Ивашкина Г.А., Невоструев Л.М., Кучеров А.А.
Оренбургский государственный университет

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА – ДАРБУ С ПАРАМЕТРАМИ $0<\alpha<1$, $\beta<0$

Решение задачи Коши для уравнения Эйлера – Дарбу с параметрами $\alpha>0$, $\beta<0$ было получено в работе [1] с использованием общих свойств уравнения Эйлера – Дарбу и обобщенных операторов Лиувилля дробного порядка интегрирования и дифференцирования [3]. В настоящей работе с использованием операторов Saigo [4], [5] было получено решение задачи Дарбу для достаточно широкого спектра параметров α и β уравнения Эйлера – Дарбу.

Рассмотрим уравнение

$$U_{\xi\eta}-\frac{\alpha}{\eta-\xi}U_{\eta}+\frac{\beta}{\eta-\xi}U_{\xi}=0 \qquad (1)$$

В работе [1] было получено решение задачи Коши в следующей постановке.

Задача. В области D, ограниченной линиями $\xi=0,\eta=1,I:\eta=\xi$, найти решение $U(\xi,\eta)\in C^{(n)}\left(\overline{D}\right)\cap C^{(n+1)}\left(D\cup I\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$U(\xi,\xi)=\tau(\xi)=\int_0^{\xi}T(t)(\xi-t)^{l}dt \quad (l>-\beta-1) \qquad (2)$$

$$\lim_{\eta\to\xi}\frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)(\eta-\xi)^{\alpha+\beta}=$$
$$\nu(\xi)=\int_0^{\xi}G(t)(\xi-t)^{\delta}dt(\delta>\alpha-2) \qquad (3)$$

Решение уравнения (1) с краевыми условиями (2), (3) имеет следующий вид:

$$U(\xi,\eta)=(\eta-\xi)\int_{\xi}^{\eta}T(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{\ell}F(-\ell,\alpha;\alpha+\beta)dt+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+\ell+\alpha)}(\eta-\xi)^{L}$$
$$\int_{\xi}^{\eta}T(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\ell}F(1-\beta,\alpha;\alpha+1+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi})dt+$$
$$+\left(\eta-\xi\right)^{1-\alpha-\beta+\delta}\int_0^{\xi}G(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{-\delta}F(-\delta,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t})dt+$$
$$+\frac{\Gamma(1+\delta)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(2-\beta+\delta)\Gamma(1-\alpha)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta+\delta}$$
$$\int_{\xi}^{\eta}G(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{1+\delta-\beta}F(\alpha,1-\beta;2-\beta+\delta;\frac{\eta-t}{\eta-\xi})dt \quad (4)$$

В целях упрощения решения поставленной ниже задачи Дарбу параметры ℓ и δ свяжем следующим равенством:

$$\alpha+\ell-1=2-\beta+\delta$$

т. е. $\delta=\alpha-1+\beta+\ell$

Так как $\ell>-\beta-1$, то, взяв $\ell=\varepsilon-\beta-1$, получим $\delta=\alpha-1+\beta+\xi-\beta-1=\alpha-2+\varepsilon>\alpha-2$.

Следовательно, ограничения, наложенные на ℓ и δ, выполняются (здесь $\varepsilon>0$, сколь угодно малое число).

Учитывая выбор δ, (4) можно представить в следующем виде:

$$U(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{\ell}\int_{\xi}^{\eta}T(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{\ell}F(-\ell,\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t})dt+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+\ell+\alpha)}(\eta-\xi)^{\ell}$$
$$\int_{\xi}^{\eta}T(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\ell}F(1-\beta,\alpha;\alpha+1+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi})dt+\left(\eta-\xi\right)^{\ell}$$
$$\int_0^{\xi}G(t)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{1-\alpha-\beta-\ell}F(1-\alpha-\beta-1;1-\beta;2-\alpha-\beta\,\frac{\eta-\xi}{\eta-t})dt+$$
$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\ell)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\ell)\Gamma(1-\alpha)}(\eta-\xi)^{\ell}\int_{\xi}^{\eta}G(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+\ell}F(\alpha,1-$$
$$-\beta;\alpha+\ell+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi})dt \qquad (5)$$

Заметим, что установленная связь между параметрами ℓ и δ совсем не обязательна.

