Лазарев В.Н.
Ульяновский государственный технический университет

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ В ОПИСАНИИ ПОВЕДЕНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Проанализированы этапы становления теории вероятностей. Рассмотрены теоретические и эмпирические подходы интерпретации вероятностных моделей. Обоснована необходимость комплексного их применения как условия объективизации описания поведения систем. Выделены некоторые области применения вероятностных моделей в экономике и управлении.

Научный анализ моделей вероятности в нашем подходе должен представлять непосредственное исследование специфики вероятности в системах в сколь угодно различных уровнях сложности, а также независимо от их качественного содержания. Как показывает история науки, решение данной проблемы является не всегда простой задачей.

Исходя из различных областей знания можно констатировать, что наиболее актуальными являются следующие подходы: теоретического (аксиоматического) и эмпирического (частотного, статистического, диспозиционного и т. п.) уровней объективной интерпретации соответствующих вероятностных моделей, а также соотношений неопределенностей системных параметров. С формальной точки зрения вероятность представляет собой меру некоторого отношения, которое задается на соответствующие модели – вероятностные модели. Как известно последние достаточно точно описываются в современной математике на языке теории множеств.

Здесь важно подчеркнуть, что в математическом аспекте совершенно не важно, какой характер (объективный или субъективный) имеет само отношение, которое связывается с вероятностной мерой. Это могут быть отношения знания и незнания (знания о действительности и самой действительности) или отношения в самой объективной реальности, например, в широко известной ситуации с подбрасыванием монеты, в реализации возможностей действия некоторой причины и т. д. Очевидно, что характер отношения и его содержание имеют значимость лишь для самого процесса модельного представления и анализа его адекватности.

Позволим себе напомнить, что наиболее распространенная в настоящее время логическая схема построения теории вероятностей разработана в 1933 г. А.Н. Колмогоровым. В ее основе лежат теоретико-множественные представления и более конкретная аксиоматика, задающая так называемое вероятностное пространство (поле вероятностей, вероятностную «тройку») – совокупность пространства (множества) элементарных событий Ω, специального класса подмножеств этого множества (событий) 2L и определенной на этом классе функции множеств P распределения вероятностей.

Значение P (A) функции P для событий $A\in 2L$ называется в этом случае вероятностью событий A. Функция P, называемая еще вероятностной мерой, должна удовлетворять трем аксиомам вероятности:

1) $0\leq P(A)\leq 1$
2) $P(\Omega)=1$
3) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, если $A_i \cap Aj=\varnothing$ при $i\neq j$

(счетная аддитивность) [1].

Сам А.Н. Колмогоров в предисловии к первому изданию своей знаменитой книги писал, что «после исследования Лебега стала ясной аналогия между мерой множества и вероятностью события, а также между интегралом от функции и математическим ожиданием случайной величины»[2]. Упомянутая аналогия имеет глубокие основания и позволяет понять природу вероятностных представлений и их связь с категориями других наук (физика, экономика, биология и т. д.)

В приведенном определении экономику интересует прежде всего содержательный смысл введенного в нем математического формализма, что не является актуальным для математики, т. к. ее не интересует, как правило, конкретная природа пространства элементарных событий, которое и формально «является неопределяемым и аксиоматичным так же, как понятие точки в геометрии»[3].

Категория случайности исследуемых событий также непосредственно не определяется, хотя лежит в основе вероятностных представлений и косвенно входит в аксиоматику. Ее выделение в явном виде и представляет собой один из важных аспектов раскрытия основ теории вероятностей, которые в частных случаях можно рассматривать как методологическую базу в конкретных науках. В качестве примера можно указать на современную экономику при выработке решения в условиях риска и неопределенности или оценке спроса, анализа производства и т. д. [4].

Что представляют собой основные свойства элементарных событий?

Укажем, что это, во-первых, полнота в том смысле (не в математическом смысле полноты пространства), что оно есть в некотором отношение все: все возможные исходы данного опыта, все возможные реализации данного процесса и т. п., во-вторых, взаимоисключаемость, несовместность составляющих его событий, их элементарность.

