

О КОЛЕБАНИЯХ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ, ПОМЕЩЕННОЙ В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Рассматривается система уравнений гидродинамики и теплообмена для описания колебаний газового пузырька в электропроводной жидкости, помещенной в магнитное поле. Приводятся результаты численного исследования поля скоростей, давлений и температур. Найдены частотные характеристики системы. Показано, что при высоких частотах колебаний газ в пузырьке ведет себя почти как адиабатический.

Закономерности рассеивания энергии колеблющимися пузырьками газа в потоке вязкой жидкости имеют принципиальное значение при расчете гидродинамики и теплообмена в двухфазных пузырьковых потоках [1].

Если к тому же вязкая жидкость будет помещена в магнитное поле и обладать электропроводностью, то к механизму вязкой диссипации энергии добавится дальнедействующий механизм джоулевой диссипации, что приведет к быстрому затуханию свободных колебаний пузырька. Кроме того, теплообмен между газом в пузырьке и окружающей жидкостью может создать дополнительный механизм рассеивания энергии. Чисто внешне интенсивное рассеивание энергии проявляется в увеличении эффективной вязкости жидкой фазы. Игнорирование этих физических эффектов при расчете МГД-компрессоров [2] может привести к завышению КПД данных устройств.

В центре сферической системы координат r, φ, θ в вязкой электропроводной жидкости расположен сферический пузырек с идеальным газом. Внешнее устройство создает во всем объеме жидкости однородное магнитное поле. Воздействием импульса давления в жидкости пузырёк выводится из состояния равновесия и начинается релаксация, сопровождающаяся затухающими колебаниями. Рассмотрим основные уравнения, описывающие этот процесс.

Считаем, что вязкая жидкость является несжимаемой и изотермической, т. е. рассеивание энергии в процессе колебаний не приводит к заметному изменению её температуры. Для этой модели уравнения неразрывности, импульсов и законы Ома и Ампера выписываются в виде:

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = 0, \quad (1)$$

$$\rho_1^0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \rho_1^0 (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 = -\operatorname{grad} p_1 + \vec{f}_1 + \mu_1 \nabla^2 \vec{v}_1, \quad (2)$$

$$\vec{f}_1 = \vec{j}_1 \times \vec{B}, \quad \vec{j}_1 = \sigma_1 \vec{v}_1 \times \vec{B} \quad (3)$$

Здесь индекс «1» относится к параметрам жидкой фазы: ρ_1^0 – плотность, v_1 – скорость, p_1 – давление, f_1 – плотность электромагнитной силы,

μ_1 – динамический коэффициент вязкости, σ_1 – электропроводность, j_1 – плотность электрического тока, B – индукция магнитного поля.

При малых магнитных числах Рейнольдса $Re_m \ll 1$ поле скоростей жидкой фазы не будет искажать внешнего магнитного поля, поэтому можно не привлекать для описания процесса систему электродинамических уравнений Максвелла в целом.

Газ в пузырьке считается идеальным и невязким, и для него уравнения неразрывности, Эйлера, энергии и состояния выписываем в виде:

$$\frac{\partial \rho_2^0}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2^0 \vec{v}_2) = 0, \quad (4)$$

$$\rho_2^0 \left(\frac{\partial \vec{v}_2}{\partial t} + (\vec{v}_2 \cdot \nabla) \vec{v}_2 \right) = -\operatorname{grad} p_2, \quad (5)$$

$$\rho_2^0 \frac{d_2}{dt} \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \vec{q}_2 + \operatorname{div}(\vec{p}_n \cdot \vec{v}_2), \quad (6)$$

$$p_2 = \rho_2^0 R_\mu T_2, \quad (7)$$

где d_2/dt – символ субстанциональной производной; плотность теплового потока q_2 определяется по закону теплопроводности Фурье:

$$\vec{q}_2 = -\lambda_2 \operatorname{grad} T_2,$$

а для внутренней энергии принимаем калорическое уравнение состояния идеального газа $u_2 = c_{2v} T_2 + u_{20}$, c_{2v} – удельная массовая изохорная теплоемкость, T_2 – температура газа.

Уравнение закона сохранения энергии в дальнейшем удобно использовать с учетом следующего преобразования.

