Бондаренко И.И., Влацкая И.В., Назаров Н.В.
Оренбургский государственный университет

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ К. ЭРРОУ

Рассмотрена познавательно-дидактическая игра: доказательство теоремы Эрроу на английском языке. Такая организация учебного материала позволяет осуществить комплексный подход к проблеме коллективного принятия решения с математической, лингвистической и ценностной точек зрения.

Проблема коллективного принятия решения в форме голосования известна большинству граждан современного общества. Общий подход к агрегированию коллективного решения на основе индивидуальных мнений избирателей восходит к известной работе К. Эрроу [1]. Развитый им нормативный метод агрегирования коллективного предпочтения в форме некоторого бинарного отношения, исходя из множества индивидуальных предпочтений избирателей также в форме бинарных отношений, привел к неожиданному результату, известному в науке как парадокс Эрроу. Однако сама методика нормативного подхода к анализу и синтезу процедур коллективного принятия решения оказалась конструктивной и по существу определила целое направление в современной теории принятия решения. Нормативная теория коллективного принятия решения является учебной дисциплиной в ряде зарубежных высших учебных заведений [2]. В настоящее время она проникает и в содержание российского высшего образования [3]. Однако многоаспектные дидактические ресурсы этой теории еще не раскрыты в должной мере, и любое движение в этом направлении будет способствовать толерантному существованию личности в современной поликультурной среде.

Если контингент слушателей владеет навыками английской разговорной речи (таковыми, например, являются студенты-лингвисты или филологи), то у преподавателя появляется интересная возможность провести познавательно-дидактическую игру: доказательство теоремы Эрроу на английском языке. В начале такого образовательного сюжета преподаватель проводит актуализацию знаний студентов по тем аспектам учебного математического материала, который потребуется при доказательстве теоремы. С целью усиления ценностной установки на теорию группового выбора как жизненную гуманитарную проблему приводится исторический обзор развития этой отрасли науки, пограничной между математикой, экономикой, социологией, политологией [4]. Такая комплексная предварительная организация учебного материала стимулирует познавательную деятельность студента, направленную на самостоятельное устранение недостатков текущего уровня подготовки. Далее проводится лекция на английском языке, основная цель которой – изложение доказательства теоремы. В ходе лекции допускается переход на русский язык только для перевода и пояснения некоторых математических терминов. В качестве самостоятельной работы студенту предлагается дома записать доказательство изучаемой теоремы на русском языке. Если же у студента возникнут трудности с переводом на русский язык прослушанного на лекции доказательства, то его усилия не пропадут напрасно – напряженное и всестороннее обдумывание трудностей математического характера повышает его готовность к осознанному восприятию доказательства на последующем семинаре. Содержание семинара состоит в подробном доказательстве теоремы с проработкой тех возможных трудностей в понимании излагаемого математического материала, которые были отмечены выше. Приведем оба этих фрагмента познавательно-дидактической игры.

Фрагмент 1. Адаптированное доказательство теоремы К. Эрроу на языке оригинала [5] с предварительным определением нормативных условий (аксиом состоятельности) и пояснением необходимых обозначений. Адаптация доказательства теоремы К. Эрроу, сделанная нами, произведена по двум направлениям. Первое направление – уточнение терминологии при доказательстве теоремы Эрроу. Второе – обоснование методики доказательства с позиции практико ориентированного подхода к математическому образованию студентов гуманитарного профиля.

Пусть множество A исходов состоит из трех или более элементов (синонимы: вариантов, альтернатив, кандидатов). Каждый избиратель (синонимы: выборщик, агент) имеет индивидуальное предпочтение на A, которое описывается линейным порядком (транзитивным, связным, асимметричным бинарным отношением). Будем обозначать этот порядок *i*-го выборщика как u_i. Обозначим через *L(A)* множество всех линейных порядков на *A*. Тогда запись $u_i(a)>u_i(b)$ означает, что вариант *a* предпочтительнее варианта *b* для выборщика *i*. Множество выборщиков обозначим через *N*, а мощность *N* через *n*. Профиль предпочтений $u=(u_i)_{i\in N}$ из $L(A)^n$ приписывает каждому агенту *i* предпочтение u_i.

