

## ДИНАМИКА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ, ПОМЕЩЕННОЙ В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Исследуется влияние магнитного поля на динамику пузырька в двух процессах: затухающее адиабатическое колебание пузырька с идеальным газом и схлопывание парового пузырька в динамическом режиме. На основе закона сохранения энергии для второго случая получено расчетное соотношение для ударного повышения давления. В численном исследовании показано, что магнитное поле приводит к быстрому затуханию колебаний газового пузырька и демпфированию ударного давления парового, которое в отсутствие магнитного поля может достигать 100 МПа.

Процессы колебаний газовых и схлопывания паровых пузырьков в вязкой электропроводной жидкости имеют место в МГД-компрессорах и тепловых насосах [1, 2] и представляют интерес с точки зрения расчета этих устройств.

Кроме того, известно [3], что ударное повышение давления при схлопывании кавитационных пузырьков может составлять сотни и тысячи атмосфер (в зависимости от начальных условий) и приводит к кавитационной эрозии проточной части гидравлических устройств, что требует разработки методов защиты конструкции.

В вязкой электропроводной жидкости, расположенной в однородном магнитном поле, к известным механизмам диссипации энергии от сферической полости [4] добавляется дальнедействующий механизм джоулевой диссипации. С одной стороны, он должен приводить к быстрым затуханиям колебаний газовых пузырьков, а с другой – смягчать ударное повышение давления при схлопывании паровых. Ниже исследуется влияние внешнего магнитного поля на динамику сферической полости.

Следует отметить, что на пузырек в электропроводной жидкости с магнитным полем, помимо обычных сил поверхностного натяжения, вязкости и инерции, начинают действовать неравномерные поверхностные напряжения, порожденные электромагнитной силой, которые искажают шаровую форму пузырька. В связи с этим примем вначале допущение о его сферичности, а ниже оценим границы применимости этого допущения.

Пусть в центре сферической системы координат  $r, \theta, \varphi$  расположена сферическая полость, находящаяся в равновесии с окружающей вязкой несжимаемой электропроводной жидкостью. Внутри полости находится идеальный газ (1-ая задача), или влажный пар другой жидкости (2-ая задача). Внешняя магнитная система создаёт во всём объёме жидкости однородное магнитное поле  $V\{0,0,-V\}$ ,  $V = \text{const}$  (в декартовой системе). Воздействием ступенчатого импульса давления в бесконечности пузырек выводится из состояния равновесия.

Следуя [4], выведем уравнение динамики полости при наличии магнитного поля, считая жидкость изотермической.

Уравнения неразрывности, импульсов, законы Ома и Ампера выписываем для жидкой фазы в виде

$$\text{div } v_1 = 0, \quad (1)$$

$$\rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho_1 (v_1 \cdot \nabla) v_1 = -\text{grad } p_1 + f + \mu_1 \nabla^2 v_1, \quad (2)$$

$$f = j \times B, \quad j = \sigma_1 v_1 \times B. \quad (3)$$

Здесь  $f, j, \sigma_1$  – соответственно плотность электромагнитной силы, плотность электрического тока и электропроводность жидкости (индекс 1 в дальнейшем относится к жидкой, а 2 – к дисперсной фазе), а остальные обозначения общепринятые.

В условиях малых магнитных чисел Рейнольдса  $Re_m = 4\pi \cdot 10^{-7} \sigma_1 V_0 a_0 \ll 1$ , где  $V_0$  и  $a_0$  – характерные скорость и радиус пузырька, гидродинамическая часть уравнений магнитной гидродинамики не зависима от электродинамической.

При радиальном течении жидкости вокруг пузырька со скоростью  $\bar{v}_1\{v_1, 0, 0\}$  плотность индуцированного электрического тока равна  $j = \sigma_1 v_1 B \sin \theta i_\varphi$ , а индукция магнитного поля составляет  $B = -B \cos \theta i_r + B \sin \theta i_\theta$ , где  $i_r, i_\theta, i_\varphi$  – единичные векторы физического базиса сферической системы координат, тогда для плотности электромагнитной силы следует выражение

$$f = j \times B = -\sigma_1 v_1 B^2 \sin^2 \theta i_r - \sigma_1 v_1 B^2 \cos \theta \sin \theta i_\theta = f_r i_r + f_\theta i_\theta$$

Среднее значение компоненты  $f_\theta$  на поверхности пузырька равно

$$\langle f_\theta \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_\theta a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 0,$$

а среднее значение радиальной компоненты на поверхности сферы радиусом  $r$  составляет:

$$\langle f_r \rangle = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -\frac{2}{3} \sigma_1 v_1 B^2. \quad (4)$$

