

Кутарев А.М.

доцент кафедры электромеханики ОГУ, кандидат технических наук

Журкин М.И.

аспирант кафедры электромеханики ОГУ

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРНОГО И СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В статье описаны особенности расчета двумерного магнитного поля методом конечных разностей с использованием векторного и скалярного потенциала магнитного поля; приведено сравнение результатов расчета магнитного поля и оценка эффективности применения дополнительных способов ускорения сходимости итерационного процесса.

Использование математических моделей микроуровня для расчетов магнитных полей при автоматизированном проектировании электротехнических устройств позволяет повысить качество работ за счет повышения точности используемых методик проектирования. Расчеты магнитных полей могут проводиться с целью определения характеристик поля, а также индуктивности обмоток электротехнических устройств.

Целью работы является разработка математических моделей и алгоритма численного расчета магнитного поля методом конечных разностей с использованием векторного и скалярного потенциала магнитного поля, а также проведение сравнительной оценки результатов расчета магнитного поля и определение мер повышения эффективности дополнительных способов ускорения сходимости.

На этапе постановки задачи расчета магнитного поля выбирается не только метод, но и характер вспомогательной функции, через которую определяется вектор поля. В расчетах вихревых и безвихревых двумерных магнитных полей широко используют векторный потенциал магнитного поля. Расчеты безвихревых магнитных полей проводят с использованием скалярного потенциала магнитного поля [1, 2].

Известен подход, позволяющий свести вихревое магнитное поле к квазипотенциальному и использовать в расчетах обобщенный скалярный потенциал магнитного поля [3, 4]. Суть подхода заключается в том, что токовая область заменяется эквивалентным двойным слоем магнитных зарядов. Вектор результирующей напряженности магнитного поля находится как сумма потенциальной и вихревой составляющей с учетом направлений векторов поля.

Преимущество использования скалярного потенциала магнитного поля, в отличие от векторного потенциала, особенно проявляется при расчетах трехмерных магнитных полей, так как

в этом случае число уравнений поля сокращается в три раза. Данное обстоятельство определяет более рациональное распределение ресурсов ЭВМ при реализации математической модели.

Для решения поставленной задачи методом конечных разностей проводился расчет двумерного плоскопараллельного магнитного поля в однородной среде с магнитной проницаемостью μ_0 . Магнитное поле создавалось встречно-направленными токами плотностью J_z , протекающими по двум параллельным бесконечно длинным проводникам прямоугольного поперечного сечения (рисунок 1).

Рассчитываемое магнитное поле симметрично относительно плоскостей $y = 0$, $x = 0$. Величина магнитной индукции, нормальной к границе, отдаленной от проводника на значительное расстояние, принималась равной нулю. Расчетная область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $x = M$, $y = 0$, $y = N$, в декартовой системе координат покрывалась неравномерной сеткой с числом узлов 50×50 . Шаблон сетки изображен на рисунке 2.

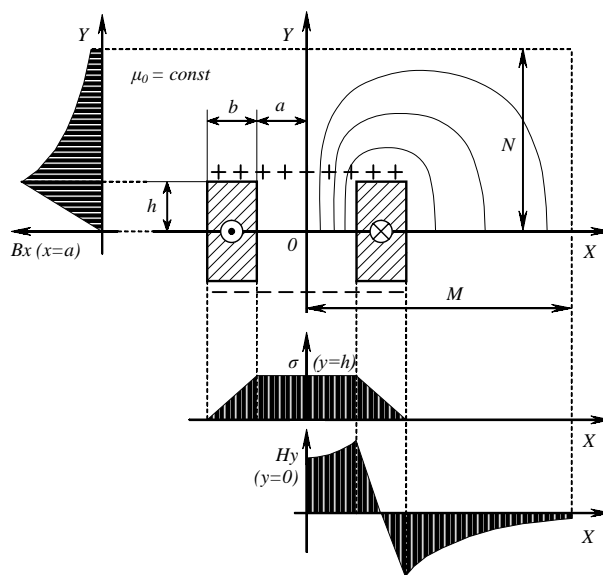


Рисунок 1

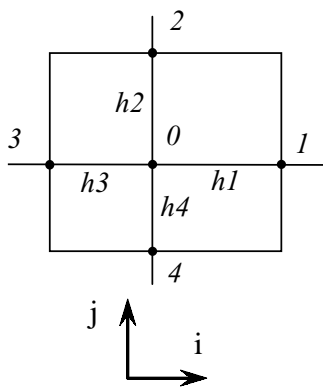


Рисунок 2

Векторный потенциал магнитного поля для центрального узла сетки определялся из уравнения:

$$A_0 = \left[\sum_{i=1}^4 \left(\frac{C_i}{\mu_0} \cdot A_i \right) + I_0 \right] / \sum_{i=1}^4 \frac{C_i}{\mu_0}, \quad (1)$$