Нетрудно заметить, что именно эти свойства по существу заложены в исходном понятии множества, которое само по себе всегда обладает определенной полнотой, поскольку содержит все свои элементы. Есть в этой полноте единица, а его элементы несовместны, отделены друг от друга и сами по себе являются независимыми единицами. Быть элементами данного множества – их единственная определенность и единственная зависимость. Она затем и используется при построении вероятностной меры [5].

Поэтому указанные требования, предъявляемые к пространству элементарных событий, есть уже требования корректности модельного представления [3].

Необходимо четко понимать, что последовательное построение аксиоматики теории вероятности начинают просто с произвольного множества [3], которое, строго говоря, концептуально еще не является «пространством элементарных событий», а реализуется в качестве такового пространства только по окончании определения, другими словами, в составе вероятностной тройки. Данное обстоятельство представляет концептуальную трудность, т. к. несет в себе противоречие двойственности смысла упомянутого понятия. С другой стороны, как абстрактный момент вероятностной «тройки» оно представляет из себя просто множество, но как конкретное пространство элементарных событий реальной задачи, например как совокупность возможных результатов конкретного опыта, оно всегда содержательно и уже включает в себя вероятностное распределение. Поэтому задаваться может по существу лишь вероятностное пространство в целом, то есть вероятностная «тройка» разделена лишь в абстракции.

В указанной двойственности находит свое выражение противоречие конкретной объективности и абстрактной модели, а само вероятностное распределение выявляет свое объективное содержание. Оно оказывается не только продуктом модельного представления, результатом, определенным лишь формальными правилами и аксиоматикой свободного математического конструирования, но и объективной характеристикой ситуации, ее стохастической структуры. Эта содержательность хорошо видна в простейших примерах пространства элементарных событий, каковыми являются «орел» и «решка» в бросании монеты (два элемента), «выпадение» граней игрального кубика (шесть исходов) и т. д. Ясно, что распределение вероятностей задается здесь не извне, а определяется самой объективной ситуацией. Нарушение «идеальности» монеты или кубика (например, смещение центра тяжести) приводит и к смещению распределения вероятностей. С другой стороны, в одном и том же бросании монеты можно фиксировать различные результаты и рассматривать, например, в качестве элементарного исхода опыта первое выпадение «орла» (после чего счет начинается снова). По существу здесь меняется само пространство элементарных событий, которое опять же имеет определенное распределение вероятностей как собственную характеристику.

Таким образом, возможны два подхода к выявлению объективного смысла вероятностных моделей. Первый идет от абстракции множества и второй – от реальности. В контексте вышесказанного необходимо специально выделить один важный момент, который в определенном смысле имеет фундаментальное значение для теории вероятности. Он связан со смыслом употребляемого здесь понятия «независимость» по отношению к элементам множества элементарных событий, который необходимо отличать от того смысла, который вкладывается в понятие независимости событий и соответствующие определения в самой теории вероятностей. В последнем случае «независимость» есть оценка событий с помощью вероятностной схемы, и она требует некоторых дополнительных содержательных соображений (дополнительного к аксиомам определения). В другом аспекте это можно интерпретировать как дополнительную информацию. В случае же «независимости» элементов рассматриваемого исходного множества она абстрактно представляет независимость исходов от «посторонних» причин, не входящих в учитываемую структуру эксперимента. Требование, например, «принципиальной случайности» набора данных в статистике (выборках) связано как раз с необходимостью обеспечить статистическую чистоту эксперимента (статистическую однородность, устойчивость), а по сути – чистоту его вероятностной модели. Данное требование можно трактовать и как требование необходимости – необходимости своеобразной изоляции опыта (например, от привнесения субъективности экспериментатора). В рассмотрении вероятностной модели на уровне абстрактного множества этот момент как раз и представляется как независимость элементов самих по себе (по своему собственному содержанию) и их зависимость лишь как элементов данного множества. Указанное обстоятельство обнаруживается именно в том, что элементарные исходы всегда зависимы в вероятностном смысле, поскольку несовместны (если реализовался один, то это означает, что не реализовался ни один другой и соответствующие условные вероятности равны нулю либо единице, т. е. знание реализации полностью определяет ситуацию).