Электромагнитная сила оказывает два вида воздействия на пузырек. Своей радиальной компонентой  $f_r$  она перераспределяет давление на поверхности пузырька, так что между полярной и экваториальной точками возникает разность давлений  $\Delta p = \sigma_1 v_{1a} B^2 a$ . Компонента  $f_\theta$  порождает вблизи поверхности пузырька вихревые меридиональные течения, скорость которых на поверхности можно оценить из сравнения сил. В случае маловязкой жидкости один порядок имеют силы инерции и электромагнитная, что дает следующую оценку

$$\frac{v_\theta}{v_{1a}} \approx \frac{Ha^2}{Re}, \quad Ha = aB \sqrt{\frac{\sigma_1}{\mu_1}}, \quad Re = \frac{\rho_1 v_{1a} a}{\mu_1}.$$

В случае вязкой жидкости один порядок имеют силы вязкости и электромагнитная, тогда для скорости находим

$$\frac{v_\theta}{v_{1a}} \approx Ha^2.$$

Возмущение пузырька силами  $\Delta p$  приводит к развитию на его поверхности неустойчивости Рэлея-Тейлора, зависящей от магнитного числа Бонда

$$Bo_m = 4 \frac{\Delta p}{\Sigma/a} = 4 \frac{\sigma_1 v_{1a} B^2 a}{\Sigma/a} = 4 \frac{Ha^2}{Lp}, \quad Lp = \frac{\Sigma/a}{\mu_1 v_{1a} / a}.$$

Обтекание поверхности пузырька жидкостью со скоростью  $v_\theta$  приведет к развитию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, зависящей от магнитного числа Вебера

$$We_m = 2a \frac{\rho_g v_\theta^2}{\Sigma} = 2 \frac{\rho_g v_{1a}^2}{\Sigma/a} \left( \frac{Ha^2}{Re} \right)^2,$$

а в случае вязких жидкостей

$$We_m = 2a \frac{\rho_g v_\theta^2}{\Sigma} = 2 \frac{\rho_g v_{1a}^2}{\Sigma/a} Ha^4.$$

Начало дробления пузырька связывают с превышением чисел Бонда и Вебера некоторых критических  $Bo_m > Bo_{m*}$ ,  $We_m > We_{m*}$ , которые в общем случае должны определяться из опыта, но учитывая, что магнитное поле более интенсивно гасит возмущения, можно отметить, что они должны быть больше, чем  $4\pi^2$  и  $2\pi$  соответственно.

В дальнейшем считаем, что вихревой характер электромагнитной силы не искажает радиального течения жидкости, что справедливо при  $v_\theta/v_{1a} \approx Ha^2/Re \ll 1$ .

При этом допущении из уравнения неразрывности (1) следует зависимость для радиальной компоненты вектора скорости жидкости

$$v_1(r, t) = v_{1a} \frac{a^2}{r^2}, \quad (5)$$

где  $v_{1a}$  – скорость жидкости на межфазной границе.

Заменим в проекции уравнения (2) на радиальное направление электромагнитную силу  $f_r$  её средним значением (4), тогда получим

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\sigma_1 v_1 B^2}{\rho_1} + v_1 \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} - 2 \frac{v_1}{r^2} \right)$$

Если проинтегрировать это уравнение по радиусу  $r$  с учётом выражения (5) и определить постоянную интегрирования по условиям в бесконечности  $p_1(\infty) = p_\infty$ , а затем перейти к давлению на поверхности пузырька  $p_1(a) = p_{1a}$ , то оно сводится к следующему

$$a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_1 B^2}{\rho_1} a \frac{da}{dt} = \frac{p_{1a}(t) - p_\infty}{\rho_1}. \quad (6)$$

Перейдем в этом уравнении от давления в жидкости  $p_{1a}(t)$  к давлению в пузырьке, используя условия равновесия межфазной поверхности [4]:

$$p_{1a}(t) = p_{2a}(t) - 4\mu_1 \frac{1}{a} \frac{da}{dt} - 2 \frac{\Sigma}{a},$$

где  $\Sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения  $\Sigma$ -фазы, тогда уравнение (6) примет вид:

$$a \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_1 B^2}{\rho_1} a \frac{da}{dt} + 4v_1 \frac{1}{a} \frac{da}{dt} + 2 \frac{\Sigma}{a} = \frac{p_{2a}(t) - p_\infty}{\rho_1}. \quad (7)$$

Это уравнение содержит две неизвестные функции  $a(t)$  и  $p_{2a}(t)$ , поэтому требуются дополнительные соотношения.

Рассмотрим вначале задачу о затухающих колебаниях газового пузырька в магнитном поле. Для этого будем считать, что сферическая полость заполнена совершенным газом, давление в котором не зависит от пространственной переменной (гомобаричность). При политропном сжатии (или расширении) давление газа в пузырьке однозначно связано с его радиусом  $p_2(t) = p_2(0)(a_0/a(t))^{3n}$ .