Поскольку газ является идеальным, то для него тензор поверхностных напряжений является шаровым, и для мощности внешних поверхностных сил можно записать:

$$\operatorname{div}(\vec{p}_n \cdot \vec{v}_2) = -p_2 \operatorname{div} \vec{v}_2 - \vec{v}_2 \cdot \operatorname{grad} p_2$$

Уравнение неразрывности (4) можно привести к виду

$$\frac{d_2 \rho_2^0}{dt} + \rho_2^0 \operatorname{div} \vec{v}_2 = 0,$$

откуда находим, что

$$\operatorname{div} \vec{v}_2 = -\frac{1}{\rho_2^0} \frac{d_2 p_2^0}{dt}.$$

С учетом этого выражения мощность внешних поверхностных сил преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{p}_n \cdot \vec{v}_2) &= \frac{p_2}{\rho_2^0} \frac{d_2 p_2^0}{dt} - \vec{v}_2 \cdot \operatorname{grad} p_2 = \\ &= -p_2 \rho_2^0 \frac{d_2}{dt} \left(\frac{1}{\rho_2^0} \right) - \vec{v}_2 \cdot \operatorname{grad} p_2 = \\ &= -\rho_2^0 \frac{d_2}{dt} \left(\frac{p_2}{\rho_2^0} \right) + \frac{d_2 p_2}{dt} - \vec{v}_2 \cdot \operatorname{grad} p_2. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в уравнение закона сохранения энергии, получим:

$$\begin{aligned} \rho_2^0 \frac{d_2 u_2}{dt} + \rho_2^0 \vec{v}_2 \cdot \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = \\ = -\operatorname{div} \vec{q}_2 - \rho_2^0 \frac{d_2}{dt} \left(\frac{p_2}{\rho_2^0} \right) + \frac{d_2 p_2}{dt} - \vec{v}_2 \cdot \operatorname{grad} p_2. \end{aligned}$$

Вместо внутренней энергии газа u_2 удобно ввести удельную массовую энтальпию газа $i_2 = u_2 + p_2 / \rho_2^0$, тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\rho_2^0 \frac{d_2 i_2}{dt} + \rho_2^0 \vec{v}_2 \cdot \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q}_2 + \frac{d_2 p_2}{dt} - \vec{v}_2 \cdot \operatorname{grad} p_2.$$

Умножив скалярно уравнение Эйлера (5) на v_2 и вычитая полученное равенство из этого выражения, получим уравнение притока теплоты для газа

$$\rho_2^0 \frac{d_2 i_2}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q}_2 + \frac{d_2 p_2}{dt}, \quad (8)$$

где энтальпия определяется выражением $i_2 = C_{p2} T_2 + i_{20}$.

При радиальном течении жидкости вокруг пузырька со скоростью $v_1 = \{v_1, 0, 0\}$ плотность электрического тока в сферической системе координат определяется выражением $j_1 = v_1 B \sin \theta \vec{i}_\varphi$, где $\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\varphi$ – единичные орты сферической системы координат, а индукция магнитного поля – так:

$$\vec{B} = B \cos \theta \vec{i}_r - B \sin \theta \vec{i}_\theta,$$

тогда для плотности электромагнитной силы следует:

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 = \vec{j}_1 \times \vec{B} &= -\sigma_1 v_1 B^2 \sin^2 \theta \vec{i}_r - \sigma_1 v_1 B^2 \cos \theta \sin \theta \vec{i}_\theta = \\ &= f_{1r} \vec{i}_r + f_{1\theta} \vec{i}_\theta. \end{aligned}$$

Меридиональная компонента электромагнитной силы $f_{1\theta}$ может привести к образованию меридионального течения жидкости вокруг пузырька со скоростью v_θ , что исказит чисто радиальное течение. Среднее значение компоненты $f_{1\theta}$ на поверхности пузырька равно нулю. Действительно,

$$\langle f_{1\theta} \rangle = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} f_{1\theta} r d\theta = \frac{1}{2\pi} \sigma_1 v_1 B^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0.$$

В дальнейшем считаем, что вихревой характер электромагнитного поля не искажает радиальное течение жидкости, т. е. пренебрегаем скоростью v_θ по сравнению со скоростью v_{1r} во всей области течения.

При этих условиях уравнение неразрывности (1) принимает простейший вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_1) = 0$$

и легко интегрируется:

$$v_1(r, t) = \frac{v_{1a}(t) a^2}{r^2}, \quad (10)$$

где a – радиус пузырька, v_{1a} – радиальная компонента скорости жидкости на межфазной границе.