Итак, можно констатировать, что рассмотренные моменты полноты и независимости в множестве элементарных событий модельно представляют реальные моменты необходимости и случайности. Первое совершенно очевидно, поскольку однозначная необходимость непосредственно как раз и состоит здесь в том, что могут происходить события лишь из исходного множества. Понимание случайности оказывается более трудным, поскольку она есть лишь момент необходимости, а потому на нее нельзя прямо указать как на нечто полное и самостоятельное. Можно, правда, считать, что этот момент неполноты (неполноты необходимости) и есть модельное представление случайности, а вероятность есть мера этой неполноты (или мера полноты, что безразлично). Принципиально так оно и есть, однако раскрытие содержания самой вероятностной меры требует соответствующей расшифровки этого момента.

Здесь целесообразно отвлечься от теоретических дефиниций вероятности и меры неопределенности и в качестве примера рассмотреть вероятностное распределение потока наличности.

Как известно, при корректировке модели максимизации прибыли при помощи метода учетной ставки, скорректированной с учетом риска, и метода эквивалента определенности рассматривают доход, который будет получен в будущий период, как заданную сумму. В реальной ситуации эти суммы являются скорее предполагаемыми стоимостями распределенной вероятности. Следовательно, чистая стоимость должна быть текущей стоимостью серии предполагаемых стоимостей. Элементы этой серии могут быть, а могут и не быть независимыми, т. е. доход в период t может зависеть, а может и не зависеть от того, каким был результат в период t-1. Если результат независим, то чистая текущая стоимость равна:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{E_t}{(1+i)^t}, \qquad (1)$$

где: E_t – предполагаемая стоимость результата в период t;

i – свободная от риска процентная ставка.

Среднее квадратичное отклонение распределения вероятности возможной чистой текущей стоимости равно:

$$S = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{S_t^2}{(1+i)^t}}, \qquad (2)$$

где: S^2_t – дисперсия распределения вероятности движения потока наличности в период t, вычисленная следующим образом:

$$S_t^2 = \sum_{t=1}^{n} \left(Ax_t - E_t\right)^2 Px_t, \qquad (3)$$

где Ax_t – x-е возможное движение потока наличности в период t;

P_{xi} – вероятность его возникновения;

E_t – предполагаемая стоимость результата в период t.

Итак в рассматриваемой модели эта данная соотносительность и взаимосвязь проявляется непосредственно, а случайность элементарного события заключается просто в том, что вместо него равноправно могло случиться другое элементарное событие из этого же множества, причем такая замена не определена ничем иным, кроме принадлежности обоих событий к исходному множеству. Эту равноправность, тождественность элементов в указанном отношении тоже можно рассматривать как определение чистой случайности в данной схеме, поскольку чистая необходимость выделена в ней исходной полнотой пространства элементарных событий. Любая нерегулярность оказывается при этом нарушением базовой схемы и может быть интерпретирована как привнесение некоторой необходимости. Это и происходит при задании вероятностной меры, нормированной к единице. Последняя предоставляет полноту множества.