Будем считать, что пузырек выводится из состояния равновесия ступенчатым импульсом давления на бесконечности, и представим величину  $p_\infty$  из уравнения (7) в виде  $p_\infty(t) = p_{0,\infty} + \delta p_\infty(t)$ . Здесь  $p_{0,\infty}$  – давление, при котором пузырёк радиусом  $a_0$  находился в равновесии в жидкости, т. е.  $p_2(0) - p_{0,\infty} = 2\Sigma/a_0$ , а  $\delta p_\infty(t)$  – скачок давления,

выводящий пузырек из равновесия. Эту величину выразим через начальное давление газа в пузырьке, т. е.  $\delta p_\infty(t) = k p_2(0) = \text{const}$ , где  $k$ -параметр возмущения. В этих обозначениях правая часть уравнения (7) принимает удобный для решения вид:

$$\frac{p_2(t) - p_\infty(t)}{\rho_1} = \frac{p_2(0)}{\rho_1} [p_*(t) - (k+1)] + 2 \frac{\Sigma}{a_0},$$

где  $p_*(t) = p_2(t)/p_2(0)$ .

Перейдём в уравнении (7) к безразмерным переменным. Для этого введем в качестве масштаба длин – начальный радиус пузырька  $a_0$ , характерной скоростью пусть будет  $V_0 = \sqrt{p_2(0)/\rho_1}$ , а характерным временем  $t_0 = a_0/V_0 = a_0/\sqrt{p_2(0)/\rho_1}$ . Эти масштабы позволяют ввести следующие числа задачи:

$$\text{Re} = \frac{a_0 V_0}{\nu_1}, \quad \text{Ha} = a_0 B \sqrt{\frac{\sigma_1}{\mu_1}}, \quad \text{We} = \frac{\rho_1 a_0 V_0^2}{\Sigma}$$

соответственно числа Рейнольдса, Гартмана и Вебера, а уравнение (7) привести к виду:

$$\ddot{a}_* = \frac{1}{a_*} \left[ \frac{1}{a_*^{3n}} - (k+1) - \frac{3}{2} (\dot{a}_*)^2 - \frac{4}{\text{Re}} \frac{\dot{a}_*}{a_*} - \frac{2}{\text{We}} \frac{1-a_*}{a_*} - \frac{2}{3} \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \dot{a}_* a_* \right], \quad (8)$$

где  $a_* = a(t)/a_0$ ,  $t_* = t/t_0$ .

Начальные условия для уравнения (8) задаём в виде:  $a_*(0) = 1$ ,  $\dot{a}_*(0) = 0$ .

Ниже представлены результаты численного интегрирования этого уравнения. Исходные данные к расчету принимались следующими: жидкой фазой был галлий с плотностью  $\rho_1 = 6093 \text{ кг/м}^3$ ; коэффициент поверхностного натяжения  $\Sigma = 0,487 \text{ Н/м}$  (данные по ртути), кинематический коэффициент вязкости  $\nu_1 = 3,11 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициент электропроводности  $\sigma_1 = 3,86 \cdot 10^6 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ , начальное давление в пузырьке  $p_2(0) = 80 \text{ кПа}$ , начальный радиус пузырька  $a_0 = 10^{-3} \text{ м}$ , индукция магнитного поля  $B = \{2; 1,5; 1,0\} \text{ Т}$ , параметр возмущения задавался равным  $k = 0,25$ . Этим данным соответствовали следующие масштабы физических величин: характерная скорость  $V_0 = 3,62 \text{ м/с}$ , характерное время  $t_0 = 2,76 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ , и числа задачи:  $\text{Re} = 11650$ ,  $\text{We} = 1097$ ,  $\text{Ha} = \{90, 68, 45\}$ .

Магнитное число Рейнольдса при этих данных составляло  $\text{Re}_m = 1,75 \cdot 10^{-2}$ . Условие малости  $\text{Re}_m$ , для которых только и справедлива система приведенных уравнений, при заданном давлении газа в пузырьке  $p_2(0)$  и, следовательно, характерной скорости  $V_0$ , приводит к ограничению началь-

ного радиуса пузырька  $a_0$ . Принимая для скорости  $V_0 = 5 \text{ м/с}$ ,  $\text{Re}_m = 0,1$ , в среде жидкого галлия для предельно допустимого радиуса пузырька получаем оценку  $a_0 < 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

В средах с меньшей электропроводностью предельно допустимый начальный радиус пузырька будет больше, в средах с большей электропроводностью, чем у галлия, – меньше найденного значения.