Агрегирующая функция (АФ) есть отображение *P* из множества профилей предпочтений во множество линейных порядков на *A*.

Потребуем, чтобы агрегирующая функция удовлетворяла нескольким дополнительным требованиям (синонимы: нормативные требования, аксиомы состоятельности).

Неограниченная область предпочтений. Каждый линейный порядок на *A* допустим в качестве индивидуального предпочтения.

Единогласие. Если в каждом индивидуальном предпочтении указано, что исход *a* лучше исхода *b*, то в коллективном решении также должно быть, что исход *a* лучше исхода *b*.

Аксиома независимости от посторонних альтернатив Эрроу (НПАЭ). Для того чтобы сформулировать ее, необходимо ввести дополнительные обозначения:

$$\text{для всех профилей } u\in L(A)^n \text{ и для всех } a,b\in A,\ a\neq b:$$
$$N(u,a,b)=(i\in N: u_i(a)>u_i(b)).$$

Определение. Пусть *P(.)* – агрегирующая функция (АФ) для *A, N*. Скажем, что *P* удовлетворяет НПАЭ, если

для всех $a,b\in A$ и всех профилей $u,v\in L(A)^n$:

$$N(u,a,b)=N(v,a,b)\Rightarrow [aP(u)b \Leftrightarrow aP(v)b].$$

Другими словами, коллективное предпочтение для пары (*a*, *b*) зависит только от индивидуальных предпочтений для этой пары.

A voting rule compromises between the voters conflicting claims by picking a single outcome from each preference profile. In his very influential book, Arrow proposed a more ambitious goal to the social planner, that of aggregation the preference profile into a complete ordering of outcomes. The thrust of Arrow's approach is his axiom independence of irrelevant alternatives (AIIA). It states that the (social) welfare comparisons within any given subset of outcomes should not depend upon individual preferences outside this subset. Hence, AIIA limits the information one may use when comparing two outcomes *a* and *b*. The voter's preferences among these two (who prefers *a* to *b*, who prefers *b* to *a*) should be all that matters to form the social preference about *a, b*.

Theorem Arrow. Let *A* contain at least three outcomes. Let *P* be a Aggregation Function (AF) consistent with unanimity relation, namely, satisfying:

Unanimity: for all profiles *u* and outcomes *a, b*:

$$[N(u,a,b)=N]\Rightarrow aP(u)b.$$

Then *P* satisfyes the AIIA axiom if and only if there is an agent $i\in N$ (the decisive voter) such that $P(u)=u_i$ for all *u*.

Proof. Given is AF *P* satisfying AIIA and unanimity. For any given outcomes *a,b* define *B(a,b)* to be the following subset of *EXP(N)*:

$$T\in B(a,b)\Leftrightarrow [\text{for all } u\in L(A)^n: N(u,a,b)=T\Rightarrow aP(u)b].$$

From AIIA, an equivalent definition of *B(a,b)* is

$$T\in B(a,b)\Leftrightarrow [\text{for some } u\in L(A)^n: N(u,a,b)=T \text{ and } aP(u)b].$$

Choose T inclusion minimal in $\cup B(x,y),(x,y)\in A\times A$ So *T* belongs to some *B(a, b)*. We claim that *T* is a singleton.

Suppose it is not. We can partition *T* as $T_1\cup T_2$ where neither T_1 nor T_2 belongs to $B(x,y)$ for any *x, y*. Pick an outcome $c\neq a, b$ and construct a profile as follows:

T_1	T_2	$N\setminus T$
a	c	b
b	a	c
c	b	a

Here and in the rest of the proof, we do not specify the profile on *A\[a, b, c]*. By AIIA, this does not matter.

As *N(u, a, b) = T, we have aP*(u)b. As *N(u, a, c) =* T_1 and $T_1\notin B(a,c)$, we have *cP(u)a*. As *N(u, c, b) =* T_2 and $T_2\notin B(c,b)$, we have *bP(u)c*, hence a contradiction. Thus, we have found a pair *(a, b)* and a single agent, say, *I*, such that $I\in B(a,b)$.