Представленное выше сопоставление необходимости и случайности в модельном представлении непосредственно определяет те основные требования, которыми должна обладать вероятностная мера и которые зафиксированы в аксиомах. Поскольку ее задача – измерять момент необходимости (случайности) некоторого события, или, другими словами, измерять соотношение этих абстрактных моментов в конкретном событии, то она должна в каком-то смысле сопоставлять интересующее нас событие (необязательно элементарное) с полнотой множества, т. е. производить сравнение. Это непосредственно и достигается заданием функции на множестве событий со значениями на отрезке {0,1}. Почему область значений именно такова, в первом приближении достаточно очевидно. Во всяком случае этот отрезок оказывается вполне достаточной шкалой измерения исходного множества. Более глубокие соображения связаны с природой самого измерения отношения, числовой оси, единицы и т. п. Укажем на то, что некоторым событиям сопоставляются числа, и это уже задает какое-то их числовое распределение. Однако для того, чтобы оно было вероятностным, соответствующая функция должна устанавливать особого рода соответствие между исходным множеством и отрезком {0,1}. Во-первых, всему множеству должен соответствовать весь этот отрезок в целом, что и фиксируется аксиомой P (Ω)=1. Это придает числовое значение полноте, т. е. чистому моменту необходимости. Во-первых, множественному суммированию элементов должно соответствовать числовое суммирование, что фиксируется в аксиоме аддитивности вероятности. Это тоже вполне очевидно, поскольку наполнению целого суммированием частей должно соответствовать наполнение числового отрезка {0,1} его частями (наполнение единицы значениями вероятности).

Можно заключить, что значение вероятности события оказывается мерой заполненности пространства элементарных событий соответствующим его подмножеством. В общем случае не удается задавать вероятностную меру непосредственно на любом множестве Ω, и распределение вероятностей задается на специальном классе его подмножеств (2L – сигма – алгебра подмножеств), который и входит вторым членом в вероятностную «тройку». В контексте нашего рассуждения можно подчеркнуть, что вероятность есть не только мера случайности, как обычно констатируется, а скорее мера необходимости в случайном событии и соответствие этой модели пониманию вероятности как количественной меры возможности точнее, меры реальности возможного.

Приведенный выше научный анализ и выводы непосредственно иллюстрируют классическую концепцию вероятности, которая является наиболее естественным, хотя и наименее строгим и общим с математической точки зрения ее определением. Она основана на простейшем пространстве элементарных событий, состоящем из конечного числа элементов (исходов), которые совершенно равноправны (равновероятны).

Тогда вероятность некоторого события, состоящего в том, что имеет место какой-нибудь из определенного числа элементарных исходов, равна отношению этого числа к общему числу возможных исходов.

Это так называемое равномерное дискретное распределение, и оно интересно тем, что в нем распределения вероятности по сути нет. Элементы в этом смысле тождественны и вероятностная мера оказывается чистым суммированием элементов, наполнением множеств, а отношение нормирует это суммативное выражение вероятности к единице. Однако сущность вероятностной меры остается той же и при задании различных вероятностных весов (неравномерных дискретных распределений) или плотности распределения, поскольку она связана не с конкретным распределением, а с характером аксиом вероятности.

К аналогичным выводам приходит и И.О. Титов, подробно исследовавший различные аспекты содержания понятия вероятности. Он, в частности, прямо указывает на то, что теоретической компонентой «в содержании понятия вероятности, фигурирующего в статистической механике, является классическая метрика, т. е. классический способ задания вероятностей элементарных событий в вероятностном пространстве, основанный на уже упоминавшемся постулате о равновозможности. Введение этой метрики непосредственно не опиралось на какие бы то ни было эмпирические факты» [6].

Предположение (постулат) о равновозможности элементарных событий долгое время рассматривалось как «ахиллесова пята» классического определения. Оно казалось неестественным и в общем случае не соответствующим опыту. Р. Мизес называет классическое определение несостоятельным как теоретически, поскольку оно тавтологично (использует при определении вероятности понятие равновероятности), так и эмпирически, поскольку согласно ему «просто не существует вероятности там, где нет равновозможности случаев» [7]. Однако указание на метрику во многом реабилитирует это определение, поскольку смысл постулата равновозможности как раз и состоит в том, чтобы задать некоторую шкалу измерения возможности событий через возможности элементарных исходов. Естественно, что единицы этой шкалы должны быть равны. Теоретико-множественная аксиоматика вероятности лишь довела эту идею до математической строгости измерения с использованием отрезка оси действительных чисел.