На рис. 1 показаны зависимости приведенного радиуса пузырька  $a^*$  от приведенного времени  $t^*$  для различных значений индукции магнитного поля. Характер кривых показывает наличие затухающего колебательного процесса, причем чем выше индукция магнитного поля, тем быстрее гаснут колебания пузырька. Расчеты показывают, что

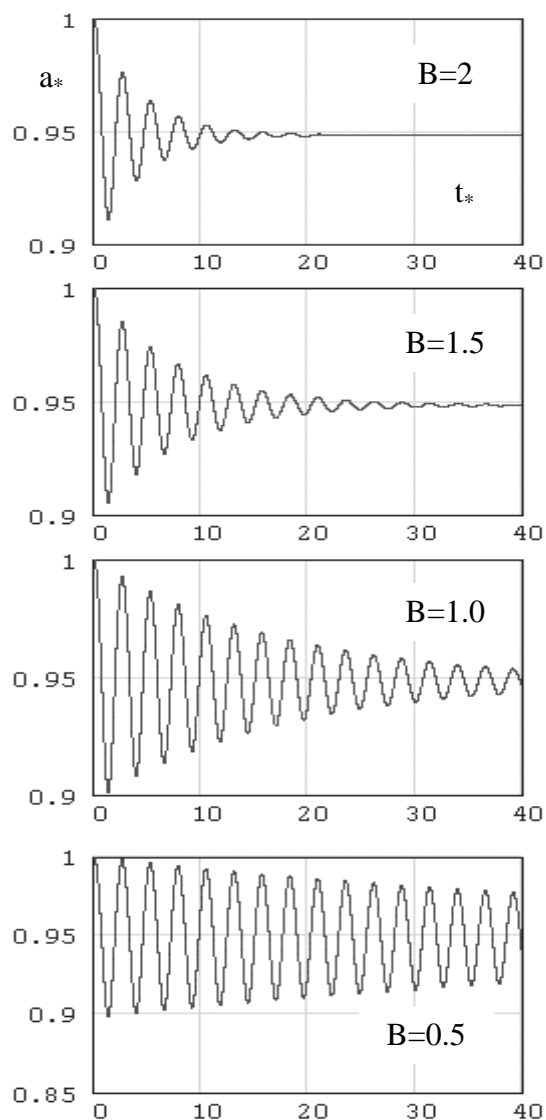


Рисунок 1. Зависимости приведенного радиуса пузырька  $a^*$  от приведенного времени  $t^*$  для различных значений индукции магнитного поля.

с увеличением индукции магнитного поля колебания пузырька становятся аperiодическими.

В процессе затухающих колебаний пузырька периодически изменяется и магнитное число Рейнольдса с амплитудой в начале колебаний  $\sim 2 \cdot 10^{-3}$ .

Линеаризация уравнения (8) позволяет найти коэффициент затухания

$$2m = \frac{8 + \text{Ha}^2}{2\text{Re}} \sqrt{\frac{p_2(0)}{\rho_1 a_0^2}}$$

и частоту затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - m^2} = \sqrt{3\gamma - \left(\frac{8 + \text{Ha}^2}{4\text{Re}}\right)^2} \sqrt{\frac{p_2(0)}{\rho_1 a_0^2}},$$

где  $\omega_0$  – собственная частота колебаний газового пузырька.

Так, при  $B=2$  Т согласно последней формуле частота колебаний равна  $\omega=7,4 \cdot 10^3$  рад/с. По результатам численного интегрирования она оказывается равной  $7,67 \cdot 10^3$  рад/с.

Представляет интерес величина рассеиваемой кинетической энергии в процессе затухающих колебаний. В случае адиабатического процесса колебаний энергия может рассеиваться через механизмы вязкой и джоулевой диссипации (акустическим излучением энергии пренебрегаем). Рассчитаем эти энергии.

При радиальном течении вязкой несжимаемой жидкости диссипативная функция определена выражением

$$q_\mu = 12\mu_1 \frac{v_1^2}{r^2} = 12\mu_1 \frac{a^4 v_{1a}^2}{r^6},$$

тогда мощность вязких сил во всем пространстве жидкости в процессе колебаний пузырька определится выражением

$$Q_\mu(t) = \int_V q_\mu dV = 48\pi\mu_1 a^4 v_{1a}^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^4} = 16\pi\mu_1 a_0 V_0^2 a_*^2 v_{a*}^2.$$

Интегрируя это выражение по времени, найдём энергию, рассеиваемую колеблющимся пузырьком в окружающей жидкости через механизм вязкой диссипации

$$Q_\mu(t) = \int_V q_\mu dV = 48\pi\mu_1 a^4 v_{1a}^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^4} = 16\pi\mu_1 a_0 V_0^2 a_*^2 v_{a*}^2.$$

