

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИМИТАЦИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В статье приведены алгоритмы моделей систем массового обслуживания (СМО) и сетей СМО, основанные на методе агрегатов. Получены априорные оценки точности и длительности имитационных экспериментов, что важно при практическом моделировании.

Моделирование непрерывных цепей Маркова основано на имитации потоков событий, переводящих цепь из одного состояния в другое в случайные моменты времени и управляющих переходами цепи. Такой метод моделирования называют событийным. В алгоритмах событийного моделирования присутствуют сложные логические связи между состояниями цепи и матрицей переходов.

Рассмотрим моделирование отдельной системы массового обслуживания (СМО) и сетей СМО, которые отражают различные режимы функционирования систем управления. Предположим, что входной поток заявок является рекуррентным и задано распределение интервала времени между последующими заявками. Время обслуживания случайно и тоже имеет некоторую заданную функцию распределения. Пусть M – число обслуживающих приборов (каналов) и N – общее число заявок, которые могут одновременно находиться в системе, при этом $(N - M) \geq 0$ – число заявок, находящихся в очереди.

Состояние модели будем характеризовать переменной n – числом заявок, находящихся в системе. Переменная состояния n изменяется в двух случаях: в момент поступления очередной заявки в систему и в момент ее ухода. Для модели необходимо хранить значения трех моментов времени: t_n – момент поступления очередной заявки, t_y – момент ухода ближайшей заявки, T – время функционирования системы. В момент t_n необходимо выполнить следующую последовательность действий: 1) проверить, может ли заявка поступить на обслуживание или она получит отказ; 2) текущее состояние увеличить на единицу, если заявка поступает на обслуживание; 3) определить следующий момент прихода очередной заявки; 4) учесть изменения в системе при вычислении функционала. Перечисленную последовательность действий назовем реакцией модели на поступление очередной заявки.

В момент времени t_y необходимо выполнить следующие действия: 1) уменьшить на единицу переменную состояния n ; 2) если очередь не пуста, то ближайшую заявку из очереди поставить на обслуживание и определить момент времени, когда она будет обслужена; 3) в блоке измерения (вычисления функционала) зафиксировать момент изменения системы. Это реакция модели на уход заявки из системы. На рисунке 1 представлена укрупненная схема описанного выше алгоритма. Основным блоком здесь является блок управления. В нем определяется ближайшее событие, которое должно наступить в модели. Выбирая мини-

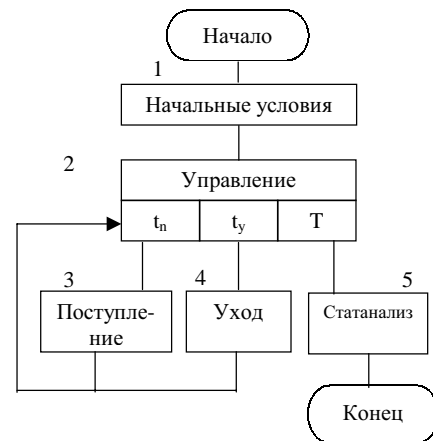


Рисунок 1.

мальное из значений t_n , t_y , T , управление передается в соответствующий блок.

На рисунках 2а и 2б представлены подробные схемы алгоритмов блоков 3 и 4. В блоке 1 (рисунок 2а) упоминаются такие данные модели, как длина очереди, время ожидания, загрузка каналов и др. В блоке 5 определяется номер k свободного канала, при этом для многоканальной системы t_y является массивом (для каждого канала хранится свое значение момента окончания обслуживания). Случайная величина – время обслуживания $t_{обсл}$ имитируется согласно заданному закону распределения. В блоке 6 к текущему времени добавляется значение имитируемой случайной величины $t_{пост}$ – интервала времени между заявками входного потока.

В блоке 4 (рисунок 2б), при условии, что в системе нет заявок, переменной $t_y(k)$ присваивается бесконечно большое значение. После окончания моделирования результаты измерений подвергаются статистической обработке с применением элементов выборочного метода, теории корреляционного, дисперсионного и факторного анализа.

Рассмотрим теперь пример стохастической сети в виде модели мультипрограммной системы оперативной обработки, представленной на рисунке 3.

