда, учитывая (5), получим:

$$\int_0^{\omega_1} \frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt + n\int_0^{\omega_2} \frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau = 0$$

Тем самым необходимость леммы 2.1 доказана.

Достаточность. Пусть выполняется условие (4). Покажем, что функция $V(x)$ является ω-периодической.

В самом деле, из (7), учитывая (4), имеем:

$$V(x+n\omega) = V(x),$$

то есть функция $V(x)$ – ω-периодична. Достаточность доказана.

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Если справедливо соотношение*

$$\int_0^{\omega_1} \frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt + n\int_0^{\omega_2} \frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau = 0, \qquad (8)$$

то $\int\limits_0^{\omega_1} \frac{Q_1(t,x_2)}{\|Q(t,x_2)\|^2}dt = 0$, $\int\limits_0^{\omega_2} \frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau = 0$,

$$\forall x \in E_2, \quad \forall n \in N,$$

или

$$\frac{1}{\omega_1\omega_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} \frac{Q_1(x)}{\|Q(x)\|^2}dx_1dx_2 = 0$$

$$\frac{1}{\omega_2}\int_0^{\omega_2} \frac{Q_2(0,x_2)}{\|Q(0,x_2)\|^2}dx_2 = 0 \qquad (9)$$

Таким образом, уравнение (2) имеет ω-периодическое решение, если средние значения функций $\frac{Q_1(x)}{\|Q(x)\|^2}$ и $\frac{Q_2(0,x_2)}{\|Q(0,x_2)\|^2}$ в прямоугольнике $0 \le x \le \omega_k$ и в сегменте $[0,\omega_2]$ соответственно обращаются в нуль, $(k=1,2)$.

Следствие 2.1. *Если не выполняется условие (8) (или условия (9)), то функция* $V(x)$ *представима в виде:*

$$V(x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \upsilon(x), \qquad (10)$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{\omega_1\omega_2}\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_2} \frac{Q_1(x)}{\|Q(x)\|^2}dx_1dx_2,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\omega_2}\int_0^{\omega_2} \frac{Q_2(0,\tau)}{\|Q(0,\tau)\|^2}d\tau,$$

а $\upsilon(x)$ *– некоторая* ω*-периодическая функция.*

Доказательство леммы 2.2 и следствия 2.1 очевидны.

3. Однородная система. Рассмотрим систему уравнений в частных производных (1). Будем изучать структуру интегральной матрицы системы (1) в зависимости от собственных значений λ_s матрицы A.

«Малым» интегралом системы (1) назовем структуру вида:

$$y(x) = Y(x)\cdot C, \qquad (11)$$

где матрица $Y(x)$ является нормальной интегральной матрицей однородной системы уравнений в частных производных (1), C – произвольный постоянный n-вектор.

Найдем частные решения однородной системы (1). Будем искать их в следующем виде:

$$y = \gamma\exp(\lambda R(x)), \qquad (12)$$

где γ – постоянный n-вектор, λ – постоянная величина, а $R(x)$ – неизвестная функция. Для определения этих неизвестных, подставляя (12) в (1), получим:

$$\gamma\lambda H[R(x)] = A\gamma \qquad (13)$$

В последней системе число неизвестных больше, чем количество уравнений. Поэтому выберем неизвестную функцию $R(x)$ так, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$H[R(x)] = 1 \qquad (14)$$

(в противном случае всегда можно нормировать).

Из (13), учитывая (14), будем иметь:

$$(A - \lambda E)\gamma = 0, \qquad (15)$$

где E – единичная матрица.

Итак, неизвестные λ и γ определяются из (15) классическим способом [1].

Из (14), учитывая (2) и (3), находим функцию

$$R(x) = V(x) \qquad (16)$$

Таким образом, все неизвестные γ, λ и $R(x)$ определены. Тем самым, определены частные решения (12) системы (1). Далее займемся построением фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы в частных производных (1).