Плотность объёмного тепловыделения за счет джоулевой диссипации равна

$$q_j = \frac{j^2}{\sigma_1} = \sigma_1 B^2 \sin^2 \theta \frac{a^4 v_{1a}^2}{r^4},$$

мощность джоулева тепловыделения во всем объёме жидкости определится интегралом

$$Q_j(t) = \int_V q_j dV = \sigma_1 B^2 a^4 v_{1a}^2 \int_a^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 \theta}{r^2} dr d\theta d\varphi = \frac{8\pi}{3} \sigma_1 B^2 a_0^3 V_0^2 a_*^3 v_{a*}^2.$$

Интегрируя это выражение по времени процесса, получим энергию, рассеиваемую колеблющимся пузырьком в окружающей жидкости через механизм джоулевой диссипации

$$Q_{дж} = \int_0^\infty Q_j(t) dt = \frac{8\pi}{3} \sigma_1 B^2 a_0^3 V_0^2 t_0 \int_0^\infty a_*^3 v_{a*}^2 dt_* = \frac{8\pi}{3} \sigma_1 B^2 a_0^4 V_0 I.$$

Расчетно диссипацию энергии  $Q_{дж}$  можно отождествить с эффективной вязкостью жидкости. Из равенства  $Q_{eff} = Q_{diss} + Q_{дж}$  находим эффективную вязкость

$$\mu_{eff} = \mu_1 \left(1 + \frac{\text{Ha}^2 I}{6 J}\right) \quad k_\mu = \frac{\mu_{eff}}{\mu_1} = \left(1 + \frac{\text{Ha}^2 I}{6 J}\right).$$

В табл. 1 приведены некоторые результаты расчета диссипируемой энергии от колеблющегося пузырька в жидком галлии.

Равновесная работа расширенной системы в адиабатическом процессе сжатия пузырька определяется выражением

$$L = - \int_{p_0}^{p_0 + \delta p} V dp + 4\pi \Sigma (a_0^2 - a^2)$$

и для рассматриваемого примера по модулю составляет  $L=1.753 \cdot 10^{-4}$  Дж. Доля же рассеиваемой энергии в неравновесном процессе сжатия пузырька  $(Q_{дж} + Q_{diss})/L$  изменяется от 0,024 при  $B=0,1$  Т до 0,038 при  $B=2$  Т, т. е. не превышает 4%. Из табл. следует, что энергия, рассеиваемая через механизм вязкой диссипации, с увеличением индукции магнитного поля резко снижается. Причиной этому является значительное снижение времени релаксации пузырька и числа колебаний с повышением индукции магнитного поля.

Таблица 1. Результаты расчета диссипируемой энергии от колеблющегося пузырька в жидком галлии

Физическая величина.	Магнитное поле, В, Тесла	0,1	0,5	1,0	2,0
Вязкая диссипация, Дж	$Q_{diss}$	$1,023 \cdot 10^{-6}$	$8,509 \cdot 10^{-8}$	$2,147 \cdot 10^{-8}$	$5,356 \cdot 10^{-9}$
Джоулева диссипация, Дж	$Q_{дж}$	$3,125 \cdot 10^{-6}$	$6,495 \cdot 10^{-6}$	$6,559 \cdot 10^{-6}$	$6,575 \cdot 10^{-6}$
Интеграл	J	2,965	0,247	0,062	0,016
Интеграл	I	2,667	0,222	0,056	0,014
Время релаксации $\theta$	T	4000	375	90	20
Коэффициент вязкости	$k_\mu$	4,053	77,3	306,4	1229

Рассмотрим теперь задачу об ударном повышении давления при схлопывании парового пузырька. В предложенном в [1] МГД-компрессоре (и тепловом насосе) на отдельных участках циркуляционного контура имеет место течение жидкого металла с фреоном. При понижении давления в потоке образуются паровые пузырьки. Попадая в область повышенного давления, они будут схлопываться, вызывая местный гидравлический удар, приводящий к разрушению проточной части МГД-компрессора, т. е. кавитационной эрозии. В жидких металлах интенсивный отвод теплоты с межфазной поверхности обусловлен большими коэффициентами теплопроводности, поэтому схлопывание парового пузырька происходит в изотермических (или изобарических) условиях: именно такие процессы порождают ударные явления при кавитации. Давление пара в пузырьке  $p_s$  при этом однозначно определяется его температурой  $T_s$  и может быть рассчитано по уравнению Клапейрона-Клаузиуса.