Здесь система 1 моделирует работу процессора (процессоров), системы 2 и 3 – работу внешних устройств: селекторного и мультиплексного каналов. Заявки в систему поступают из источника И и после обслуживания покидают сеть – уходят во внешнюю среду С. Опишем те модули (блоки), которые необходимы для построения модели системы. Система массового обслу-

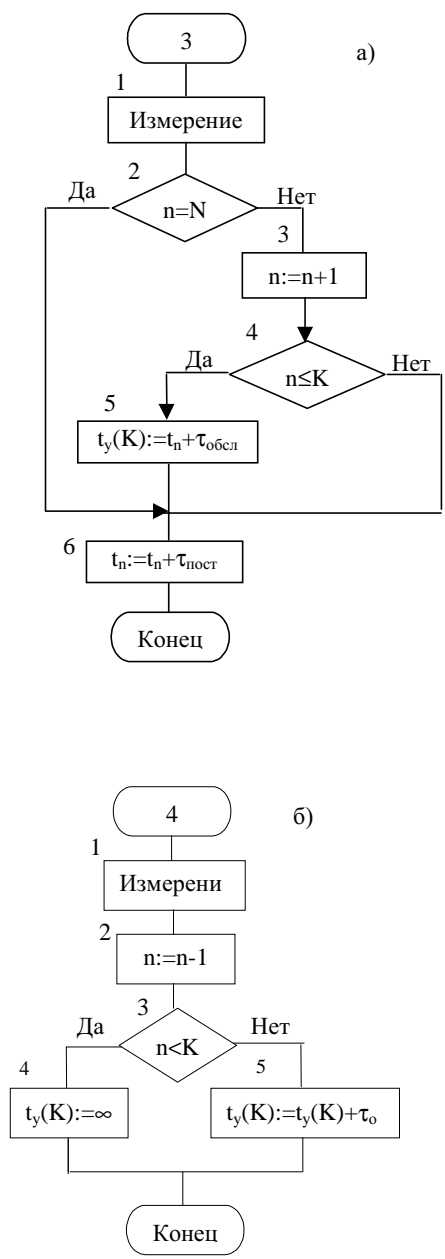


Рисунок 2.

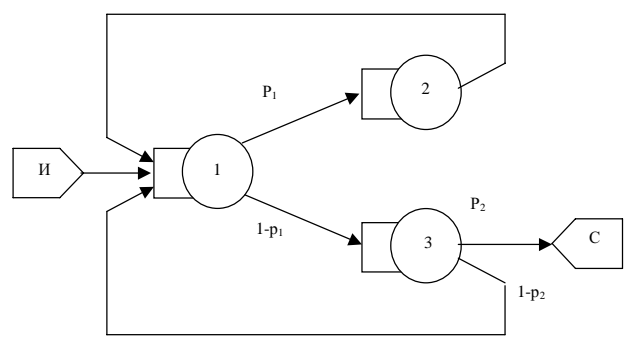


Рисунок 3.

живания является одним из этих модулей. По сравнению с вышерассмотренной моделью массового обслуживания в этом модуле исключим блоки измерения, управления, установки начальных значений и статистического анализа, оставив только блок реакции на поступление очередной заявки и ее уход из системы.

По терминологии Бусленко Н.П. будем называть этот модуль агрегатом. Здесь вход А соответствует отработке реакции на поступление заявки в систему, а блок В – на уход. После постановки заявки на обслуживание или в очередь управление передается на другие агрегаты через выход С, а после ухода – через Д. Полная схема, соответствующая модели, приведена на рисунке 4. Здесь блок И1 генерирует поток заявок с заданными свойствами, а агрегаты, имеющие один вход и два выхода, обеспечивают вероятностные развилки с заданными вероятностями. Измерительные модули могут подключаться к различным точкам модели и фиксировать значения требуемых показателей функционирования системы. Как видно из последнего рисунка, схема алгоритма для сетевой модели сохранила свои основные черты такими же, как и в случае одиночной СМО.

Рассмотренный способ описания модели СМО и сети СМО назовем методом агрегатов, и здесь основными элементами модели системы являются устройства. В каждом устройстве производится измерение параметров поступления и ухода, выбор направления передачи заявок от данного узла к другому и поэтому активными элементами модели являются устройства.