Введем в рассмотрение операторы Saigo:

$$I_{o\xi}^{a,b,c}f=\begin{cases}\dfrac{\xi^{-a-b}}{\Gamma(a)}\displaystyle\int_0^{\xi}f(t)(\xi-t)^{a-1}F(a+b,-c;a;\frac{\xi-t}{\xi})dt, a>0\\ \dfrac{d^n}{d\xi^n}I_{O\xi}^{a+n,b-n,c-n}f, a<0;\end{cases} \qquad (6)$$

$c-b>-1, c,b\in R \qquad f(x)\in C[0,1]$

Оператор Saigo обладает следующими свойствами:

1. $\left(I_{O\xi}^{a,b,c}\right)^{-1}=I_{o\xi}^{-a,-b,a+c}$; (7)

2. $I_{O\xi}^{a,b,c}\left(I_{O\xi}^{\gamma,\delta,a+c}\right)=I_{O\xi}^{a+\gamma,b+\delta,c}(a,\gamma>0)$; (8)

$$I_{o\xi}^{a,b,c}f=\begin{cases}\dfrac{(1-\xi)^{-a-b}}{\Gamma(a)}\displaystyle\int_0^{1}f(t)(t-\xi)^{a-1}F(a+b,-c;a;\frac{t-\xi}{1-\xi})dt, a>0\\ (-1)^n\dfrac{d^n}{d\xi^n}I_{\xi 1}^{a+n,b-n,c-n}f, a<0;\end{cases} \qquad (9)$$

$c-b>-1, c,b\in R$

Свойства этого оператора аналогичные.

Задача. В области D, ограниченной линиями $\xi=0,\eta=1,I:\eta=\xi$, найти решение

$U(\xi,\eta)\in C^{(n)}(\overline{D})\cap C^{(n+1)}(D\cup I)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2)

$$U(o,\eta)=\varphi(\eta)=I_{0\eta}^{\alpha-\gamma,\gamma,\beta-1}\varphi(\eta) \qquad (10)$$

Полагая в (5) $\xi=0$, получим:

$$U(0;\eta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+l+\alpha)}(\eta-\zeta)^l\int_0^\eta T(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta}\right)^{\alpha+1}F(1-$$

$$-\beta,\alpha;\alpha+l+1;\frac{\eta-t}{\eta})dt+\frac{\Gamma(\alpha+\beta+l)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1+l+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\eta^l$$

$$\int_0^\eta G(t)\left(\frac{\eta-t}{\eta}\right)^{\alpha+1}F\left(\alpha,1-\beta;\alpha+l+1;\frac{\eta-t}{\eta}\right)dt \qquad (11)$$

Перепишем (11) с помощью операторов Saigo

$$U(0,\eta)=\varphi(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\beta)}I_{0\eta}^{\alpha+l+1,-l-1,\beta-1}T(\eta)+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta+l)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}I_{0\eta}^{\alpha+l+1;-l-1,\beta-1}G(\eta) \qquad (12)$$

Взяв оператор обращения от обеих частей равенства (12), получим:

$$I_{0\eta}^{-\alpha-l-1,l+1,\alpha+\beta+l}\varphi(\eta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\beta)}T(\eta)+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+\beta+l)\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}G(\eta) \qquad (13)$$

Подберем натуральное число k так, чтобы $-\alpha-l-1+\kappa>0$, т. е. $\kappa>1+\alpha+l$. Легко видеть, что $\kappa=n+2$ удовлетворяет условию $n+2>1+\alpha+l$.

Действительно, в силу того, что неравенство $n+1>l+\alpha$ должно не нарушиться при всех значениях $-l-\beta<l\le-\beta$, оно должно сохранить свой знак и при максимальном значении $l=-\beta$; т. е. $n+1>-\beta+\alpha$ или $(n+\beta)+(1-\alpha)>0$, где каждое слагаемое положительно.