где I_0 – значение тока в центральном узле сетки;
 C_i – коэффициенты:

$$C_1 = 0,5 \cdot (h_2 + h_4) / h_1; \quad C_2 = 0,5 \cdot (h_1 + h_3) / h_2; \quad (2)$$

$$C_3 = C_1 \cdot h_1 / h_3; \quad C_4 = C_2 \cdot h_2 / h_4;$$

h_1, h_2, h_3, h_4 – размеры ячеек сетки (рисунок 2).

Скалярный потенциал магнитного поля для центрального узла сетки определялся из следующего уравнения:

$$u_0 = \left[\sum_{i=1}^4 (C_i \cdot u_i) - 0,5 \cdot (h_1 + h_3) \cdot \sigma_0 / \mu_0 \right] / \sum_{i=1}^4 C_i, \quad (3)$$

где σ_0 – значение плотности магнитного заряда в центральном узле сетки. Плотность магнитного заряда в расчетной области имеет ненулевые значения только на плоскости $y = h$, и ее величина находится в зависимости от координаты (рисунок 1).

В решаемой задаче принимались граничные условия третьего рода. В случае использования векторного потенциала магнитного поля, на границах $x = 0, x = M, y = N$ задавалось значение функции ($A_z = 0$); на границе $y = 0$ задавалась производная функции $\left(\frac{\partial A_z}{\partial n} = 0 \right)$. В случае

использования скалярного потенциала магнитного поля, на границе $y = 0$ задавалось значение функции ($u = J_z \cdot h \cdot b$); на границах $x = 0, x = M, y = N$ задавалась производная функции $\left(\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \right)$.

На основе разработанной математической модели был составлен алгоритм расчета магнитного поля с помощью векторного и скалярного потенциала магнитного поля. Алгоритм реали-

зован на алгоритмическом языке программирования «Pascal». Исходными данными для расчета являлись геометрические размеры и магнитные свойства среды по соответствующим координатным осям, а также источники магнитного поля: либо ток, либо плотность магнитных зарядов, в зависимости от используемой потенциальной функции; задавались: $a = 0,02$ м; $b = 0,02$ м; $h = 0,02$ м; $M = 0,2$ м; $N = 0,2$ м; $J_z = 10^6$ А/м²; $\mu_0 = 0,4 \cdot \pi \cdot 10^{-6}$ Гн/м. Результатом расчета магнитного поля являлись значения потенциалов в узлах сетки. Вектора напряженности магнитного поля определялись через значения потенциалов. При использовании векторного потенциала магнитного поля:

$$H_x = \frac{A_2 - A_0}{\mu_0 \cdot h_2}; \quad H_y = -\frac{A_1 - A_0}{\mu_0 \cdot h_1}. \quad (4)$$

При использовании скалярного потенциала магнитного поля:

$$H_x = H_{px} = -\frac{u_1 - u_0}{h_1}; \quad H_y = H_{py} = -H_{0y}; \quad (5)$$

$$H_{py} = -\frac{u_2 - u_0}{h_2}; \quad H_{0y} = \sigma / \mu_0. \quad (6)$$

Для ускорения сходимости итерационного процесса использовался метод верхней релаксации [5]. Значение потенциала в расчетном узле сетки на n -ой итерации определялось по формуле:

$$A_0^n = A_0^{n-1} + \beta \cdot [A_0^{n-0,5} - A_0^{n-1}], \quad (7)$$

где A_0^{n-1} – значение потенциала в расчетном узле, полученное на предыдущей итерации; $A_0^{n-0,5}$ – значение потенциала, полученное на текущей итерации при $\beta = 1$. Проведенные численные эксперименты показали, что в решаемой задаче начальное значение коэффициента верхней релаксации β следует выбирать в пределах от 1,9 до 1,97, а последние 40 итераций β принимать равным единице.

