

УЧЕТ ХАРАКТЕРА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛА В КАНАЛЕ ШНЕКА ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКСТРУДИРОВАНИЯ РАСТИТЕЛЬНОГО СЫРЬЯ

Процесс экструдирования растительного сырья широко применяется в пищевой промышленности и кормоприготовлении. Автогенный режим, характерный для этого процесса, в условиях интенсивного сдвига реализует необходимые технологические воздействия на обрабатываемый объект. Происходящие в материале преобразования вызывают изменение его реологических свойств, которое может быть значительным по длине шнека, что осложняет математическое описание процесса. В работе предпринята попытка получения зависимостей, позволяющих приближенно вычислять распределение напряжений по длине шнека, а на основании этого производить расчет комплекса параметров эффекта процесса экструдирования.

Процесс экструдирования растительного сырья широко применяется в пищевой промышленности и кормоприготовлении. Для этого процесса характерен автогенный режим, который в условиях интенсивного сдвига реализует необходимые технологические воздействия на обрабатываемый объект. Происходящие в материале преобразования вызывают изменение его реологических свойств, которое может быть значительным по длине шнека. Это осложняет математическое описание процесса.

Одним из возможных путей учета изменения реологических свойств и параметров рабочего пространства экструдера является разбиение прессующего механизма на секции [1]. Под секцией понимается участок рабочего пространства прессующего механизма с условно постоянными параметрами процесса. В прессующем механизме соблюдается условие неразрывности потока материала и непрерывности нормальных напряжений в материале на границе между соседними секциями.

Шнековый канал каждой секции прессующего механизма, как показано на рисунке 1, можно рассматривать как часть пространства между бесконечными параллельными плоскостями [2]. Предположим, что верхняя плоскость 1 движется относительно нижней плоскости 2 со скоростью v_c .

Если пренебречь силами инерции, уравнение движения для модели шнекового канала, изображенного на рисунке 1, имеет вид [2]

$$\tau_{xy} = \frac{d\sigma}{dx}(y - y_0), \quad (1)$$

где τ_{xy} – напряжение сдвига в прессуемом материале;

$\frac{d\sigma}{dx}$ – градиент нормальных напряжений в прессуемом материале (сжимающим напряжениям приписаны положительные значения);

y_0 – координата плоскости, на которой касательные напряжения $\tau_{xy} = 0$.

Анализ решений уравнения (1), проведенный С.А. Бостанджияном и А.М. Столиным [2], позволяет выделить два возможных случая распределения касательных напряжений в канале шнека:

- касательные напряжения не изменяют направления, то есть $y_0 < 0$;
- касательные напряжения меняют направление на противоположное, то есть $0 < y_0 < h_{uu}$.

Рассмотрим расход материала через секцию прессующего механизма.

Будем считать, что зависимость напряжения сдвига τ_{xy} от скорости сдвига $\dot{\gamma}_x$ (градиента скорости $\frac{dv_x}{dy}$) удовлетворительно описывается уравнением Оставальда – де Вилля

$$\tau = \mu' \dot{\gamma}_x^n = \mu' \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^n. \quad (2)$$

Для случая $y_0 < 0$ с учетом направления касательного напряжения $\tau > 0$ уравнение (1) преобразуется в уравнение

$$\frac{dv_{x2}}{dy} = -a_{uu} (y - y_0)^m, \quad (3)$$

где $a_{uu} = \left(\frac{1}{\mu'} \right)^m \left| \frac{d\sigma}{dx} \right|^m$, (4)

$$\frac{1}{n} = m. \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (3), приняв на нижней пластине условие прилипания материала по поверхности [3], получим

$$v_{x2} = -\frac{a_{uu}}{m+1} \left[(y - y_0)^{m+1} - (-y_0)^{m+1} \right]. \quad (6)$$

Объемный расход прессуемого материала на единичной ширине пространства между пластинами для этого случая имеет вид

$$Q = \int_0^{h_{uu}} v_x dy = \frac{a_{uu}}{(m+1)} \left[(-y_0)^{m+1} h_{uu} - \right.$$

$$\left. - \frac{(h_{ui} - y_0)^{m+2} - (-y_0)^{m+2}}{(m+2)} \right] \quad (7)$$

Для простоты будем считать градиент напряжений постоянным в пределах одной секции и равным по модулю

$$\left| \frac{d\sigma}{dx} \right|_i = \frac{\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i}}{x_{ui}} \quad (8)$$

где σ_{2i-1} и σ_{2i} – нормальные напряжения соответственно в начале и в конце i -й секции прессующего механизма;

x_{ui} – протяженность шнекового канала i -й секции.