Уравнение движения (2) в проекции на ось r с учетом сферически-симметричного течения принимает вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial p_1}{\partial r} + f_{1r} + v_1 \left(\nabla^2 v_1 - 2 \frac{v_1}{r^2} \right).$$

Задача осложняется тем, что компонента $f_{1r} = -\sigma_1 v_1 B^2 \sin^2 \theta$ зависит от угла θ . Оставаясь в рамках одномерного описания течения, заменим эту компоненту её средним значением. Имеем:

$$\langle f_{1r} \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_1 v_1 B^2}{\rho_1^0} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_1 v_1 B^2}{\rho_1^0},$$

тогда предыдущее уравнение можно переписать так:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 v_1 B^2}{\rho_1^0} + v_1 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - 2 \frac{v_1}{r^2} \right).$$

Интегрирование этого уравнения по радиусу с учетом выражения (10) дает

$$\begin{aligned} -\left(a^2 \frac{d^2 a}{dt^2} + 2a \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \frac{a^4}{r^4} = \\ = -\frac{p_1}{\rho_1^0} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 B^2}{\rho_1^0} a^2 \frac{da}{dt} \frac{1}{r} + C. \end{aligned}$$

Постоянную интегрирования находим по условиям на бесконечности: $r \rightarrow \infty$ $p_1 = p_\infty$, что дает $C = p_\infty / \rho_1^0$. На поверхности пузырька при $r = a$ $p_1 = p_{1a}$, поэтому уравнение динамики пузырька принимает вид:

$$a \frac{d^2 a}{dt^2} + 3 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 B^2}{\rho_1^0} a \frac{da}{dt} = \frac{p_{1a}(t) - p_\infty}{\rho_1^0}.$$

Перейдем в этом уравнении от давления $p_{1a}(t)$ в жидкой фазе к давлению $p_{2a}(t)$ в газовой, для чего обратимся к условиям на межфазной границе:

$$\sigma_{2a}^\pi - \sigma_{1a}^\pi = -2 \frac{\Sigma}{a},$$

где Σ – коэффициент поверхностного натяжения, а σ_{ka}^{ii} – нормальные компоненты тензора поверхностных напряжений в фазах на межфазной границе: $\sigma_{2a}^{rr} = -p_{2a}(t)$, $\sigma_{1a}^{rr} = -p_{1a}(t) + 2\mu_1(\partial v_1/\partial r)_{r=a}$, что с учетом (10) дает:

$$p_{1a}(t) = p_{2a}(t) - 4\mu_1 \frac{1}{a} \frac{da}{dt} - 2 \frac{\Sigma}{a},$$

тогда уравнение динамики пузырька принимает вид

$$a \frac{d^2 a}{dt^2} + 3 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 B^2}{\rho_1^0} a \frac{da}{dt} + 4v_1 \frac{1}{a} \frac{da}{dt} + 2 \frac{\Sigma}{\rho_1^0 a} = \frac{p_{2a}(t) - p_\infty}{\rho_1^0}. \quad (11)$$

Уравнение (11) содержит две неизвестные функции: $a(t)$ – радиус пузырька и $p_{2a}(t)$ – давление в газовой фазе, в связи с чем обратимся к дополнительным уравнениям газовой фазы (4)-(8).

При сферически-симметричном течении газа уравнение неразрывности (4) имеет вид:

$$\frac{\partial \rho_2^0}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_2^0 r^2 v_2) = 0, \quad (12)$$

где v_2 – радиальная компонента скорости газа.

Поскольку плотность газа много меньше плотности жидкости, то можно пренебречь силами инерции газовой фазы, тогда уравнение Эйлера (5) перейдет в условие равновесия $\partial p_2/\partial r = 0$, т. е. давление в газовой фазе не зависит от радиуса – условие гомобаричности: $p_{2a}(t) = p_2(t)$.