Преобразуем левую часть равенства (13)

$$I_{0\eta}^{-1-\alpha-l,l+1,\alpha+\beta+l}\varphi(\eta)=\frac{d^{n+2}}{d_\eta^{n+2}}I_{0\eta}^{1-\alpha-l+n,l-n-1,\alpha+\beta+l-n-2}\varphi(\eta) \qquad (14)$$

Зададим $\varphi(\eta)=I_{0\eta}^{\alpha-\gamma,\gamma,\beta-1}\phi(\eta)$, $\gamma<\beta$. Тогда

$$\varphi(\eta)=\frac{\eta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^\eta\phi(z)(\eta-z)^{\alpha-\gamma-1}F\left(\alpha,1-\beta;\alpha-\gamma;\frac{\eta-z}{\eta}\right)dz \qquad (15)$$

Преобразуем (14) с учетом задания функции $\varphi(\eta)$

$$I_{0\eta}^{-1-\alpha-l,l+1,\alpha+\beta+l}\varphi(\eta)=\frac{d^{n+2}}{d_\eta^{n+2}}I_{0\eta}^{1-\alpha-l+n,l-n-1,\alpha+\beta+l-n-2}$$

$$\left(I_{0\eta}^{\alpha-\gamma,\gamma,\beta-1}\phi(\eta)\right)=\frac{d^{n+2}}{d_\eta^{n+2}}I_{0\eta}^{1-l+n-\gamma,l-n-1+\gamma,\alpha+\beta+l-n-2}\phi(\eta)=$$

$$=\frac{d^{n+2}}{d_\eta^{n+2}}\bullet\frac{1}{\Gamma(1-l+n-\gamma)}\int_0^\eta\phi(z)(\eta-z)^{-l+n-\gamma}dz=\frac{1}{\Gamma(-1-l-\gamma)}.$$

$$\bullet\int_0^\eta\phi(z)(\eta-z)^{-l-\gamma-2}dz,\quad \gamma<\beta \qquad (16)$$

С учетом (16) из (13) определим функцию $G(\eta)$

$$G(\eta)=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+l)\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(-1-l-\gamma)}\int_0^\eta\phi(z)(\eta-z)^{-l-\gamma-2}dz-$$

$$-\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+l)\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}T(\eta)$$

Найденные выражения для $G(\eta)$ подставим в (5)

$$U(\xi,\eta)=\int_0^\xi T(t)(\eta-t)^l F\left(-l,\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt-$$

$$-\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+l)\Gamma(2+\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}(\eta-\xi)^{1-\alpha-\beta}\int_0^\xi T(t)(\eta-t)^{\alpha+\beta+l-1}.$$

$$F\left(1-\alpha-\beta-l,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt+I_1+I_2,$$

где (17):

$$I_1=\frac{\Gamma(1-\alpha)(\eta-\xi)^l}{\Gamma(\alpha+\beta+l)\Gamma(2-d-\beta)\Gamma(-1-l-\gamma)}\int_0^\xi\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)^{1-\alpha-\beta-l}.$$

$$F\left(1-\alpha-\beta-l,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-t}\right)dt\int_0^t\phi(z)(t-z)^{-l-\gamma-2}dz, \qquad (18)$$

$$I_2=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha+l)\Gamma(-1-l-\gamma)}(\eta-\xi)^l\int_\xi^\eta\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+1}F\left(\alpha,1-\right.$$

$$\left.-\beta;\alpha+l+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt\int_0^t\phi(z)(t-z)^{-l-\gamma-2}dz. \qquad (19)$$

В I_1 изменим порядок интегрирования и выполним замену по формуле $\xi-(\xi-z)v=t$, получим:

$$I_2=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha+l)\Gamma(-1-l-\gamma)}(\eta-\xi)^l$$

$$\int_\xi^\eta\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+1}F\left(\alpha,1-\beta;\alpha+l+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)dt$$

$$\int_0^1(1-v)^{-l-\gamma-2}\left(1-\frac{z-\xi}{\eta-\xi}v\right)^{\alpha+\beta+l-1}F(1-$$

$$-\alpha-\beta-l,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{1}{1-\frac{z-\xi}{\eta-\xi}v})dv$$

Применим формулу преобразования

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right),$$

с учетом которой гипергеометрическая функция, входящая в I_1, примет вид:

$$F\left(1-\alpha-\beta-l,1-\beta;2-\alpha-\beta;\frac{1}{1-\frac{z-\xi}{\eta-\xi}V}\right)=\left(\frac{\xi-z}{\eta-\xi}V\right)^{\alpha+\beta+l-1}.$$

$$\left(1-\frac{z-\xi}{\eta-\xi}V\right)^{1-\alpha-\beta-1}$$

$$F\,(1-\alpha-\beta-l,1-\alpha;2-\alpha-\beta;\frac{1}{\frac{z-\xi}{n-\xi}V}).$$