Эмпирический подход к определению понятия вероятности связан с так называемой частотной концепцией, сформулированной Д. Венном в середине XIX в. и развитой впоследствии в трудах Р. Мизеса, Г. Рейхенбаха, Э. Нагеля, К.Р. Поппера и др. Обычно его оценивают как концепцию объективной интерпретации вероятности, что не вполне точно. Он является попыткой концептуального обоснования опытных статистических исследований на основе анализа экспериментальной ситуации. Правда, при этом неизбежно предположение о соответствующих вероятностных свойствах самой исследуемой в эксперименте реальности. Кроме того, эмпирический подход побуждает к исследованию связи статистического описания со структурой этой реальности, что особенно заметно в предложенной К.Р. Поппером в 50-х годах диспозиционной интерпретации вероятности [8].

Однако изначальная фиксация связи вероятности как свойства самой реальности с его экспериментальным выявлением, а также противопоставление частотного определения теоретической модели вероятности мешают последовательно объективной интерпретации, оставляют место субъективизму. В то же время очевидно, что лишь согласованное рассмотрение теоретического и эмпирического подходов, сопоставление лежащих в их основе модельных представлений и предпосылок может выявить объективные основания вероятностных отношений в самой структуре поведения систем.

Склонность к чисто феноменологической трактовке вероятности и ее противопоставлению априорным модельным построениям теории вероятности особенно заметна в частотной концепции Р. Мизеса. «Предметом теории вероятностей, как и всякой другой ветви естествознания, – отмечает он в предисловии к одной из своих работ методологического характера, – служат не какие-либо спекуляции, не мнения, не «формы рассудка», но исключительно доступные наблюдению факты» [7]. Эта позиция проводится достаточно последовательно и скрупулезно, хотя, разумеется, выделение именно статистического характера эксперимента требует исходных аксиоматических допущений и идеализаций, методологические основания которых не анализируются, а задаются по определению. В основе концепции лежат три понятия – статистического коллектива событий, вероятности в ее частотном определении и принципиальной иррегулярности рядов наблюдений. «О вероятности в рациональном смысле, – подчеркивает Р. Мизес, – может идти речь только тогда, если в каждом отдельном случае точно описан коллектив, в пределах которого следует рассматривать эту вероятность; коллективом называется удовлетворяющее известным требованиям массовое или повторяющееся явление, вообще последовательность наблюдений, которую можно мыслить неограниченно продленной… Вероятностью признака (результата опыта) в пределах данного коллектива называется предельное значение, к которому приближается относительная частота появления этого признака в последовательности наблюдений при неограниченном продлении опытов…» [7]. Требование «иррегулярности» или «беззаконности» рядов наблюдений означает отсутствие правила выбора данных из полного набора результатов наблюдений, при помощи которого частоты могут быть изменены.

В этой триаде исходных определений легко просматривается та же сущность вероятности как меры возможности реализации некоторого случайного события или как меры необходимого в случайном, которая выявляется и в теоретической модели. Случайность гарантируется требованием иррегулярности, необходимость в случайном выявляется в устойчивости частоты, а сама мера задается отношением (пределом отношения) числа реализаций и общего числа наблюдений.

Частотная концепция неоднократно подвергалась критике необоснованным утверждением о существовании предела относительной частоты и указанием на математическую бессмысленность понятия «предела иррегулярной последовательности», поскольку наличие предела само по себе означает соответствующую регулярность [9]. С точки зрения теоретической математики эти определения действительно нестроги и, видимо, не могут быть таковыми, поскольку исходят не из абстрактной теоретической модели, а из необходимости дать методологию статистического эксперимента. Отсюда и стремление использовать внеэмпирическое предположение о потенциальной осуществимости бесконечного числа испытаний – с тем, чтобы связать конечность и незавершенность реального опыта с теоретическими моделями и стандартными распределениями, полученными на основе идеализаций теоретико-множественного подхода и использования аппарата математического анализа.

Однако нельзя не видеть и своеобразной обоснованности данного подхода. Действительно, требование иррегулярности в частной концепции означает лишь требование статистической однородности эксперимента, т. е. исключение всякой регулярности кроме статистической. Последняя и выявляется в устойчивости частот. Это означает своеобразную эмпирическую строгость частотной концепции. Достоинством этой схемы является как раз то, что она дает обоснование экспериментальному исследованию стохастичности различных реальных систем, т. е. выступает как методология статистических исследований.