Представим правую часть уравнения (7) в виде

$$\frac{p_2(t) - p_\infty}{\rho_1} = \frac{p_s(T) - p_{0,\infty}}{\rho_1} - \frac{\delta p_\infty(t)}{\rho_1}$$

Возмущающее давление  $\delta p_\infty(t)$  считаем постоянным; его можно выразить через лапласово давление  $\delta p_\infty = k \frac{2\Sigma}{a_0}$ , где  $a_0$  – по-прежнему равновесный радиус пузырька, а  $k$  – параметр возмущения.

Уравнение (7) теперь принимает вид:

$$\ddot{a}_* = -\frac{3}{2} \frac{1}{a_*} (\dot{a}_*)^2 - \frac{4}{Re} \frac{\dot{a}_*}{a_*^2} - \frac{2}{We} \frac{1}{a_*} \left( k - 1 - \frac{1}{a_*} \right) - \frac{2}{3} \frac{Ha^2}{Re} \dot{a}_*$$

Начальные условия для этого уравнения задаются в виде:  $t_* = 0, a_* = 1, \dot{a}_* = 0$ .

На рис 2 показаны графики зависимости приведенного радиуса пузырька от приведенного времени для двух случаев: в присутствии магнитного поля (кривая 1) и в его отсутствии (кривая 2).

Расчеты проводились для жидкого галлия, с указанными ранее теплофизическими характеристиками, и пара фреона – 11 при температуре 5°C. Давление насыщенного пара в пузырьке составляло  $p_s = 49,7$  кПа, начальный радиус пузырька задавался равным  $a_0 = 3 \cdot 10^{-3}$  м, параметр возмущения назначался из условия, чтобы конечное давление в жидкости достигало 100 кПа, и составлял  $k=155$ . Индукция магнитного поля была равна  $B=2$  Т. Характерное время при этих данных составляло  $t_0 = 1,05 \cdot 10^{-3}$  с, а характерная скорость  $V_0 = 2,85$  м/с. Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 2 показывает, что магнитное поле затягивает время схлопывания па-

рового пузырька. Скорости межфазной границы в момент схлопывания достигают нескольких тысяч метров за секунду.

Следует отметить, что на последней стадии схлопывания пузырька численное интегрирование требует применения алгоритмов с переменным шагом. Методы численного интегрирования с постоянным шагом дают проскок момента схлопывания.

Одной из кинематических особенностей схлопывающихся кавитационных пузырьков является достижение межфазной границей максимального расхода  $A_* = \dot{a}_*^2 v_{a_*}$  в процессе схлопывания. Действительно, при  $t^*=0$  (начало процесса) окружающая жидкость неподвижна  $v_{a_*} = 0$  и  $A^*=0$ . После исчезновения пузырька  $a^*=0$  и расход  $A^*=0$ , следовательно, функция  $A_*(a_*)$  должна пройти через максимальное значение внутри интервала. Эту особенность иллюстрируют графики, приведенные на рис. 3, рассчитанные для кривых 1 и 2 на рис. 2. Кривые показывают, что наличие магнитного поля снижает величину расходной функции и смещает критическую точку в сторону больших радиусов и, следовательно, должно демпфировать ударное давление.

Принятое допущение о малости магнитных чисел Рейнольдса в процессе схлопывания паро-

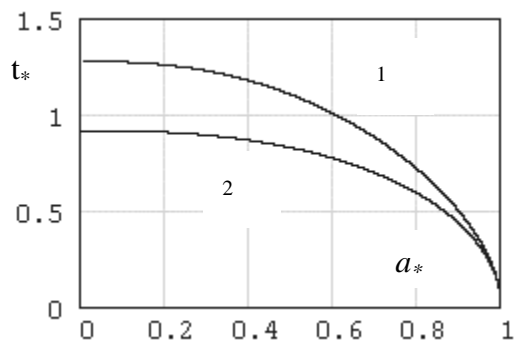


Рисунок 2.

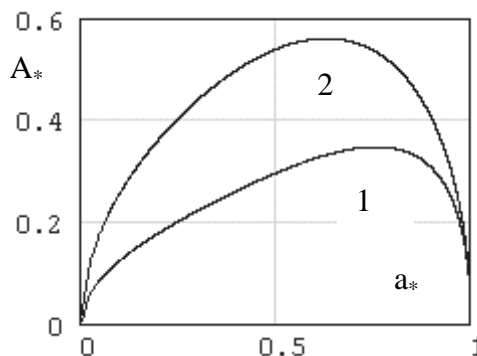


Рисунок 3.

вого пузырька может нарушаться: на последней стадии этого процесса скорости электропроводной жидкости вблизи пузырька достигают звуковых, в окружающей жидкости индуцируются высокие плотности электрического тока, наводящие в пространстве собственное магнитное поле. При схлопывании пузырька индуцированное магнитное поле суммируется с приложенным в пространстве пузырька и направлено против него в жидкости. При  $Re_m < 1$  отношение индуцированного магнитного поля к приложенному характеризуется магнитным числом Рейнольдса.