Производительность i -й секции шнекового прессующего механизма численно равна модулю расхода прессуемого материала в канале шнека. Тогда выражение производительности для i -й секции в случае $y_0 < 0$ можно переписать в виде

$$|Q|_i = A_{ui} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i})^{m_i} \quad (9)$$

$$\text{где } A_{ui} = \frac{(h_{ui} - y_{0i})^{m_i+2} - (-y_{0i})^{m_i+2}}{(\mu'_i x_{ui})^{m_i} (m_i + 1)(m_i + 2)} - \frac{(-y_{0i})^{m_i+1} h_{ui}}{(\mu'_i x_{ui})^{m_i} (m_i + 1)} \quad (10)$$

Для случая $0 \leq y_0 \leq h_{ui}$ уравнение (1) имеет два решения

$$\frac{dv_{x1}}{dy} = a_{ui} (y_0 - y)^m, \text{ при } y \leq y_0; \quad (11)$$

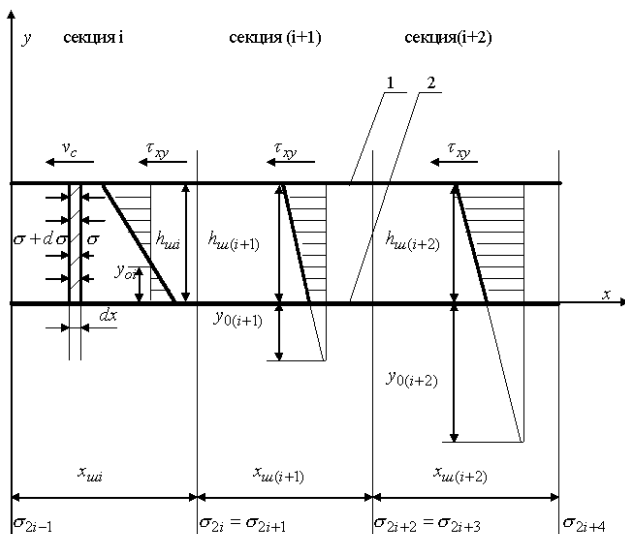


Рисунок 1. Схема модели шнекового канала:
1 – плоскость, замещающая шнековый цилиндр;
2 – плоскость, замещающая дно шнекового канала.

$$\frac{dv_{x2}}{dy} = -a_{ui} (y - y_0)^m, \text{ при } y \geq y_0. \quad (12)$$

Движение с прилипанием по нижней пластине возможно и при условии, когда производная скорости изменяет свой знак в области течения между пластинами.

Принимая граничные условия

$$v_{x1} = 0 \text{ при } y = 0, v_{x2} = v_c \text{ при } y = h_{ui}, \quad (13)$$

получим из уравнений (11) и (12) интегрированием уравнения распределения скоростей

$$v_{x1} = \frac{a_{ui}}{m+1} [y_0^{m+1} - (y_0 - y)^{m+1}] \text{ при } y \leq y_0, \quad (14)$$

$$v_{x2} = v_c + \frac{a_{ui}}{m+1} [(h_{ui} - y_0)^{m+1} - (y - y_{ui})^{m+1}]$$

при $y \geq y_0$. (15)

Из формул (14) и (15) объемный расход Q прессуемого материала на единичной ширине пространства между пластинами для случая $0 \leq y_0 \leq h_{ui}$ можно определить интегрированием элементарных потоков. Получим уравнение

$$Q = \int_0^{y_0} v_{x1} dy + \int_{y_0}^{h_{ui}} v_{x2} dy = v_c (h_{ui} - y_0) + \frac{a_{ui}}{m+2} [y_0^{m+2} + (h_{ui} - y_0)^{m+2}] \quad (16)$$