Check next that $I\in B(c,d)$ for all outcomes *c, d*. Indeed, for any *c*, different from *a* and *b*, consider a profile such as:

I	$N\setminus I$
c	$в$
a	c
$в$	a

From $I\in B(a,b)$ follows *aP(u)b*, and from unanimity follows *cP(u)a*. Hence, *cP(u)b* implies $I\in B(c,b)$ since *N(u, c, b) = I*. Thus, $I\in B(c,b)$ for all $c\neq b$. We will show now, that $I\in B(c,d)$ for all $d\neq c$.

For all *d*, different from *c* and *b*, consider a profile such as:

I	$N \backslash I$
c	b
$в$	d
d	c

As $I \in B(c, b)$ we have $cP(u)b$, from unanimity follows $bP(u)d$. Hence, $cP(u)d$ for all $d \neq c$ and $I \in B(c, d)$ since $N(u, c, d) = I$. Hence, implies $I \in B(c, d)$ for all *c* and *d*.

It remains to check that agent *I* is a decisive voter, namely, for all *a, b* and all profiles *u*,

$$u_I(a)>u_I(b) \Rightarrow aP(u)b.$$

Fix *a,b* and *u* such that что $u_I(a)>u_I(b)$. Pick a third outcome *c* and consider the following profile *v*:

$$v_I(a)>v_I(c)>v_I(b);$$

for all $i \neq I$, *such that* $u_i(a)>u_i(b)$: $v_i(c)>v_i(a)>v_i(b)$,
for all i such that $u_i(b)>u_i(a)$: $v_i(c)>v_i(b)>v_i(a)$.

Since $N(v, a, c) = I$, we have $aP(v)c$. Since $N(v, c, b) = N$, unanimity implies $cP(v)b$. Hence, $aP(v)b$. As $N(u, a, b) = N(v, a, b)$ the AIIA axiom implies $aP(u)b$, as was to be proved.

Фрагмент 2. Разъяснение смысла нормативных условий и доказательства теоремы Эрроу на русском языке.

Шаг 1. Введение в доказательство теоремы.

Предварительно проводится актуализация имеющихся у студента знаний по теории множеств и теории коллективного принятия решения для успешной работы на данном семинаре, используется весь комплекс обозначений, определений, введенных при изложении фрагмента 1. Из методических соображений напоминаем, что ключевой аксиомой в синтезе Эрроу является аксиома независимости от посторонних альтернатив (НПАЭ). Если аксиома НПАЭ нарушается, то это приводит к манипуляциям АФ со стороны организатора голосования, выбирающего предъявление и агентов, не точно сообщающих свои предпочтения. В противном случае, когда аксиома НПАЭ выполняется, то выбор на всем максимальном пространстве не является конфликтным; любое ограничение, сужающее множество реальных кандидатов, не изменит коллективного мнения об оставшихся в предъявлении. Таким образом, это приводит к минимальным затратам на выяснение индивидуальных предпочтений, поскольку требуется выяснить мнение только по поводу релевантных кандидатов.

Шаг 2. Доказательство теоремы Эрроу.

Теорема Эрроу. Пусть множество альтернатив *A* состоит по крайней мере из трех кандидатов. Пусть $P(.)$ – агрегирующая функция, удовлетворяющая отношению единогласия, т. е. удовлетворяющая условию

Единогласие: для всех профилей *u* и исходов *a, b* $(N(u,a,b) = N\} \Rightarrow aP(u)b$.

Тогда *P* удовлетворяет аксиоме НПАЭ в том и только том случае, если существует агент $i \in N$ (решающий участник), такой, что

$$P(u) = u_i \text{ для всех } u.$$

Доказательство. Дана АФ, удовлетворяющая условиям единогласия и НПАЭ. Для любых исходов *a, b* обозначим через $B(a, b)$ следующее подмножество $EXP(N)$:

$$T \in B(a,b) \Leftrightarrow [\text{для всех}$$

$$u \in L(A)^n : N(u,a,b) = T \Rightarrow aP(u)b\,].$$

Из НПАЭ следует эквивалентное определение для $B(a,b)$:

$$T \in B(a,b) \Leftrightarrow [\text{ для некоторого}$$

$$u \in L(A)^n : N(u,a,b) = T \text{ и } aP(u)b\,].$$

Выберем минимальную по включению коалицию T в $\cup B(x,y),(x,y) \in A \times A$. Пусть *T* принадлежит $B(a, b)$. Докажем, что *T* содержит 1 элемент.