Принимая для плотности теплового потока q_2 закон теплопроводности Фурье, уравнение (8) с учетом условия гомобаричности преобразуем к виду:

$$\rho_2^0 c_{p2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_2 r^2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{dp_2}{dt}. \quad (13)$$

Преобразование этого уравнения с учетом уравнения неразрывности, состояния и формулы Майера приводит к следующему выражению

$$\frac{r^2}{\gamma-1} \frac{dp_2}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_2 \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_2) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_2 r^2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad (14)$$

интегрирование которого в пределах от r до a позволяет найти закон распределения скоростей в газовой фазе:

$$r^2 v_2(r, t) = a^2 v_{2a}(t) + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p_2(t)}.$$

$$\left(\lambda_2 r^2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_2 a^2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} \right)_{r=a} \right) - \frac{r^3 - a^3}{3\gamma p_2(t)} \frac{dp_2}{dt}. \quad (15)$$

Полагая здесь $r=0$ и учитывая, что на поверхности пузырька плотность теплового потока

$q_a = \lambda_2 (\partial T_2 / \partial r)_{r=a}$ (подведенная теплота), окончательно получаем уравнение для давления газа в пузырьке:

$$\frac{dp_2}{dt} = -3\gamma \frac{p_2 v_{2a}}{a} + 3(\gamma-1) \frac{q_a}{a}. \quad (16)$$

Теперь преобразуем уравнение неразрывности (12), для чего заменим в нём плотность газа ρ_2^0 по уравнению состояния, тогда найдем

$$\frac{1}{T_2} \frac{dp_2}{dt} - \frac{p_2}{T_2^2} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{p_2}{r^2} \frac{1}{T_2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_2) - \frac{p_2}{r^2} \frac{r^2 v_2}{T_2^2} \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0.$$

Выразив производную $\partial/\partial r (r^2 v_2)$ из уравнения (14) и подставив её в это уравнение, приведём его к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_2}{\partial t} + v_2(r, t) \frac{\partial T_2}{\partial r} = \\ & = \frac{\gamma-1}{\gamma p_2(t)} \frac{T_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_2 r^2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_2}{p_2} \frac{dp_2}{dt}. \quad (17) \end{aligned}$$

К сожалению, при численном интегрировании этого уравнения возникает неустойчивость, в особенности в центре пузырька. По этой причине перейдем от температуры газа к новой функции $\theta(r, t) = r T_2(r, t)$. Линеаризуем это уравнение. Во-первых, будем пренебрегать изменением плотности газа вместе с радиусом, тогда закон изменения скорости газового потока будет определяться уравнением:

$$v_2(r, t) = \frac{C(t)}{r^2} = \frac{a^2 v_{2a}(t)}{r^2} = \frac{a^2 \dot{a}}{r^2}, \quad (18)$$

Здесь учтено, что $v_{1a} = v_{2a} = da/dt$.

Во-вторых, заменим отношение $T_2/p_2 = T_2(0)/p_2(0)$, тогда уравнение (17) можно привести к виду:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{a^2 \dot{a}}{r^3} \Theta + \frac{a^2 \dot{a}}{r^2} \frac{\partial \Theta}{\partial r} - A \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} =$$

$$= 3(\gamma-1) \Theta \frac{\dot{a}}{a} + 3(\gamma-1) \frac{A}{a} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)_{r=a} - 3(\gamma-1) \frac{A}{a^2} \Theta(a), \quad (19)$$

где $A = \lambda_2 / \rho_2^0(0) c_{p2}$ – коэффициент температуропроводности.

Уравнения (11), (16) и (19) представляют замкнутую систему уравнений, содержащую три неизвестные функции $a(t)$, $p(t)$ и $\Theta(r, t)$, которая с соответствующими условиями однозначности допускает численное интегрирование. Приведем эту систему уравнений к безразмерному виду.

Пусть пузырёк выводится из состояния равновесия скачком давления на бесконечности, т. е.

$$p_\infty(t) = p_{0,\infty} + \delta p_\infty(t),$$

где $p_{0,\infty}$ – равновесное давление в жидкости, при котором пузырёк находится в равновесии с радиу-

сом a_0 , тогда правую часть (11) можно представить так:

$$\frac{p_2(t) - p_\infty(t)}{\rho_1^0} = \frac{p_2(t) - p_{0,\infty}}{\rho_1^0} - \frac{\delta p_\infty(t)}{\rho_1^0}.$$

Будем считать, что скачок давления $\delta p_\infty(t)$ пропорционален начальному давлению газа в пузырьке, т.е. $\delta p_\infty(t) = k p_2(0)$, где $k = \text{const}$ – параметр возмущения давления, причем $p_2(0) - p_{0,\infty} = 2\Sigma/a_0$, тогда правую часть (11) можно представить в виде:

$$\frac{p_2(t) - p_\infty(t)}{\rho_1^0} = \frac{p_2(0)}{\rho_1^0} [p_*(t) - (k+1)] + 2 \frac{\Sigma}{a_0 \rho_1^0}.$$