Корректировка коэффициента верхней релаксации в решаемой задаче производилась по следующему алгоритму. Вычислялся коэффициент:

$$\Theta = \sum_i \sum_j \text{abs}(A_{i,j}^n - A_{i,j}^{n-1}) / \sum_i \sum_j \text{abs}(A_{i,j}^{n-1} - A_{i,j}^{n-2}), \quad (8)$$

где $A_{i,j}^n$ – значение потенциала в расчетном узле на текущей итерации; $A_{i,j}^{n-1}$ – значение потенциала, полученное на предыдущей итерации; $A_{i,j}^{n-2}$ – значение потенциала, полученное до предыдущей итерации. Если $\Theta < 1$, то значение коэффициента β увеличивалось на 0,002. Если $\Theta > 1$, то значение коэффициента β уменьшалось на 0,015 [6].

Дополнительно к методу верхней релаксации на каждой итерации применялась корректировка решения. В задаче расчета магнитного поля с использованием векторного потенциала применялся аддитивный вариант корректировки решения, основанный на применении закона полного тока. На каждой итерации находилось значение невязки, выраженное через интеграл напряженности магнитного поля по выбранному контуру интегрирования[^]

$$\Delta A_0 = \{ I - \sum [C_i \cdot (A_i - A_{i+1})] \} / \sum C_i, \quad (9)$$

которое добавлялось к значениям потенциала внутри контура. К моменту завершения расчетов отношение $\oint \vec{H} d\vec{l} / I$ отличалось от единицы не более чем на $10^{-3} \%$.

В задаче расчета магнитного поля с использованием скалярного потенциала применялась корректировка решения, основанная на применении принципа непрерывности магнитного потока. На каждой десятой итерации к потенциалам внутри контура добавлялась невязка:

$$\Delta u_0 = \sum [C_i \cdot (u_j - u_{j+1})] / \sum C_i. \quad (10)$$

К моменту завершения расчетов отношение разности входящего и выходящего магнитного потока к величине входящего потока для выбранных контуров интегрирования составляло менее $10^{-3} \%$.

Контроль сходимости осуществлялся по значению максимального относительного приращения функции на итерациях к значению функции в расчетном узле сетки. Решение задачи считалось достигнутым, если контролируемая величина не превышала заданную точность, равную $10^{-3} \%$.

По результатам расчета магнитного поля находилось значение индуктивности проводника на единицу длины. При использовании векторного потенциала магнитного поля, индуктивность определялась через потокосцепление:

$$L = \Psi / I; \quad (11)$$

$$\Psi = \sum [A_{i,j} \cdot I_{i,j}] / I, \quad (12)$$

где суммирование проводилось по площади сечения токовой области (рисунок 1). При использовании скалярного потенциала магнитного поля, индуктивность определялась через энергию поля:

$$L = 2 \cdot W / I^2; \quad (13)$$

$$W = \sum [\mu_0 \cdot (H_{x_{i,j}}^2 + H_{y_{i,j}}^2) \cdot S_{i,j}], \quad (14)$$

где суммирование проводилось по всей расчетной области; $S_{i,j}$ – площадь ячейки;

Методом Роговского было получено аналитическое выражение, определяющее значения векторных потенциалов магнитного поля в расчетной области. Для области $0 = y = h, 0 = x = M$ значения потенциалов находились из выражения:

$$A_z(x, y) = -\frac{2 \cdot \mu_0}{\pi^3} \cdot T^2 \cdot J_z \cdot \sum_n \frac{1}{n^3} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{T} \cdot (2a + b)\right) \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{T} \cdot b\right) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi \cdot n}{T} \cdot h\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi \cdot n}{T} \cdot y\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n}{T} \cdot x\right) \right|, \quad (15)$$

где T – период разложения плотности тока в ряд Фурье ($T = 4 \cdot M$); n – номер гармоники ($n = 2 \cdot k; k = 1, 2, 3, \dots 50$).