Осуществим далее переход к обратному аргументу, в результате которого получим

$$F(1-\alpha-\beta-l,1-\alpha;2-\alpha-\beta;\frac{1}{\frac{z-\xi}{\eta-\xi}V})=$$

$$\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(\beta+l)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+l)}(\frac{\xi-z}{\eta-\xi}V)^{1-\alpha-\beta-l}$$

$$F(1-\alpha-\beta-l,-l;1-\beta-l;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}V)+$$

$$+\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(-\beta-l)}{\Gamma(1-\alpha-\beta-l)\Gamma(1-\beta)}(\frac{\xi-z}{\eta-\xi}V)^{1-\alpha}F(1-\alpha,\beta;1+\beta+l;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}V)$$

В результате двух последних преобразований получим следующее выражение для функции I_1.

$$I_1=\frac{\Gamma(\beta+l)(\eta-\xi)^l}{\Gamma(1+l)\Gamma(\alpha+\beta+l)\Gamma(-1-\gamma-\ell)}\int_U^{\xi}\Phi(z)(\xi-z)^{-l-\gamma-1}dz$$

$$\int_0^1(1-V)^{-l-\gamma-2}\cdot F(1-\alpha-\beta-l,-l;1-\beta-l;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}V)dV+$$

$$+\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta-l)(\eta-\xi)^{-\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+l)\Gamma(-l-\gamma-1)\Gamma(1-\alpha-\beta-l)\Gamma(1-\beta)}$$

$$\int_0^{\xi}\Phi(z)(\xi-z)^{\beta-\gamma-1}dz\int_0^1V^{\beta+l}(1-V)^{-l-\gamma-2}$$

$$F(1-\alpha,\beta;1+\beta+l;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}V)dV$$

Имеет место формула:

$$\int_0^1(1-z)^{\mu-1}z^{\upsilon-1}{}_pF_g(a_1,a_2,...,a_p;b_1,b_2,...,b_g;xz)dz=$$

$$=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(v+\mu)}{}_{p+1}F_{g+1}(\nu,a_1,a_2,...,a_p;\nu+\mu,b_1,b_2,...,b_g;x)$$

$(\mathrm{Re}\mu>0,\mathrm{Re}\nu>0,p\le g+1;$ если $p=g+1$, то $|x|<1)$, применив которую, получим:

$$I_1=\frac{\Gamma(\beta+1)(\eta-\xi)^l}{\Gamma(1+l)\Gamma(\alpha+\beta+l)\Gamma(-1-\gamma)}\int_0^{\xi}\phi(z)(\xi-z)^{-l-\gamma-1}.$$

$${}_3F_2\left(1,1-\alpha-\beta-l,-l;-l-\gamma,1-\beta-l;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}\right)dz+$$

$$+\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta-\ell)\Gamma(\beta+\ell+1)(\eta-\xi)^{-\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\ell)\Gamma(1-\alpha-\beta-\ell)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta-\gamma)}\int_0^{\xi}\varphi(z)(\xi-z)^{\beta-\gamma-1}$$

$${}_3F_2(\beta+\ell+1,1-\alpha,\beta;\beta-\gamma,1+\beta+\ell;\frac{z-\xi}{\eta-\xi})dz$$

Учтем, что

$${}_3F_2(\beta+\ell+1,1-\alpha,\beta;\beta-\gamma,1+\beta+\ell;\frac{z-\xi}{\eta-\xi})=F(1-\alpha,\beta;\beta-\gamma;\frac{z-\xi}{\eta-\xi})$$

Выберем далее $\gamma=\beta+\alpha-1$, что вполне возможно сделать, ибо $\gamma<\beta$ (здесь $-1<\alpha-1<0$).