При другом подходе, реализованном в универсальном языке имитационного моделирования дискретных систем GPSS, напротив, активными элементами являются заявки, которые фиксируют информацию о перемещении по отдельным подсистемам моделируемой системы. Для описания модели необходимо разработать алгоритм прохождения заявки через устройства (подсистемы) модели и досконально описать все возможности каждой заявки. При этом чем больше заявок с индивидуальными свойствами, т. е. разнотипных заявок, тем сложнее описание. В этом смысле на языке GPSS затрудняется моделирование систем, в которых устройства по отношению к заявкам наделены различными свойствами.

Длительность имитационного эксперимента зависит от заданной точности оценок искомых характеристик модели. При независимых выборочных значениях параметров и при заданных доверительном интервале и доверительной вероятности требуемый объем выборки равен $N = K^2 D^*(Y) / \delta^2$, где $\Phi(K) = p_K$ – доверительная вероятность; $\Phi(\chi)$ – функция Лапласа; $D^*(Y)$ – оценка дисперсии выходной переменной; δ – доверительная область. В случае зависимых испытаний оценку $D^*(Y)$ следует увеличить, умножив на эквивалентное число зависимых испытаний:

$$N_{экс} = 1 + 2 \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{N} \right) \rho_i, \quad (1)$$

где ρ_i – отношение значения корреляционного момента к центральному моменту второго порядка.

Рассмотрим процесс изменения текущего числа заявок, находящихся в очереди или на обслуживании в системе массового обслуживания (СМО). На рисунке 5 показана реализация процесса изменения очереди к СМО.

Пусть U – длительность периода занятости, τ_0 – период простоя, следующий за периодом занятости. Тогда среднее число заявок в системе на периоде занятости

$$\tilde{Y}_u = \frac{1}{u + \tau_0} \int_0^u Y_u(t) dt. \quad (2)$$

Математическое ожидание величины (2) по всем возможным траекториям $Y(t)$ на периоде занятости

$$\bar{y} = M(\tilde{Y}_u) = M \left[\frac{1}{u + \tau_0} \int_0^u Y_u(t) dt \right]. \quad (3)$$

Оценку величины \bar{y} найдем методом имитационного моделирования по одной достаточно длинной траектории

$$\tilde{Y} = \frac{1}{T} \int_0^T Y_T(t) dt, \quad (4)$$

где T – длительность моделирования.

Вычисление интеграла (4) ввиду того, что подинтегральная функция является кусочно-постоянной, сводится к суммированию. При $T \rightarrow \infty$ оценка (4) стремится к оцениваемому параметру (3). Точность оценки (4) определим, используя асимптотическую нормальность \tilde{Y} . Тогда дисперсия оценки \tilde{Y}

$$D(\tilde{Y}) = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $K(\tau)$ – корреляционная функция процесса $Y(t)$.

Оценка корреляционной функции будет

$$\tilde{K}(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} (Y_T(t) - \tilde{Y})(Y_T(t + \tau) - \tilde{Y}) dt, \quad (6)$$

а при $\tau=0$ получим оценку дисперсии. Введя понятие интервала, эквивалентного одному независимому испытанию, $T_{экр}$ получим:

$$D(\tilde{Y}) = \frac{K(0)}{T} 2 \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K(\tau) d\tau = \frac{K(0)}{T} T_{экр}.$$

Отсюда для того чтобы оценить точность оценки среднего значения числа заявок, прибывающих в СМО, необходимо определить оценку дисперсии $\tilde{K}(0)$ и оценку интервала $T_{экр}$, где

$$T_{экр} = \frac{2}{\tilde{K}(0)} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \tilde{K}(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Оценка величины (7) может производиться так же, как и в случае дискретных измерений. Перечисленные выше параметры найдем методом диффузионной аппроксимации. Опуская математические выкладки, запишем оценку

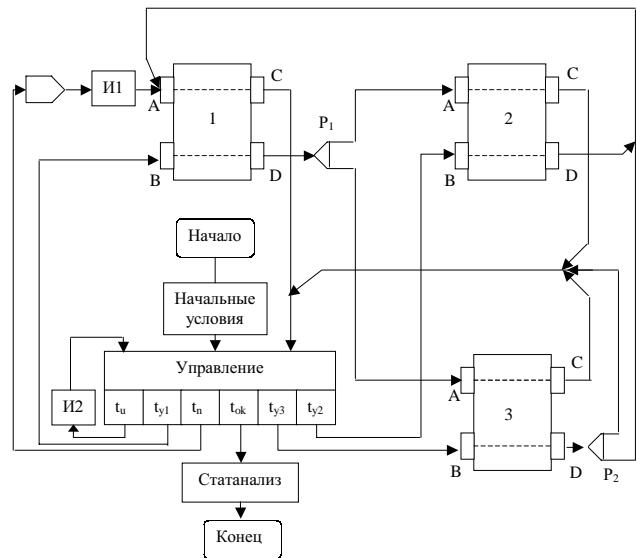


Рисунок 4.