Здесь $p_*(t) = p_2(t)/p_2(0)$ – приведенное давление. Введем также следующие приведенные функции: $a_*(t) = a(t)/a_0$, $t_* = t/t_0$ – соответственно приведенные радиус пузырька и время. Кроме того, можно ввести характерную скорость и время для задачи в целом:

$$v_0 = \sqrt{\frac{p_2(0)}{\rho_1^0}}, \quad t_0 = \frac{a_0}{v_0} = a_0 / \sqrt{\frac{p_2(0)}{\rho_1^0}}.$$

Эти масштабы позволяют ввести критерии задачи:

$$Re = \frac{a_0 v_0}{\nu_1}, \quad Ha = a_0 B \sqrt{\frac{\sigma_1}{\rho_1^0}}, \quad We = \frac{\rho_1^0 a_0 v_0^2}{\Sigma},$$

соответственно числа Рейнольдса, Гартмана и Вебера, с учетом которых уравнение динамики пузырька приводится к виду:

$$\frac{d^2 a_*}{dt_*^2} = \frac{1}{a_*} \left[p_* - (k+1) - \frac{3}{2} (\dot{a}_*)^2 - \frac{4}{Re} \frac{\dot{a}_*}{a_*} - \frac{2}{We} \frac{1-a_*}{a_*} - \frac{1}{2} \frac{Ha^2}{Re} \dot{a}_* a_* \right], \quad (20)$$

начальные условия для которого можно сформулировать так: при $t_*=0$ $p_*(0)=1$, $a_*(0)=1$, $da_*/dt_*=0$.

Уравнение для давления в безразмерном виде записывается так:

$$\frac{dp_*}{dt_*} = -3\gamma \frac{p_* \dot{a}_*}{a_*} - \frac{3\gamma}{Pe} \frac{1}{a_*^2} \left(\frac{\partial \Theta_*}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} + 1, \quad (21)$$

где $Pe = a_0 v_0 / A$ – число Пекле, а приведенная температура определена выражением:

$$\Theta_*(\zeta, \tau) = \frac{\Theta(r, t)}{\Theta(a, t)}, \quad \zeta = 1 - \eta, \quad \eta = r/a(t) = \frac{r}{a_0 a_*(\tau)}.$$

В этом выражении $\tau = t_*$, а $\eta(\tau)$ – подвижная система координат, связанная с межфазной границей.

Переходя в уравнении (19) от температуры $\Theta(r, t)$ к приведенной температуре, преобразуем его к безразмерному виду:

$$\frac{\partial \Theta_*}{\partial \tau} = - \frac{\dot{a}_*}{a_*} \left(2 - 3\gamma + \frac{1}{(1-\zeta)^3} \right) - \frac{\dot{a}_*}{a_*} \frac{1}{(1-\zeta)^2} \frac{\partial \Theta_*}{\partial \zeta} + \frac{1}{a_*^2 Pe} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{3(\gamma-1)}{a_*^2 Pe} \left(\left(\frac{\partial \Theta_*}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} + 1 \right). \quad (22)$$

Сформулируем условия однозначности для уравнения (22). Начальные условия: при $\tau=0$ $\Theta_*(\zeta, 0)=1$; граничные условия: на поверхности пузырька при $\zeta=0$ $\Theta_*(0, \tau)=1$; в центре пузырька $\zeta=1$ $\partial \Theta_*/\partial \zeta=0$ и $\Theta_*(1, \tau) < \infty$.

Следует отметить существование одного процесса колебаний пузырька, когда гидродинамическая часть системы уравнений (20), (21) и (22) становится независимой от её теплофизической части, – это политропное сжатие газа в пузырьке. Покажем это.