На рис. 4 представлена зависимость магнитного числа Рейнольдса от приведенного радиуса в процессе схлопывания парового пузырька для различных значений приложенного магнитного поля: кривая 1 –  $B=0,5$  Т, 2 –  $B=1,0$  Т и 3 –  $B=1,5$  Т. Начальный радиус в этих расчетах принимался равным  $a_0 = 1$  мм. Графики показывают, что на интервале  $0 < a_* < 0,05$  (последняя стадия) магнитное число Рейнольдса начинает резко нарастать и в момент исчезновения пузырька превышает единицу: скорость межфазной границы растет быстрее, чем уменьшается радиус, и в итоге  $Re_m \sim \dot{a}(t)a(t)$  увеличивается, причем чем выше приложенное магнитное поле, тем меньше магнитное число Рейнольдса.

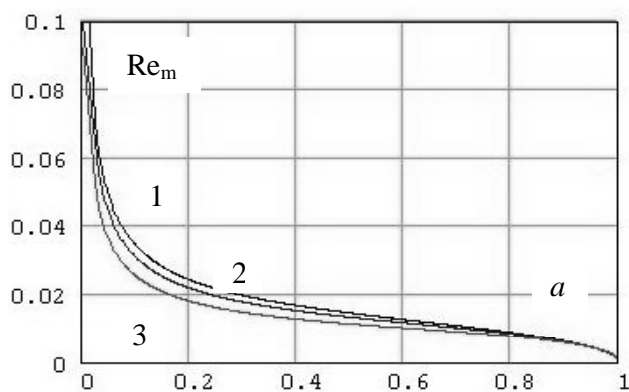


Рисунок 4.

Таким образом, на последней стадии схлопывания парового пузырька принятое допущение о малости чисел  $Re_m$  нарушается и решение уравнения Релея носит лишь качественный характер: магнитное поле на этой стадии «вмораживается» в электропроводную жидкость и переносится ею в центр исчезающего пузырька, т. е. пузырёк является концентратором линий магнитной индукции.

Завершающая стадия интересна и тем, что она «включает» новый механизм демпфирования гид-

равлического удара, обусловленный перекачкой части кинетической энергии жидкости в энергию магнитного поля. По этой причине можно ожидать большего ослабления гидравлического удара, чем нижеприведенные оценки.

Отметим также, что при прохождении пузырьком точки критического расхода (рис. 3) условие малости чисел  $Re_m$  ещё не нарушается. Однако при очень больших возмущающих воздействиях на пузырёк критическая точка может сместиться на интервал  $0 < a_* < 0,05$  и максимум расхода будет достигаться при  $Re_m \sim 1$ . В этом случае расчет процесса, очевидно, следует вести с привлечением электродинамических уравнений Максвелла.

Вернемся к вопросу о целостности и сферичности парового пузырька при его схлопывании. Очевидно, что пузырек не будет дробиться, если

$$Bo_m = 4 \frac{\sigma_1 B^2}{\Sigma} a_0^2 v_0 a_*^2 v_{a*} < Bo_{m*} \approx 4\pi^2, \quad (9)$$

$$We_m = 2 \frac{\rho_g v_0^2}{\Sigma / a_0} a_* v_{a*}^2 \left( \frac{Ha^2}{Re} \right)^2 < We_{m*} \approx 2\pi.$$

Числа Бонда в процессе схлопывания парового пузырька проходят через локальный максимум, обусловленный максимумом расходной функции  $A_* = a_*^2 v_{a*}$ . Очевидно, что эти значения  $Bo_m$  наиболее опасны с точки зрения развития неустойчивости Рэлея-Тейлора. Из выражения (9) при  $A_* \approx 0.5$  следует ограничение на начальный радиус пузырька

$$a_0 < a_{max} = \sqrt{\frac{2\pi^2 \Sigma}{\sigma_1 v_0 B^2}}.$$

В частности, при  $B=1$  Т и  $v_0 = 2.85$  м/с получаем  $a_{max} = 1$  мм.

На рис. 5 изображены графики чисел Бонда и Вебера в процессе схлопывания парового пузырька, полученные при  $B=1$  Т и  $a_0 = 1$  мм. Кривая  $Bo_m(a_*)$  проходит через максимум в момент прохождения пузырьком критической точки на кривой  $A_*(a_*)$ . Число же Вебера начинает существенно нарастать только после десятикратного уменьшения радиуса, устремляясь к бесконечности при исчезновении пузырька. На интервале  $a_* \in [0; 0.1)$  создаются условия для развития неустойчивости Гельмгольца-Кельвина, но успеет ли пузырек раздробиться в оставшееся время жизни, в рамках принятой модели ответить невозможно, т. к. одновременно с ростом  $We_m$  начинают нарастать индуцированное магнитное поле и вместе с ним критические числа  $We_{m*}$ .