Для области $h = y = N, 0 = x = M$ значения потенциалов находились из выражения:

$$A_z(x, y) = -\frac{2 \cdot \mu_0}{\pi^3} \cdot T^2 \cdot J_z \cdot \sum_n \frac{1}{n^3} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{T} \cdot (2a + b)\right) \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{T} \cdot b\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi \cdot n}{T} \cdot h\right) \cdot \exp\left(-\frac{2\pi \cdot n}{T} \cdot y\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n}{T} \cdot x\right) \right|, \quad (16)$$

Аналитическое решение, определяющее индуктивность проводника на единицу длины, находилось из выражения:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot T^3}{(h \cdot b)^2 \cdot \pi^4} \cdot \sum_n \frac{1}{n^4} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot n}{T} \cdot (2a + b)\right) \cdot \left| \sin^2\left(\frac{\pi \cdot n}{T} \cdot b\right) \cdot \left[h - \frac{T}{2\pi \cdot n} \cdot \exp\left(-\frac{2\pi \cdot n}{T} \cdot h\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi \cdot n}{T} \cdot h\right) \right] \right|, \quad (17)$$

По результатам решения задач расчета магнитного поля с использованием векторного и скалярного потенциала проводился сравнительный анализ. Сравнивались значения индуктивности, вычисленной через энергию поля численным методом, с аналитическим решением. Оценивалось число итераций и время счета. Оценивалось совпадение значений магнитной индукции на заданных контрольных плоскостях, полученных из аналитического и численного решения. Некоторые результаты расчетов приведены в таблицах 1 и 2.

Проведенный анализ позволил сделать вывод о хорошем совпадении результатов расче-

Таблица 1

Потенциальная функция	Векторная, А	Скалярная, u
Число узлов сетки	2500	2500
Число итераций без корректировок	321	738
Число итераций с корректировками	188	187
Время счёта с корректировками, о.е.	1	1,14
Отличие численного значения индуктивности от аналитического решения, %	-1,13	0,58

Таблица 2

		В _y , мТл (y = 0)				В _x , мТл (x = 0,02 м)		
		x = 0	x = 0,016 м	x = 0,044 м	x = 0,2 м	y = 0,01 м	y = 0,04 м	y = 0,2 м
Аналитическое решение		9,4	11,0	6,0	0,6	2,7	2,4	0,05
Потенц. функция	А	9,4	11,0	6,0	0,6	2,7	2,4	0,07
	u	9,4	11,0	6,0	0,6	2,6	2,3	0,06

та магнитного поля, полученных с использованием векторного и скалярного потенциала магнитного поля.

В результате проведенной работы были рассмотрены дополнительные способы ускорения сходимости при расчете двухмерного магнитного поля. На основе оценки влияния

используемых способов корректировки решения на число итераций, требуемых для достижения заданной точности, были определены меры повышения эффективности применяемых способов ускорения сходимости. В случае использования векторного потенциала при расчете магнитного поля дополнительную корректировку решения рекомендуется проводить на каждой итерации для четырех – шести вложенных контуров интегрирования. Интегрирование напряженности магнитного поля необходимо проводить по контурам, совпадающими с предполагаемым направлением силовых линий магнитного поля. При расчете магнитного поля с помощью скалярного потенциала дополнительную корректировку решения необходимо проводить для К контуров. Число контуров интегрирования К следует выбирать равным числу узлов сетки по оси Y, заключенных в области $h < y < N$. Интегрирование магнитного потока необходимо проводить по контурам, совпадающим с границами расчетной области ($x = 0, x = M, y = N$), нормальная составляющая индукции магнитного поля к которым равна нулю.

Список использованной литературы:

1. Б. И. Огорелков. Расчет системы первичных магнитных зарядов при анализе магнитных полей трансформаторов // Расчет электромагнитных полей, характеристик и процессов электромеханических преобразователей: Межвузовский сборник научных трудов. Оренбург: ОГТУ. – 1995.
2. Инкин А.И. Расчет вихревого и потенциального магнитного поля в явнополюсных электрических машинах // Электричество. 1983. №5.
3. Демирчян К.С., Чечурин В.Л. Расчет вихревых магнитных полей на основе использования скалярного магнитного потенциала // Электричество. 1982. №1.
4. Демирчян К.С., Чечурин В.Л. Машинные методы расчета электромагнитных полей. М.: Высшая школа, 1986.
5. Бинс К., Лауренс П. Анализ и расчет электромагнитных полей. – М.: Энергия, 1970.
6. Сипайлов Г.А., Кононенко Е.В., Хорьков К.А. Электрические машины (специальный курс). М.: Высшая школа, 1987.