При таком выборе γ

$${}_3F_2(1,1-\alpha-\beta-\ell,-\ell;-\ell-\gamma;1-\beta-\ell;\frac{z-\xi}{\eta-\xi})=F(1,-\ell;1-\beta-\ell;\frac{z-\xi}{\eta-\xi}),$$

$${}_3F_2(\beta+\ell+1,1-\alpha,\beta;\beta-\gamma,1+\beta+\ell)=(\frac{\eta-z}{\eta-\xi})^{-\beta}$$

Подставляя в I_1 преобразованные обобщенные гипергеометрические функции и заменяя $\gamma=\alpha+\beta-1$, получим:

$$I_1=\frac{\Gamma(\beta+\ell)(\eta-\xi)^{\ell}}{\Gamma(1+\ell)\Gamma(\alpha+\beta+\ell)\Gamma(1-\alpha-\beta-\ell)}$$

$$\int_0^{\xi}\varphi(z)(\xi-z)^{-\ell-\alpha-\beta}F(1,-\ell;1-\beta-\ell;\frac{z-\xi}{\eta-\xi})dt+$$

$$+\frac{\Gamma(-\beta-\ell)\Gamma(1+\beta+\ell)}{\Gamma(\alpha+\beta+\ell)\Gamma(1-\alpha-\beta-\ell)\Gamma(1-\beta)} \tag{20}$$

$$\int_0^{\xi}\varphi(z)(\xi-z)^{-\alpha}(\eta-z)^{-\beta}dz$$

Преобразуем I_2 с учетом выбора $\gamma=\alpha+\beta-1$ по той же схеме, что и I_1, где I_2 определяется формулой (19). Изменив порядок интегрирования, представив I_2 в следующем виде

$$I_2=\frac{(\eta-\xi)^{\ell}}{\Gamma(\alpha+\ell+1)\Gamma(-\ell-\alpha-\beta)}(I_{21}+I_{22}), \tag{21}$$

где

$$I_{21}=\int_0^{\xi}\varphi(z)dz\int_{\xi}^{\eta}\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+1}(t-z)^{-\ell-\alpha-\beta-1}F(\alpha,1-\beta;\alpha+$$

$$+\ell+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi})dt=(\eta-\xi)\int_0^{\xi}\varphi(z)(\eta-z)^{-\ell-\alpha-\beta-1}dz\int_0^1v^{\alpha+\ell}$$

$$\left(1-\frac{\eta-\xi}{\eta-z}v\right)^{-\ell-\alpha-\beta-1}F(\alpha,1-\beta;\alpha+\ell+1,v)dv=$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\ell+1)\Gamma(1+\ell+\beta)}{\Gamma(2+\ell)\Gamma(1+\alpha+\beta+\ell)}(\eta-\xi)\int_0^{\xi}\varphi(z)(\xi-z)^{-\ell-\alpha-\beta-1}$$

$$F(1,\ell+\beta+1;\ell+2;\frac{\eta-\xi}{z-\xi})dz$$

В гипергеометрической функции перейдем к обратному аргументу

$$F(1,\ell+\beta+1;\ell+2;\frac{\eta-\xi}{z-\xi})=\frac{\Gamma(\ell+2)\Gamma(\ell+\beta)}{\Gamma(\ell+\beta+1)\Gamma(\ell+1)}\frac{\xi-z}{\eta-\xi}F(1,-\ell;1-$$

$$-\ell-\beta;\frac{z-\xi}{\eta-\xi})+\frac{\Gamma(\ell+2)\Gamma(-\ell-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{\xi-z}{\eta-\xi}\right)^{1+\ell+\beta}$$

$$F(1+\ell+\beta,\beta;1+\ell+\beta;\frac{z-\xi}{\eta-\xi})$$

С учетом последнего преобразования I_{21} примет вид

$$I_{21}=\frac{\Gamma(\alpha+\ell+1)\Gamma(\ell+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+\ell)\Gamma(\ell+1)}\int_0^{\xi}\varphi(z)(\xi-z)^{-\ell-\alpha-\beta}F(1,-\ell;1-\ell-\beta;\frac{z-\xi}{\eta-\xi})dz+$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\ell+1)\Gamma(1+\ell+\beta)\Gamma(-\ell-\beta)(\eta-\xi)^{-\ell}}{\Gamma(1+\alpha+\beta+\ell)\Gamma(1-\beta)}\int_0^{\xi}\varphi(z)(\xi-z)^{-\alpha}(\eta-z)^{-\beta}dz$$