Выражение производительности для i -й секции в случае $y_0 > 0$ можно переписать в виде

$$|Q|_i = C_{ui} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i})^{m_i} + D_{ui}, \quad (17)$$

$$\text{где } C_{ui} = - \frac{y_{0i}^{m_i+2} + (h_{ui} - y_{0i})^{m_i+2}}{(\mu'_i x_{ui})^{m_i} (m_i + 2)}, \quad (18)$$

$$D_{ui} = v_{ci} (y_{0i} - h_{ui}). \quad (19)$$

Обеспечивая условие непрерывности скоростей $v_{x1} = v_{x2}$ при $y = y_0$, из уравнений (14) и (15), можно получить соотношение

$$\frac{a_{ui}}{m+1} y_0^{m+1} = \frac{a_{ui}}{m+1} (h_{ui} - y_0)^{m+1} + v_c, \quad (20)$$

которое имеет действительные корни при $0 < y_0 < h_{ui}$.

Анализ уравнения (20) показывает, что это уравнение имеет действительные корни при скорости верхней пластины v_c , заключенной в пределах

$$- \frac{a_{ui}}{m+1} h_{ui}^{m+1} \leq v_c \leq \frac{a_{ui}}{m+1} h_{ui}^{m+1}. \quad (21)$$

Нас в этом интервале интересует абсолютная величина v_c .

Учитывая, что в шнековом прессующем механизме скорость v_c не может быть положительной, касательные напряжения не изменяют направления в канале шнека, если выполняется условие

$$|v_c| \geq \frac{n}{1+n} \left(\frac{h_{uu}^{1+n}}{\mu'} \frac{d\sigma}{dx} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (22)$$

где n – индекс течения экструдруемого материала;

μ' – коэффициент консистенции экструдруемого материала.

Касательные напряжения изменяют направление на противоположное, если выполняется условие

$$|v_c| \leq \frac{n}{1+n} \left(\frac{h_{uu}^{1+n}}{\mu'} \frac{d\sigma}{dx} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (23)$$

Скорость v_c является внешней величиной процесса, которая не изменяется по длине шнека. Обычно внешними величинами являются и другие параметры, входящие в выражения (22) и (23), кроме нормальных напряжений. Анализ показывает, что с увеличением температуры материала его свойства приближаются к свойствам ньютоновской жидкости. Это выглядит как уменьшение коэффициента консистенции и увеличение (приближение к единице) индекса течения [3], что приводит к уменьшению правой части в выражениях (22) и (23). Как было показано раньше [4], реологические свойства холодного корма обеспечивают выполнение условия (22) в области шнека, примыкающей к загрузочному отверстию, однако в области, примыкающей к матрице, возможен переход к условию (23). На рисунке 2 показано поведение границы между условиями (22) и (23) при различных значениях градиента напряжений и глубины шнекового канала. С ростом градиента напряжений граничная скорость резко увеличивается, причем с увеличением глубины канала данное значение граничной скорости достигается при большем градиенте напряжений. Граничная скорость сильно зависит от реологических свойств экструдруемого материала.

Если предположить постоянство плотности экструдруемого материала между секциями, уравнение неразрывности между соседними секциями при выполнении в секциях условия (22) и условия непрерывности нормальных напряжений на границе между соседними секциями

$$\sigma_{2i} = \sigma_{2(i+1)-1}$$

имеет вид

$$A_{uii} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i})^{m_i} = A_{u(i+1)} (\sigma_{2(i+1)-1} - \sigma_{2(i+1)})^{m_{i+1}}. \quad (24)$$

Если в соседних секциях выполняются условия (22) и (23), уравнение неразрывности записывается следующим образом

$$C_{uii} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i})^{m_i} + D_{uii} = A_{u(i+1)} (\sigma_{2(i+1)-1} - \sigma_{2(i+1)})^{m_{i+1}}. \quad (25)$$