Рассмотрим следующие случаи:

Первый случай. Пусть собственные значения λ_s матрицы A – различные и действительные числа. Обозначим их через $\lambda_1,...,\lambda_n$. Подставив $\lambda_s, (1 \le s \le n)$ вместо λ в (15), получим систему алгебраических уравнений:

$$(A - \lambda_s E)\gamma = 0 \qquad (17)$$

для определения вектора γ.

Известно [1], что ранг матрицы $(A - \lambda_s E)$ равен $n-1$, т. е. $r = n-1$. Поэтому решение системы (17) определяется с точностью до постоянного множителя C_0. Пусть

$$\gamma_1^{(s)},...,\gamma_n^{(s)} \qquad (18)$$

есть решение системы (17) (запись в координатной форме).

Следовательно, собственному значению λ_s матрицы A соответствует решение вида:

$$y_1^{(s)}(x) = \gamma_1^{(s)} e^{\lambda_s V(x)}, ..., y_n^{(s)}(x) = \gamma_n^{(s)} e^{\lambda_s V(x)} \qquad (19)$$

системы уравнений в частных производных (1). Меняя s от 1 до n, получим n частных решений системы (1) в следующем виде:

$$\begin{array}{l} y_1^{(1)}(x) = \gamma_1^{(1)} e^{\lambda_1 V(x)}, ..., y_n^{(1)}(x) = \gamma_n^{(1)} e^{\lambda_1 V(x)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n)}(x) = \gamma_1^{(n)} e^{\lambda_n V(x)}, ..., y_n^{(n)}(x) = \gamma_n^{(n)} e^{\lambda_n V(x)} \end{array} \qquad (20)$$

Докажем, что эти функции образуют ФСР системы (1). С этой целью составим матрицу:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} e^{\lambda_1 V(x)} & ... & \gamma_n^{(1)} e^{\lambda_1 V(x)} \\ ... & ... & ... \\ \gamma_1^{(n)} e^{\lambda_n V(x)} & ... & \gamma_n^{(n)} e^{\lambda_n V(x)} \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Действительно, имеем

$$\det Y(x) = e^{(\lambda_1 + ... + \lambda_n) V(x)} \begin{vmatrix} \gamma_1^{(1)} & ... & \gamma_n^{(1)} \\ ... & ... & ... \\ \gamma_1^{(n)} & ... & \gamma_n^{(n)} \end{vmatrix} \ne 0,$$

Так как функция $e^{(\lambda_1 + ... + \lambda_n) V(x)}$ не обращается в нуль в любой точке $x \in E_2$, а постоянные числа $\gamma_k^{(s)}$, $(k, s = \overline{1,n})$ всегда можно выбрать так, чтобы

$$\begin{vmatrix} \gamma_1^{(1)} & ... & \gamma_n^{(1)} \\ ... & ... & ... \\ \gamma_1^{(n)} & ... & \gamma_n^{(n)} \end{vmatrix} \ne 0$$

в силу произвольности постоянного C_0. Т. е. матрица $Y(x)$ является интегральной матрицей системы (1).

Таким образом, «малый» интеграл системы (1) определяется формулой:

$$\begin{array}{l} y_1(x) = C_1 \gamma_1^{(1)} e^{\lambda_1 V(x)} + ... + C_n \gamma_n^{(1)} e^{\lambda_1 V(x)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) = C_1 \gamma_1^{(n)} e^{\lambda_n V(x)} + ... + C_n \gamma_n^{(n)} e^{\lambda_n V(x)} \end{array}, \qquad (22)$$

где $C_1, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Пусть на основании следствия 2.1 функция $V(x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \upsilon(x)$, $\beta_1 \ne 0, \beta_2 \ne 0$, тогда функции (22) не являются периодическими. Если $C_k = 0$, то функции $y_s \equiv 0$ будут периодическими, $(k, s = \overline{1,n})$.

Пусть $V(x) = \upsilon(x)$ является периодической функцией, т. е. удовлетворяет условию леммы 2.1. В этом случае получаем семейство ω-периодических решений.

Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Пусть: 1) Собственные значения λ_s матрицы A – различные и действительные числа, $(s = \overline{1,n})$; 2) Выполняются условия I – III. Тогда:*

если $V(x) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \upsilon(x)$, $\beta_1 \ne 0, \beta_2 \ne 0$, то система (1) в качестве ω-периодического решения имеет тривиальную функцию, т. е. $y(x) \equiv 0$;

если $V(x) = \upsilon(x)$ – ω-периодическая, то система (1) имеет семейство ω-периодических решений.

Второй случай. Пусть собственные значения матрицы A различны, но среди них имеются комплексные числа. В дальнейшем будем считать, что $\lambda_1,...,\lambda_m$ – действительные числа, а $\lambda_{m+1},...,\lambda_n$ – комплексные числа, т. е.

$$\begin{array}{l} \lambda_{m+1} = a_{m+1} + ib_{m+1}, \quad \lambda_{m+2} = a_{m+1} - ib_{m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1} = a_n + ib_n, \qquad \lambda_n = a_n - ib_n \end{array}, \qquad (23)$$

причем $a_{m+1},...,b_n \ne 0$ – некоторые вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Заметим, что комплексные собственные значения матрицы A будут взаимно сопряженными, так как элементы матрицы A – действительные числа.

Методика определения решений однородной системы (1), соответствующих $\lambda_1,...,\lambda_m$, уже известна. Поэтому более подробно остановимся на нахождении действительных частных решений системы (1), соответствующих комплексным собственным значениям матрицы A.

В самом деле, подставив $\lambda_{m+1}=a_{m+1}+ib_{m+1}$ вместо λ в (15) и рассуждая так же, как в предыдущем случае, получим решение системы (1) в следующем виде:

$$\begin{array}{l} y_1^{(m+1)}(x)=(\gamma_{11}^{(m+1)}+i\gamma_{12}^{(m+1)})\cdot\exp((a_{m+1}+ib_{m+1})V(x)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(m+1)}(x)=(\gamma_{n1}^{(m+1)}+i\gamma_{n2}^{(m+1)})\cdot\exp((a_{m+1}+ib_{m+1})V(x)) \end{array}, \quad (24)$$

где $\gamma_{11}^{(m+1)},...,\gamma_{n2}^{(m+1)}$ – некоторые действительные числа.

Из (24), применив формулу Эйлера, получим:

$$y_k^{(m+1)}(x)=$$
$$=e^{a_{m+1}V(x)}\cdot\left[\gamma_{k1}^{(m+1)}\cos b_{m+1}V(x)-\gamma_{k2}^{(m+1)}\sin b_{m+1}V(x)\right]+$$
$$+ie^{a_{m+1}V(x)}\cdot\left[\gamma_{k1}^{(m+1)}\sin b_{m+1}V(x)+\gamma_{k2}^{(m+1)}\cos b_{m+1}V(x)\right], \quad (25)$$
$$(k=1,...,n).$$

Однако функции (25) являются комплексными.

В настоящей работе рассматриваются только действительные функции. Поэтому из комплексных решений (25) системы (1) выделим ее действительные решения. Для этого рассмотрим следующую лемму:

Лемма 3.1. *Пусть n-вектор – функция*

$$z(x)=\xi(x)+i\eta(x)$$

является решением системы (1), где $\xi(x)$, $\eta(x)$ *– действительные n-вектор – функции.*

Тогда вектор – функции $\xi(x)$ *и* $\eta(x)$ *будут также решениями уравнения (1).*

Доказательство проводится по схеме работы [2].

Из (25), на основании леммы 3.1, получим два действительных решения системы (1) в виде:

$$\bar{y}_k^{(m+1)}(x)=e^{a_{m+1}V(x)}\cdot\left[\gamma_{k1}^{(m+1)}\cos b_{m+1}V(x)-\gamma_{k2}^{(m+1)}\sin b_{m+1}V(x)\right] \quad (26)$$

$$\bar{y}_k^{(m+2)}(x)=e^{a_{m+1}V(x)}\cdot\left[\gamma_{k1}^{(m+1)}\sin b_{m+1}V(x)+\gamma_{k2}^{(m+1)}\cos b_{m+1}V(x)\right] \quad (27)$$

Аналогично можно построить действительные частные решения системы (1), соответствующие корню $\lambda_{m+2}=a_{m+1}-ib_{m+1}$, и они отличаются от функций (26), (27) только знаками. Поэтому их рассматривать не будем.