Математическая статистика, решающая задачу «восстановления» вероятностной модели по конкретным данным опыта, в определенном смысле противоположную теоретико-вероятностной задаче построения конкретных выводов из заданной идеальной модели и распределения вероятностей, непосредственно сталкивается с проблемой корректности модельного представления объективной реальности, а не с проблемой теоретической корректности своей модели. Поэтому частотное определение здесь пришлось «ко двору», и, как отмечают специалисты, «условия практической применимости теории вероятностей сейчас трактуются по Р. Мизесу» [10]. Связывая, может быть, несколько прямолинейно и грубо, эмпирию и теорию, оно в своеобразной форме обнажило фундаментальную проблему статистической устойчивости эксперимента, которая и есть тот элемент необходимости, количественно оцениваемой вероятностью. Корректность модельного представления непосредственно связана с правильным отражением в модели этой устойчивости.

Значение частотной концепции вероятности в целом можно оценить как позитивное. Можно отчасти согласиться и с тем, что основное ее положение имеет смысл, «ибо в нем говорится об объективном существовании предела относительной частоты» [6].

Однако позитивное восприятие и связанное с этим гипертрофирование эмпирического подхода привело к переоценке относительной самостоятельности теоретической модели и ее несводимости как к соотношениям объективной реальности, так и к реальному опыту. Именно поэтому была в принципе некорректна попытка Р. Мизеса вывести теорию вероятности из эмпирических посылок, что и выявилось в проблеме упоминавшегося предельного перехода, который либо оказывался некорректным теоретически, либо существенно нарушал общий замысел эмпирического определения и обоснования вероятности. Эмпирический и теоретический уровни не могут быть столь жестко логически связаны. Теоретическая модель как таковая никогда полностью реальности не соответствует.

С другой стороны, многие реальные статистические ситуации и соответствующие распределения вероятностей в них достаточно точно соответствуют распределениям, выведенным чисто теоретически. Ярким примером является гауссовское (нормальное) распределение, входящее в формулировки многих закономерностей. Анализ происхождения этого соответствия представляет собой важнейшую проблему объективной интерпретации вероятности. И решаться она должна с учетом равноправия обоих основных уровней научного познания, их специфической функциональной роли.

Список использованной литературы:

1. Математическая энциклопедия: в 5 т. М., 1997-1985. Т. 1. С. 665-669. – Подробнее об этом см.: Боровиков А. А. Теория вероятностей. М., 1976.
2. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1974. С. 5.
3. Боровиков А.А. Теория вероятностей. с. 14:, Bernhad, Rihard H. «Mathematical Programming Models for capital Budgeting-A Survey, Generalization, and Critigue». Journal of Financial and Quantitative Analysis 4 (June 1969), pp. 111-58.; Taylor, Bernard W. Jntroduction to Management Science. Dubugue, Jowa : William C. Brown, 1982.
4. Arrow, Kenneth J. «Risk Perception in Psychology and Economics». Economic Jnguiry, xx (January 1982), pp. 1-8. Stokes H.S. Jr. «An Examination of the Productivity Decline in the Construction Jnddustry».Review of Economics and Statistics (August 1981), pp. 496-505.
5. Гегель Г. Наука логики. Т. 1 М., 1970. С. 223-255.
6. Титов О.И. Объективная и субъективная вероятность. Минск, 1984. С. 122.
7. Мизес Р. Вероятность и статистика / Пер. и предисл. А.Я. Хинчина. М., 1930. С. 84.
8. Popper K.R. Propensity Interpretation of Probability // British Journal for the Philosophy of Science. 1959 № 10. P. 25-42.
9. Хинчин А.Я. Частотная теория и современные идеи теории вероятностей. // Вопросы философии. 1961. №2. С. 80.
10. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. М., 1972. С. 148.