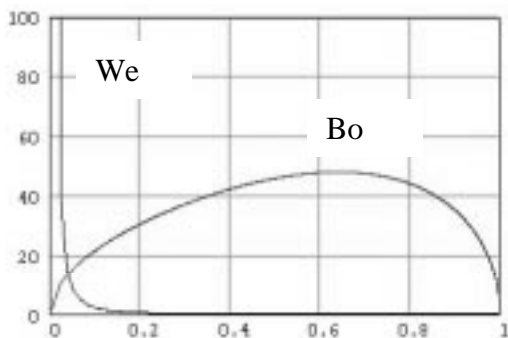


Рисунок 5.

Кривые на рис. 5 показывают, что при надлежащем выборе начального радиуса, по крайней мере на интервале  $a_* \in (0.1; 1]$ , пузырек не раздробится и сохранит свою целостность. Однако из-за возмущений поверхность пузырька сферической не будет. Тем не менее, уравнение Рэлея-Ламба в целом правильно описывает изменение объема пузырька, несмотря на его несферичность [4].

Оценку величины ударного повышения давления в жидкости от кавитационного пузырька можно получить из следующих рассуждений. В критической точке (opt) кривой  $A_*(a_*)$  скорость в окружающей жидкости также достигнет максимального значения

$$v_{\max}(r, t) = A_{*opt} \frac{a_0^2 V_0}{r^2},$$

а кинетическая энергия всей окружающей жидкости в этот момент времени определится интегралом

$$E = \int_V \frac{1}{2} \rho_1 v_{\max}^2 dV = \int_a^\infty \left( \frac{1}{2} \rho_1 v_{\max}^2 \right) 4\pi r^2 dr = 2\pi \rho_1 \frac{A_{*opt}^2}{a_{*opt}^2} a_0^3 V_0^2.$$

После схлопывания пузырька эта кинетическая энергия переходит в упругую потенциальную

энергию некоторого объема жидкости. Естественно допустить, что этим макрообъемом ударно сжатой жидкости является сфера с радиусом  $a_{opt}$ , ибо нет других характерных величин: межфазная граница, после прохождения значения  $a_{opt}$ , уже не может поддерживать навязанного жидкой фазе расхода, поэтому ведет себя как затвор в трубе при непрямом гидравлическом ударе, порождая тем самым возникновение ударной волны. Упругая потенциальная энергия объема  $V_{opt} = (4/3)\pi a_{opt}^3$  найдется по закону Гука

$$\Pi = \frac{1}{2} \chi_1 V_{opt} p_{\max}^2,$$

где  $\chi_1$  – изотермический коэффициент сжимаемости жидкой фазы, а  $p_{\max}$  – ударное повышение давления.

Приравняв энергии E и  $\Pi$ , для ударного давления находим выражение

$$p_{\max} = \frac{A_{*opt}}{a_{*opt}^2} \sqrt{3 \frac{\rho_1}{\chi_1}} V_0. \tag{10}$$

Приведём расчет ударного давления для кривых 1 и 2 на рис. 3. На кривой 1 (магнитное поле 2 Т) параметры в критической точке составляют:  $A_{*opt} = 0,347$ ;  $a_{*opt} = 0,773$ . На кривой 2 ( $B=0$ ) эти же величины равны:  $A_{*opt} = 0,560$ ;  $a_{*opt} = 0,639$ . Коэффициент сжимаемости  $\chi_1 = 3.086 \cdot 10^{-11}$  1/Па, (данные по ртути),  $V_0 = 2,85$  м/с. Остальные параметры были указаны выше. При схлопывании пузырька по кривой 1 ударное давление по формуле (10) составляет  $p_{\max} = 40,3$  МПа, а по кривой 2 –  $p_{\max} = 95,4$  МПа.

Таким образом, магнитное поле двукратно снижает ударное давление. В случае воды при температуре 20°C и прочих равных параметрах аналогичный расчет приводит к меньшему значению ударного давления  $p_{\max} = 35,7$  МПа.

**Список использованной литературы:**

1. А.С.(СССР) № 1663346. Холодильная машина // Васильев А.П., Кирко И.М. и др. – Оpubл. в БИ., 1991, № 26.
2. Жидкометаллический МГД-компрессор // Васильев А.П., Бондаренко В.А., Тараков Д.А., Прокопенко А.Д. – Холодильная техника. – 1991. – № 12. – С.22-24.
3. Дж. Бэтчелор. Введение в динамику жидкости. М.: Мир., 1973. – 757 с.
4. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука. – 1978. – 336 с.