Перепишем уравнение (16) в виде:

$$dp_2 = - \frac{3\gamma}{a} p_2 v_{2a} dt + 3 \frac{\gamma-1}{a} q_a dt. \quad (23)$$

В этом уравнении $v_{2a} dt = da$, а $q_a dt = dQ$ – количеству теплоты, подведенной к пузырьку из окружающей жидкости:

$$q_a dt = \frac{dQ}{4\pi a^2}.$$

Если процесс политропный, то количество подведенной теплоты можно представить так:

$$dQ = C_n m dT_2 = \frac{C_n}{R_\mu} d(p_2 V_2).$$

Здесь $V_2 = (4/3)\pi a^3$ – объём пузырька. Учитывая, что $3(da/a) = dV_2/V_2$, приведем уравнение (23) к виду:

$$\frac{dp_2}{p_2} + n \frac{dV_2}{V_2} = 0, \quad n = \frac{C_p - C_n}{C_v - C_n} \quad \text{– показатель политропы.}$$

Решением этого уравнения является $pV^n = \text{const}$, или, переходя к радиусу пузырька, $p_2(0) a_0^{3n} = p(t) a(t)^{3n}$, или же в безразмерном виде: $p_* = 1/a_*^{3n}$. Подставляя это условие в уравнение Рэлея (20), получим уравнение динамики политропного пузырька в магнитном поле:

$$\frac{d^2 a_*}{dt_*^2} = \frac{1}{a_*} \left[\frac{1}{a_*^{3n}} - (k+1) - \frac{3}{2} (\dot{a}_*)^2 - \frac{4}{Re} \frac{\dot{a}_*}{a_*} - \frac{2}{We} \frac{1-a_*}{a_*} - \frac{1}{2} \frac{Ha^2}{Re} \dot{a}_* a_* \right]. \quad (24)$$

Это уравнение содержит только одну неизвестную функцию и может интегрироваться независимо от других уравнений системы.

Если частота колебаний пузырька будет большой, то процессы теплообмена не будут успевать произойти, поэтому сжатие (и расширение) газа можно рассматривать как адиабатический процесс. Полагая в (24) $n=\gamma$, получим уравнение динамики адиабатического пузырька.

Ниже представлены результаты численного интегрирования уравнений (20), (21) и (22). Пусть T -безразмерный временной интервал, на котором ищется решение упомянутой системы уравнений, а $\delta\tau=T/N$ и $\delta\zeta=1/M$ шаги по временной и пространственной переменным, N и M – размер сетки. Уравнение притока теплоты можно заменить конечными разностями, учитывая, что:

$$\left(\frac{\partial\Theta_*}{\partial\tau}\right)_{n+1,m} = \frac{\Theta_{*n+1,m} - \Theta_{*n,m}}{\delta\tau}, \quad \zeta = m\delta\zeta,$$

$$\left(\frac{\partial\Theta_*}{\partial\zeta}\right)_{n,m} = \frac{\Theta_{*n,m+1} - \Theta_{*n,m-1}}{2\delta\zeta},$$

$$\left(\frac{\partial^2\Theta_*}{\partial\zeta^2}\right)_{n,m} = \frac{\Theta_{*n,m+1} - 2\Theta_{*n,m} + \Theta_{*n,m-1}}{\delta\zeta^2},$$

$$\left(\frac{\partial\Theta_*}{\partial\zeta}\right)_{n,0} = \frac{\Theta_{*n,1} - \Theta_{*n,0}}{\delta\zeta} = \frac{\Theta_{*n,1} - 1}{\delta\zeta}.$$

При $n=0$ $\Theta_{*0,m}=1$; при $m=0$ $\Theta_{*n,0}=1$ и при $m=M$ $\Theta_{*n+1,M}=\Theta_{*n+1,M-1}$.

С учетом этого уравнения (21) и (22) можно записать так:

$$\frac{dp_*}{dt_*} = -3\gamma \frac{p_* \dot{a}_*}{a_*} - \frac{3\gamma}{Pe} \frac{1}{a_*^2} \left(\frac{\Theta_{*n,1} - 1}{\delta\zeta} + 1 \right),$$

$$\Theta_{*n+1,m} = \Theta_{*n,m} + \delta\tau \left(\begin{aligned} & -\Theta_{*n,m} \frac{\dot{a}_*}{a_*} \left(2 - 3\gamma + \frac{1}{(1 - m\delta\zeta)^3} \right) - \\ & - \frac{\dot{a}_*}{a_*} \frac{1}{(1 - m\delta\zeta)^2} \frac{\Theta_{*n,m+1} - \Theta_{*n,m-1}}{2\delta\zeta} + \\ & + \frac{1}{a_*^2 Pe} \frac{\Theta_{*n,m+1} - 2\Theta_{*n,m} + \Theta_{*n,m-1}}{\delta\zeta^2} - \\ & - \frac{3(\gamma-1)}{a_*^2 Pe} \left(\frac{\Theta_{*n,1} - \Theta_{*n,0}}{\delta\zeta} + 1 \right). \end{aligned} \right)$$