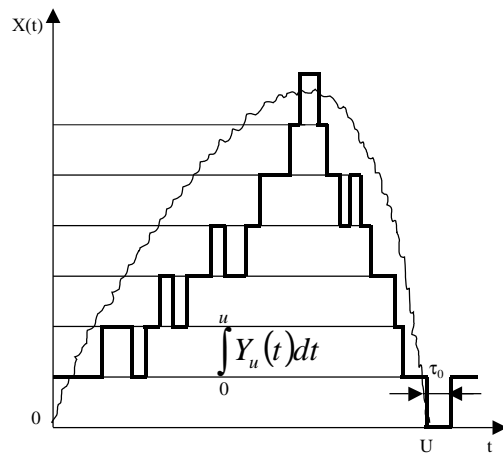


Рисунок 5.

$$T_{экр} = \left(\frac{b}{a^2}\right) \left(1 + 6b^2/a^2\right) \left(1 + 3b^2/a^2\right), \quad (8)$$

где $a = 1/\bar{\tau}_\lambda - 1/\bar{\tau}_\mu$ – коэффициент сноса процесса $X(t)$; $b = D_\lambda/\bar{\tau}_\lambda^3 + D_\mu/\bar{\tau}_\mu^3$ – коэффициент диффузии; $\bar{\tau}_\lambda$ и D_λ – среднее и дисперсия интервала времени между заявками входного потока; $\bar{\tau}_\mu$ и D_μ – среднее и дисперсия времени обслуживания; $X(t)$ – диффузионный процесс, аппроксимирующий дискретный процесс $Y(t)$.

Дисперсию оценки среднего значения \tilde{Y} по интервалу T с учетом (8) можно определить по формуле:

$$D(\tilde{Y}) = D(Y) T_{экр} / T = b / (12a^2 T) \left(1 + 6b^2/a^2\right). \quad (9)$$

При коэффициенте загрузки $\rho = \bar{\tau}_\lambda/\bar{\tau}_\mu \approx 1$ формулы (8) и (9) позволяют оценить величины $T_{экр}$ и $D(\tilde{Y})$. Получим:

$$T_{экр} \approx 2 \frac{D_\lambda \rho^3 + D_\mu}{\bar{\tau}_\mu (1 - \rho)^2}; \quad D(\tilde{Y}) \approx \frac{(D_\lambda \rho^3 + D_\mu)^3}{2T \bar{\tau}_\mu^5 (1 - \rho)^4}.$$

Отсюда следует, что при заданной точности трудоемкость имитационного эксперимента с моделями СМО быстро возрастает при $\rho \rightarrow 1$.

Относительная погрешность выражается величиной

$$\delta = \sqrt{D(\tilde{Y})/\tilde{Y}} \approx \sqrt{\frac{2(D_\lambda \rho + D_\mu)}{\bar{\tau}_\mu T} \frac{1}{1-\rho}},$$

которая возрастает при $\rho \rightarrow 1$.

Для простого примера СМО в случае $Dl=Dm=1$, $\bar{\tau}_\mu=1$, $T=\bar{\tau}_\mu M$ и $\gamma=0.9$, получим $\delta=20/\sqrt{M}$, и значение относительной погрешности, равное 1%, достигается при $M=4\text{Ч}10^6$, т. е. при прохождении через систему около 4 млн. заявок. При $\rho=0,6$ необходимое для достижения указанной точности число заявок уменьшится только в 16 раз.

Список использованной литературы:

- 1 Вентцель Е.Е. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 552 с.
- 2 Бусленко Н.П. Метод статистического моделирования. – М.: Наука, 1968. – 365 с.
- 3 Кругликов В.К. Вероятностный машинный эксперимент в приборостроении. – Л.: Машиностроение, Ленинградское отделение, 1985. – 287 с.