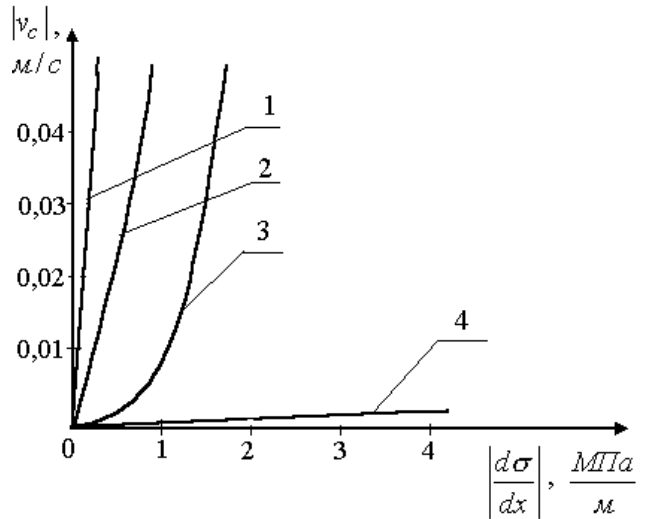


Рисунок 2. Диаграммы зависимостей, соответствующих значению $y_0 = 0$, при движении продукта без проскальзывания по нижней пластине при реологических параметрах прессуемого материала $\mu' = 0,0047$ Па·сⁿ; $n = 0,2$ и значениях глубины канала шнека: 1 – $h_{u1} = 0,012$ м; 2 – $h_{u2} = 0,009$ м; 3 – $h_{u3} = 0,006$ м, а также $\mu' = 0,062$ Па·сⁿ; $n = 0,2$ и значениях глубины канала шнека: 4 – $h_{u1} = 0,012$ м; $h_{u2} = 0,009$ м; $h_{u3} = 0,006$ м.

Наконец, если в соседних секциях выполняется условие (23), уравнение неразрывности имеет вид

$$C_{uii} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i})^{m_i} + D_{uii} = C_{u(i+1)} (\sigma_{2(i+1)-1} - \sigma_{2(i+1)})^{m_{i+1}} + D_{u(i+1)}. \quad (26)$$

Полученные зависимости (24), (25), (26) позволяют приближенно вычислять распределение напряжений по длине шнека, а на основании этого производить расчет комплекса параметров эффекта процесса экструдирования.

Ранее было показано [3], что при экструдировании кормов реологические свойства прессуемого материала могут вызывать движение прессуемого материала с проскальзыванием по шнеку. Математически это выражается граничным условием

$$v_x = v_0 \neq 0 \text{ при } y = 0. \quad (27)$$

Рассмотрим движение с проскальзыванием по нижней пластине, когда производная скорости из-

меняет свой знак в области течения между пластинами, то есть при выполнении условия $0 < y_0 < h_{ui}$.

Получим интегрированием уравнений (11) и (12) уравнения распределения скоростей

$$v_{x1} = v_0 + \frac{a_{uu}}{m+1} [(y_0 - y)^{m+1} - y_0^{m+1}], \quad y \leq y_0; \quad (28)$$

$$v_{x2} = v_c + \frac{a_{uu}}{m+1} [(h_{uu} - y_0)^{m+1} - (y - y_0)^{m+1}], \quad y \geq y_0. \quad (29)$$

Можно выразить неизвестную скорость скольжения, приравняв скорости по формулам (28) и (29) при $y = y_0$. Получим

$$v_0 = v_c + \frac{a_{uu}}{m+1} [(h_{uu} - y_0)^{m+1} - y_0^{m+1}]. \quad (30)$$

Объемный расход Q прессуемого материала при наличии проскальзывания по нижней пластине на единичной ширине пространства между пластинами для случая $0 < y_0 < h_{uu}$ можно определить интегрированием элементарных потоков, используя формулы (28) и (29). Получим уравнение

$$Q = \int_0^{y_0} v_{x1} dy + \int_{y_0}^{h_{uu}} v_{x2} dy = v_c h_{uu} + a_{uu} \left[\frac{(h_{uu} - y_0)^{m+1} y_0}{m+1} + \frac{(h_{uu} - y_0)^{m+2} - y_0^{m+2}}{m+2} \right]. \quad (31)$$