Численные расчеты проводились для газа с $\gamma=1,4$ в среде жидкого галлия: $\rho_1^0=6093$ кг/м³, $\Sigma=72,9 \cdot 10^{-3}$ Н/м, $\nu_1=3,11 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $a_0=10^{-3}$ м, $p_2(0)=10^5$ Па, $T_2(0)=293$ К, $\sigma_1=3,86 \cdot 10^6$ 1/(Ом*м), $k=0,5$.

На рисунке 1 показан график зависимости приведенного радиуса пузырька от приведенного времени в среде жидкого галлия с $\nu_1=0$ и $V=0$, т. е. при

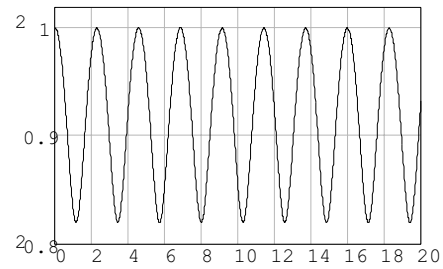


Рисунок 1. График зависимости приведенного радиуса пузырька от приведенного времени: ось абсцисс t_* , ось ординат a_* .

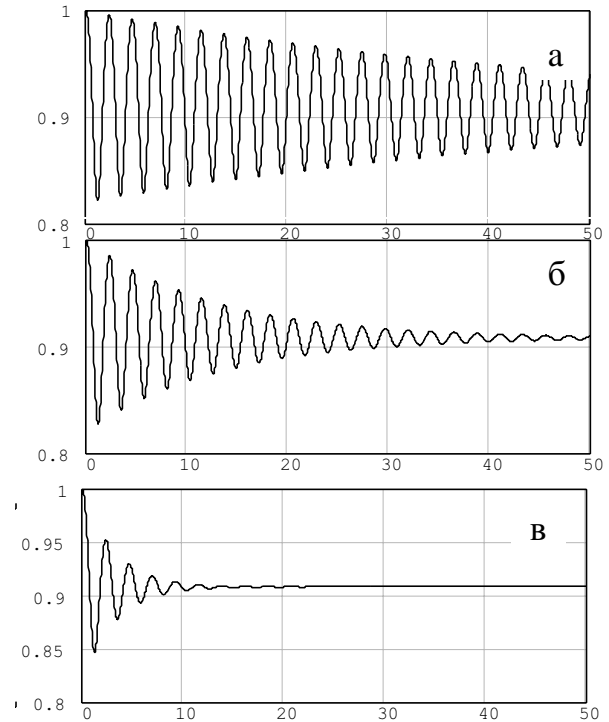


Рисунок 2. Графики зависимости приведенного радиуса пузырька от приведенного времени для различных значений индукции магнитного поля: а) $V=0,5$, б) $V=1,0$ и в) $V=2,0$ Т. Ось абсцисс – время; ось ординат – радиус.

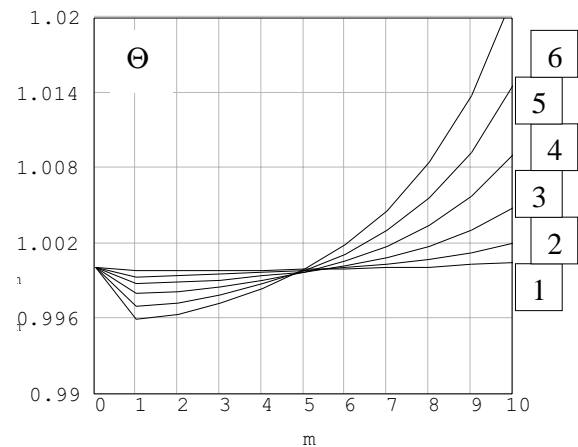


Рисунок 3. Графики зависимости приведенной температуры Q_* по радиусу пузырька для различных моментов времени: $m=0$ - поверхность пузырька, центр пузырька находится в точке $m=20$. Кривая 1 соответствует 2/100 первой четверти периода первого колебания, 2- 4/100, 3-6/100, 4-8/100, 5- 10/100, 6-12/100.