Предположим, что *T* состоит более чем из одного элемента. Разобъем *T* на $T_1 \cup T_2$ так, что ни T_1 , ни T_2 не принадлежит $B(x,y)$ ни при каких *x, y*. Выберем третий исход *c*, отличный от *a, b,* и построим следующий профиль:

T_1	T_2	$N \setminus T$
a	c	b
b	a	c
c	b	a

Здесь и далее в доказательстве мы не будем определять профиль на $A\backslash[a, b, c]$. При НПАЭ это не имеет значения. Поскольку $N(u, a, b) = T$, то $aP(u)b$. Так как $N(u, a, c) = T_1$ и $T_1 \notin B(a, c)$, то мы имеем $cP(u)a$. Поскольку $N(u, c, b) = T_2$ и $T_2 \notin B(c, b)$, то получаем $bP(u)c$, а значит противоречие. Итак, найдена пара (a, b) и единственный агент, скажем *I*, такие, что $I \in B(a, b)$.

Далее проверим, что $I \in B(c, d)$ для всех исходов *c, d*. В самом деле, для любого *c*, отличного от *a* и *b*, рассмотрим следующий профиль:

I	$N \backslash I$
c	b
a	c
b	a

Из $I \in B(a, b)$ следует $aP(u)b$, а из единогласия следует $cP(u)a$. Следовательно, из $cP(u)b$ следует $I \in B(c, b)$. Таким образом, $I \in B(c, b)$ для произвольных $c \neq b$. Покажем далее, что $I \in B(c, d)$ при всех $d \neq c$. Для любого d, отличного от c и b, рассмотрим следующий профиль:

I	$N \backslash I$
c	b
b	d
d	c

Из $I \in B(c, b)$ следует $cP(u)b$, из единогласия следует $bP(u)d$. Поэтому $cP(u)d$ для произвольных $d \neq c$ и $I \in B(c, d)$ при всех $d \neq c$. Ввиду произвольности d,c следует, что $I \in B(c, d)$ при всех c и d.

Остается проверить, что агент I является решающим участником, т. е. что для любых a, b и при любом профиле u

$u_I(a)>u_I(b) \Rightarrow aP(u)b.$

Фиксируем a, b и u такие, что $u_I(a)>u_I(b)$. Выберем третий исход c и рассмотрим следующий профиль v:

$$v_I(a)>v_I(c)>v_I(b);$$

для всех $i \neq I$, таких что $u_i(a)>u_i(b)$:

$$v_i(c)>v_i(a)>v_i(b),$$

для всех i таких что $u_i(b)>u_i(a)$:

$$v_i(c)>v_i(b)>v_i(a).$$

Поскольку $N(v, a, c) = I$, то $aP(v)c$. Поскольку $N(v, c, b) = N$, то из единогласия следует $cP(v)b$. Значит, $aP(v)b$. В силу $N(u, a, b) = N(v, a, b)$ из аксиомы НПАЭ следует $aP(u)b$, что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство следует интерпретировать с методической точки зрения. Логика доказательства способствует усвоению студентами таких нормативных характеристик математической культуры, как точность, истинность, красота. В практико ориентированном аспекте образования возможна и желательна иллюстрация общей модели рассуждения конкретными примерами жизненного и личного выбора. Например, студенты с интересом рассматривают то же самое доказательство при обозначении выбора поступка, программы деятельности, другого компонента жизненных отношений. Наконец, доказательство и обсуждение следствий из теоремы Эрроу со студентами позволяет формировать математическое мышление будущих профессионалов как компоненты профессионального мышления. Результаты занятий со студентами по реализации содержания доказательства теоремы Эрроу подтверждают реальность всех трех выделенных нами методических возможностей этого доказательства.

Список использованной литературы:

1. Arrow K. Social Choice and Individual Values, 2nd ed. (1st ed.,1951). New York: John Wiley.
2. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991.
3. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах.– М.: Логос, 2003.
4. Вольский В.И., Лезина З.М. Голосование в малых группах.– М.: Наука, 1991.
5. Moulin H. Axioms of Cooperative Decision Making. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.