Выражение производительности для i -й секции в случае $y_0 > 0$ можно переписать в виде

$$|Q|_i = G_{uii} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i})^{m_i} + F_{uii}, \quad (32)$$

$$\text{где } G_{uii} = \frac{1}{(\mu'_i x_{uii})^{m_i}} \left[\frac{y_0^{m+2} - (h_{uu} - y_0)^{m+2}}{m+2} - \frac{(h_{uu} - y_0)^{m+1} y_0}{m+1} \right], \quad (33)$$

$$F_{uii} = -v_{ci} h_{uii}. \quad (34)$$

Пусть $y_0 < 0$, тогда слой прессуемого материала движется между пластинами со скоростью, описываемой только уравнением (29), причем при $y = 0$ $v_x \neq 0$. Объемный расход Q прессуемого материала на единичной ширине пространства между пластинами для случая проскальзывания по нижней пластине имеет вид

$$Q = \int_0^{h_{uu}} v_{x2} dy = v_c h_{uu} + \frac{a_{uu} [(h_{uu} - y_0)^{m+2} - (-y_0)^{m+2}]}{(m+1)(m+2)} - \frac{a_{uu} h_{uu} (h_{uu} - y_0)^{m+1}}{m+1}. \quad (35)$$

Тогда выражение производительности для i -й секции в случае $y_0 < 0$ можно переписать в виде

$$|Q|_i = M_{uii} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i})^{m_i} + F_{uii}, \quad (36)$$

$$\text{где } M_{uii} = \frac{h_{uii} (h_{uii} - y_{0i})^{m_i+1}}{(\mu'_i x_{uii})^{m_i} (m_i + 1)} - \frac{(h_{uii} - y_{0i})^{m_i+2} - (-y_{0i})^{m_i+2}}{(\mu'_i x_{uii})^{m_i} (m_i + 1)(m_i + 2)}. \quad (37)$$

Анализируя зависимость (31), можно сделать заключение, аналогичное условию (21), на основании которого направление сдвига изменяет свое направление в канале шнека при выполнении условия для расхода материала

$$h_{uu}^2 \left[\frac{v_c}{h_{uu}} - \frac{\left(\frac{h_{uu} d\sigma}{\mu' dx} \right)^m}{m+2} \right] \leq Q \leq h_{uu}^2 \left[\frac{v_c}{h_{uu}} + \frac{\left(\frac{h_{uu} d\sigma}{\mu' dx} \right)^m}{(m+1)(m+2)} \right]. \quad (38)$$

Это условие можно использовать в случае проскальзывания по нижней пластине для выбора расчетных уравнений определения производительности данной секции. В канале шнека производительность не может превысить величины $-v_c h_{uu}$. Тогда неравенство (38) примет вид

$$-h_{uu}^2 \left[\frac{v_c}{h_{uu}} + \frac{\left(\frac{h_{uu} d\sigma}{\mu' dx} \right)^m}{m+2} \right] \leq |Q| \leq -v_c h_{uu}. \quad (39)$$

На рисунке 3 показано изменение положения границ производительности секции по условию (39) при различных значениях градиента напряжений, глубины шнекового канала и реологических свойств экструдруемого материала. Из рисунка 3 видно, что область, где касательные напряжения изменяют направление, сильно зависит от вязкости экструдруемого материала. Причем размер этой области возрастает при увеличении градиента напряжений и увеличении глубины канала шнека. При достаточно большом по модулю градиенте напряжений область, где касательные напряжения меняют свой знак, отсутствует.

Аналогично случаю движения без проскальзывания по нижней пластине можно записать уравнения неразрывности.