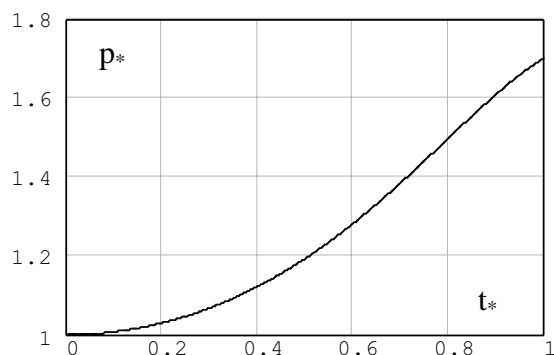


Рисунок 4. Зависимость приведенного давления газа в пузырьке от времени (первая четверть периода первого колебания): ось абсцисс – время, ось ординат – давление.

отсутствии диссипативных эффектов при адиабатическом сжатии. Как видно из графика, свободные колебания пузырька при этих условиях являются незатухающими и близки к гармоническим. Линеаризованное уравнение динамики пузырька приводит к следующей формуле для собственной частоты колебаний [1]

$$\omega_0 = \sqrt{3\gamma \frac{p_2(0)}{\rho_1^0 a_0^2}} .$$

Вычисления ω_0 по этой формуле при исходных данных, принятых в расчете, дает следующее значение $\omega_0 = 4150$ 1/с. Расчет этого же значения частоты по результатам численного интегрирования уравнения динамики (данные рис. 1) приводит к большему значению собственной частоты колебаний: $\omega_0 = 28600$ 1/с. Таким образом, игнорирование сил поверхностного натяжения жидкой пленки при линеаризации уравнения может приводить к значительной погрешности в определении собственной частоты колебаний.

На рис. 2 представлены кривые, отражающие роль магнитного поля в процессе колебаний газового пузырька.

Приведенные зависимости показывают, что чем выше индукция магнитного поля, тем быстрее затухают колебания. Эта зависимость легко объясняется интенсивным рассеиванием энергии

через механизм джоулевой диссипации: плотность вихревых электрических токов пропорциональна индукции магнитного поля.

На рисунке 3 показаны результаты расчета температурного поля в газовом пузырьке.

Приведенные зависимости показывают, что на фазе сжатия происходит слабое охлаждение слоев газа вблизи межфазной поверхности. Начиная с четвертой части радиуса пузырька, приведенная температура газа начинает возрастать к центру. Теплообмен пузырька определяется производной температуры на его поверхности, как видим, эта производная очень мала, поэтому тепловые потоки на поверхности пузырька также малы, и газ в пузырьке ведет себя почти как адиабатический.

На рис. 4 представлены результаты расчета давления газа в пузырьке от времени.

Во всех расчетах критерии задачи были: $a_0 = 1$ мм, $v_0 = 4,05$ м/с, $t_0 = 2,45 \cdot 10^{-4}$ с, $Re = 13000$, $Ha = 68$, $We = 1370$ и $Pe = 150$.

Линеаризация уравнения динамики пузырька [1] позволяет найти коэффициент затухания:

$$2n = \frac{8 + Ha^2}{2Re} \sqrt{\frac{p_2(0)}{\rho_1^0 a_0^2}}$$

и частоту затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} = \sqrt{3\gamma - \left(\frac{8 + Ha^2}{2Re}\right)^2} \sqrt{\frac{p_2(0)}{\rho_1^0 a_0^2}} .$$

Однако эта частота совпадает с результатами численного решения лишь для крупных пузырей и невысоких начальных давлений газа.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что колебания газа в жидкости, помещенной в магнитное поле, носят быстро затухающий характер, причем чем выше индукция магнитного поля, тем выше роль джоулевой диссипации. Из-за высокой частоты колебаний теплообмен между жидкостью и газом в пузырьке не успевает произойти, и газ в пузырьке ведет себя близко к адиабатическому. Показано, что при высоких частотах колебаний газ в пузырьке ведет себя почти как адиабатический.

Список использованной литературы:

1. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред / В.Е. Накоряков и др. М.: Энергоатомиздат, 1990. – 245 с.
 2. Жидкометаллический МГД-компрессор / Васильев А.П., Бондаренко В.А., Тараков Д.А. и др. // Холодильная техника, №12, 1992, с. 22-24.