Итак, паре сопряженных собственных значений $a_{m+1}\pm ib_{m+1}$ матрицы A будут соответствовать два действительных частных решениях (26) и (27) системы (1).

Решения системы (1), соответствующие другим комплексным числам в (23), определяются также вышеуказанным способом.

Таким образом, в этом случае можно также построить интегральную матрицу $Y(x)$ системы (1) и тем самым ее «малый» интеграл.

Пусть $a\neq 0$, тогда:

1) если функция $V(x)=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\upsilon(x)$, $\beta_1\neq 0$, $\beta_2\neq 0$, тогда функции (26) и (27) не являются периодическими. Они будут периодическими только в случае $C_k=0,$ т. е. получим тривиальное решение $y_s\equiv 0$, $(k,s=\overline{1,n})$;

2) если функция $V(x)=\upsilon(x)$ – периодическая, т. е. удовлетворяет условию леммы 2.1. В этом случае получаем семейство ω-периодических решений.

Пусть $a=0$, т. е. среди собственных значений матрицы A имеются чисто мнимые.

Тогда «малый» интеграл системы (1) получим в виде:

$$\begin{array}{l} y_k(x)=C_1\gamma_{k1}^{(1)}e^{\lambda_1V(x)}+...+C_m\gamma_{k1}^{(m)}e^{\lambda_mV(x)}+ \\ +C_{m+1}\left[\gamma_{k1}^{(m+1)}\cos b_{m+1}V(x)-\gamma_{k2}^{(m+1)}\sin b_{m+1}V(x)\right]+ \\ +C_{m+2}\left[\gamma_{k1}^{(m+1)}\sin b_{m+1}V(x)+\gamma_{k2}^{(m+1)}\cos b_{m+1}V(x)\right]+ \\ +...+C_{n-1}\left[\gamma_{k1}^{(n)}\cos b_nV(x)-\gamma_{k2}^{(n)}\sin b_nV(x)\right]+ \\ +C_n\left[\gamma_{k1}^{(n)}\sin b_{n1}V(x)+\gamma_{k2}^{(n)}\cos b_nV(x)\right], \end{array} \quad (28)$$
$$(k=\overline{1,n}).$$

Если функция $V(x)=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\upsilon(x)$, $\beta_1\neq 0$, $\beta_2\neq 0$, тогда функции (28) не являются периодическими. Они будут периодическими только в случае $C_k=0,$ $(k=\overline{1,m})$.

Если $V(x)=\upsilon(x)$ является периодической функцией, т. е. удовлетворяет условию леммы 2.1, то в этом случае получаем семейство ω-периодических решений.

Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Пусть: 1) Собственные значения* λ_s *матрицы A различные и среди них имеются комплексные числа, т. е. числа вида* $a \pm ib \quad (s=\overline{1,n})$; *2) Выполняются условия I – III. Тогда:*

Если $a \neq 0$, *то*

1) $V(x)=\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\upsilon(x)$, $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, *тогда функции (26) и (27) не являются периодическими. Они будут периодическими только в случае* $C_k=0$, *т. е. получим тривиальное решение* $y_s \equiv 0$, $(k,\, s=\overline{1,n})$.

2) $V(x)=\upsilon(x)$ *– периодическая. В этом случае система (1) имеет семейство* ω*-периодических решений.*

Если $a=0$, *то*

1) $V(x)=\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\upsilon(x)$, $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, *то система (1) имеет* ω*-периодическое решение (28), когда* $C_k=0,\ (k=\overline{1,m})$;

2) $V(x)=\upsilon(x)-$ ω*-периодическая, то система (1) имеет семейство* ω*-периодических решений.*

Третий случай. Случай кратных корней изучается способом аналогичным, как в [2].

Список использованной литературы:

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1958.
2. Тажимуратов И.Т., Кубенова Ш.И. Введение в теорию линейных систем уравнений в частных производных первого порядка с одинаковыми главными частями. Актобе: УМО, 2000.