Если предположить постоянство плотности экструдруемого материала между секциями, уравнение неразрывности между соседними сек-

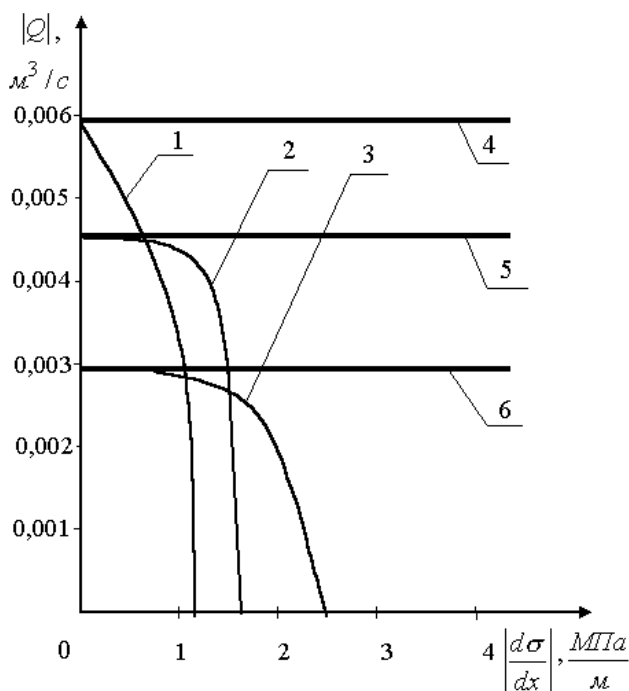


Рисунок 3. Диаграммы зависимостей, соответствующих значению $y_0 = 0$, для движения продукта с проскальзыванием по нижней пластине при реологических параметрах прессуемого материала $\mu' = 0,0047$ Па·сⁿ; $n = 0,2$ и значениях глубины канала шнека: 1 – $h_{u1} = 0,012$ м; 2 – $h_{u2} = 0,009$ м; 3 – $h_{u3} = 0,006$ м, а также $\mu' = 0,062$ Па·сⁿ; $n = 0,2$ и значениях глубины канала шнека: 4 – $h_{u1} = 0,012$ м; 5 – $h_{u2} = 0,009$ м; 6 – $h_{u3} = 0,006$ м.

Список использованной литературы:

1. Полищук В.Ю. Особенности шнекового прессующего механизма экструдера. Тракторы и сельскохозяйственные машины, 1993, № 5. – С. 19-21.
2. Бостанджиян С.А., Столин А.М. Течение неньютоновской жидкости между двумя параллельными плоскостями. Изв. АН СССР, Механика, № 1, 1965. – С. 185-188.
3. Карташов Л.П., Полищук В.Ю., Зубкова Т.М. Моделирование процесса экструдирования в одношнековых прессующих механизмах. Техника в сельском хозяйстве, 1998, № 6. – С. 12-14.
4. Карташов Л.П., Полищук В.Ю., Зубкова Т.М., Ханин В.П. Учет изменяющейся температуры в математической модели экструдера. Техника в сельском хозяйстве, 2000, № 1. – С. 12-14.
5. Карташов Л.П., Полищук В.Ю., Зубкова Т.М. Формирование математической модели движения материала в одношнековом прессующем механизме. Техника в сельском хозяйстве, 1996, № 5. – С. 7-9.

циями, если в секциях не выполняется условие (39), при непрерывных нормальных напряжениях на границе между соседними секциями

$$\sigma_{2i} = \sigma_{2(i+1)-1}$$

имеет вид $M_{ui} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i})^{m_i} + F_{ui} =$

$$= M_{u(i+1)} (\sigma_{2(i+1)-1} - \sigma_{2(i+1)})^{m_{i+1}} + F_{u(i+1)}. \quad (40)$$

Если в i -й секции выполняется условие (38), а в $(i+1)$ -й не выполняется, уравнение неразрывности записывается следующим образом

$$G_{ui} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i})^{m_i} + F_{ui} = M_{u(i+1)} (\sigma_{2(i+1)-1} - \sigma_{2(i+1)})^{m_{i+1}} + F_{u(i+1)}. \quad (41)$$

Наконец, если в соседних секциях выполняется условие (39), уравнение неразрывности имеет вид

$$G_{ui} (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i})^{m_i} + F_{ui} = G_{u(i+1)} \cdot (\sigma_{2(i+1)-1} - \sigma_{2(i+1)})^{m_{i+1}} + F_{u(i+1)}. \quad (42)$$

Полученные зависимости (40), (41), (42) позволяют приближенно вычислять распределение напряжений по длине шнека, а на основании этого производить расчет комплекса параметров эффекта процесса экструдирования.