Находим первое слагаемое формулы (21)

$$\frac{(\eta-\xi)^{\ell}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(-\ell-\alpha-\beta)}I_{21}=$$

$$=\frac{\Gamma(\ell+\beta)(\eta-\xi)^{\ell}}{\Gamma(1+\alpha+\beta+\ell)\Gamma(1+\ell)\Gamma(-\ell-\alpha-\beta)}$$

$$\int_0^{\xi}\varphi(z)(\xi-z)^{-\ell-\alpha-\beta}F(1,-\ell;1-\ell-\beta;\frac{z-\xi}{\eta-\xi})dz+$$

$$\frac{\Gamma(1+\ell+\beta)\Gamma(-\ell-\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+\ell)\Gamma(-\ell-\alpha-\beta)\Gamma(1-\beta)} \tag{22}$$

$$\int_0^{\xi}\varphi(z)(\xi-z)^{-\alpha}(\eta-z)^{-\beta}dz$$

Имеет место формула:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

Применяя эту формулу к (20) и (22), получим

$$I_1+\frac{(\eta-\xi)^{\ell}}{\Gamma(\alpha+\ell+1)\Gamma(-\ell-\alpha-\beta)}I_{21}=0,$$

следовательно, сумма I_1+I_2, входящая в решение (17) задачи Дарбу, равна

$$I_1+I_2=\frac{(\eta-\xi)^{\ell}}{\Gamma(\alpha+\ell+1)\Gamma(-\alpha-\beta-\ell)}I_{22}=\frac{(\eta-\xi)^{\ell}}{\Gamma(\alpha+\beta+\ell)\Gamma(-\alpha-\beta-\ell)}$$

$$\int_{\xi}^{\eta}\varphi(z)dz\int_z^{\eta}\left(\frac{\eta-t}{\eta-\xi}\right)^{\alpha+1}(t-z)^{-\ell-\alpha-\beta-1}$$

$$F(\alpha,1-\beta;\alpha+\ell+1;\frac{\eta-t}{\eta-\xi})dt=\frac{(\eta-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+\ell+1)\Gamma(-\alpha-\beta-\ell)}$$

$$\int_{\xi}^{\eta}\varphi(z)(\eta-z)^{-\beta}dz\int_0^1 v^{\alpha+\ell}(1-v)^{-\ell-\alpha-\beta-1}$$

$$F(\alpha,1-\beta;\alpha+\ell+1;\frac{\eta-z}{\eta-\xi}v)dv=\frac{(\eta-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\beta)}\int_{\xi}^{\eta}\varphi(z)(\eta-z)^{-\beta}{}_3F_2(\alpha+$$

$$+\ell+1,\alpha,1-\beta;1-\beta,\alpha+\ell+1;\frac{\eta-z}{\eta-\xi})dz=$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_{\xi}^{\eta}\varphi(z)(\eta-z)^{-\beta}(z-\xi)^{-\alpha}dz$$

Подставляя найденное выражение суммы в (17), получим решение задачи Дарбу

$$U(\xi,\eta)=(\eta-\xi)^{\ell}\int_0^{\xi}T(z)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-z}\right)^{-\ell}F(-\ell,\alpha;\alpha+\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-z})dz-$$

$$-\frac{\Gamma(1-\alpha)(\eta-\xi)^{\ell}}{\Gamma(\alpha+\beta+\ell)\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(-\ell-\alpha-\beta)}$$

$$\int_0^{\xi}T(z)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-z}\right)^{1-\alpha-\beta-\ell}F(1-\alpha-\beta-\ell,1-\beta;2-\alpha-$$

$$-\beta;\frac{\eta-\xi}{\eta-z})dz+\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_{\xi}^{\eta}\varphi(z)(\eta-z)^{-\beta}(z-\xi)^{-\alpha}dz \tag{23}$$

Список использованной литературы:

1. Ивашкина Г.А. Задачи Коши для уравнения Эйлера - Дарбу с параметрами $\alpha>0$, $\beta<0$ // Вестник ОГУ, 2002, №5. С. 98-106.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Ф.М., Москва, 1962.
3. Hardy G., Liltlewood I., Some propertiesof fractional integraes. I Math Z., 27.,565-606.,1928.
4. Saigo M., Math Rep. Kyushu Univ, 1978, Vol 11.
5. Saigo M., Math., Jap., 1979., Vol 24.