

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКА ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ В РЕГИОНЕ

Динамическое взаимодействие показателей социально-экономических процессов предлагается аппроксимировать непрерывной диффузионной моделью. Поставлены начальные и краевые условия различных вариантов функционирования объекта исследования и предложен численно-аналитический метод решения поставленных задач.

На динамику взаимодействия спроса и предложения на трудовые ресурсы, как и на любые товары (услуги), оказывают влияние устойчивость процессов взаимодействия взаимодополняющих и взаимозаменяющих товаров (услуг) в условиях рынка, переходные процессы при сдвиге рыночного равновесия, поведение потребителя (экономических структур) на изменение конъюнктуры и другие различные факторы, объективно присутствующие в такой сложной сфере, как экономика (микроэкономика). В таких системах или невозможно, или сложно разграничить влияние различных по своей природе факторов, и их предпочитают описывать диффузионными моделями, а сами системы называют диффузными.

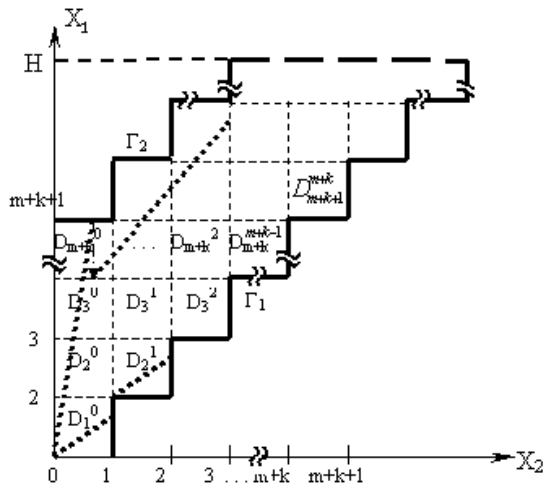


Рисунок 1

Работу «к» подразделений биржи по трудоустройству специалистов, представляющую собой систему по обслуживанию неоднородного потока заявок, можно декомпозицией разбить на подсистемы по обслуживанию однородных потоков. Будем считать, что количество специалистов одного профиля, которые могут зарегистрироваться, ограничено потенциальными потребностями региона в специалистах данного профиля. В случае превышения этих потребностей заявителю в регистрации отказывается и предлагается переквалифика-

ция и т. п. Специалисты, ожидающие вакансии, могут выбывать из очереди необслуженными (нетрудоустроенными), например в связи со сменой места жительства или сменой вида деятельности.

Представим математическую модель функционирования структуры по обслуживанию однородного потока требований в виде системы массового обслуживания (СМО) типа GI/G/k/m (с произвольным распределением времени между соседними поступлениями в рекуррентном потоке заявок; с произвольным распределением времени обслуживания) с конечной очередью и с потерями (отказами). Здесь m – емкость накопителя – максимально возможное число клиентов, ожидающих обслуживания, k – число обслуживающих приборов (подразделений биржи).

Обозначим  $N_1(t)$  – число заявок, поступивших в СМО к моменту времени t;  $N_2(t)$  – число заявок, покинувших СМО (востребованных специалистов) к моменту времени t;  $L(t)=[X_1]-[X_2]$  – число заявок в системе на момент времени t;  $N = \max L(t) = m+k$ .

Рассмотрим двумерный диффузионный процесс  $X = \{X_1(t), X_2(t)\}$ , компоненты  $X_1(t)$  которого аппроксимируют на периоде занятости  $N_1(t)$ . В области D, плоскости  $(X_1, X_2)$ , определяемой условиями  $0 \leq L(t) \leq m+k$  (Рисунок 1), плотность  $\omega(t, x_1, x_2)$  распределения вероятностей двумерного диффузионного процесса удовлетворяет уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{b_i}{2} * \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^2} - a_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right], \quad (1)$$

где коэффициенты сноса  $a_i$  и диффузии  $b_i$  задаются формулами:

$$a_i(x_i, t) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} * W(x_i, t, \tau),$$

$$b_i(x_i, t) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{\tau - t} M[(X_i(\tau) -$$

$$-W(x_i, t; \tau))^2 / X_i(t) = x_i] \geq 0,$$

$$W(x_i, t; \tau) = M[X_i(\tau) / X_i(t) = x_i]$$

являются заданными функциями числа заявок «1» в системе, которые принимают постоянные значения в каждом из квадратов  $D_1^n = \{(X_1, X_2): l=[X_1]-[X_2], n=[X_2]\}$ , согласованы с параметрами потоков  $N_1(t)$  в моменты поступления и ухода заявок.

Для уравнения (1) ставится задача нахождения решения, удовлетворяющего следующим начальным и краевым условиям

$$\omega(0, x_1, x_2) = \delta(x_1 - 1)\delta(x_2), \quad (3)$$

$$\omega|_{x_1=0} = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad (4)$$

$$\omega|_{x_2=0} = 0, \quad 1 \leq x_1 \leq m + k + 1, \quad (5)$$

с условиями поглощения на линии

$$\Gamma_1 = \{(X_1(t), X_2(t)): L(t) = [X_1] - [X_2] = 0\}$$

$$\omega|_{\Gamma_1} = 0, \quad (6)$$

со смешанными условиями на линии

$$\Gamma_2 = \{(X_1(t), X_2(t)): L(t) = m + k\}$$

$$\left[ \alpha\omega + (1-\alpha) \left( a_1\omega - \frac{1}{2}b_1 \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right) \right]_{x_1=j} = 0, \quad (7)$$

$$j - m - k - 1 \leq x_2 \leq j - m - k,$$

$$j = m + k + 1, m + k + 2..$$

$$\left[ \alpha\omega + (1-\alpha) \left( a_2\omega - \frac{1}{2}b_2 \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right) \right]_{x_2=i} = 0, \quad (8)$$

$$m + k + i \leq x_1 \leq m + k + i + 1,$$

$$i = 1, 2..$$

которые означают, что в момент переполнения системы ( $L(t) = m + k + 1$ ) заявка может покинуть систему необслуженной с вероятностью поглощения  $\alpha$  (например, переезд на другое место жительства, отказ от работы по данному профилю), и с вероятностью  $(1-\alpha)$  определяют нулевой поток на линии  $\Gamma_2$  – равносильный отражению заявок на входе в систему (отказ в регистрации). Зададимся дополнительно нулевым потоком на подвижной неизвестной границе  $X_1 = H$

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \left( a_1\omega - \frac{1}{2}b_1 \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)_{x_1=H} = 0. \quad (9)$$

Кроме того, пусть выполняются естественные условия непрерывности потока на линиях разрыва коэффициентов  $x_1 = i$

$$\left( a_1^{(i)}\omega - \frac{1}{2}b_1^{(i)} \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)_{x_1=i} =$$

$$= \left( a_1^{(i+1)}\omega - \frac{1}{2}b_1^{(i+1)} \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right)_{x_1=i}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

а на линиях  $x_2 = j$  допускается скачкообразное изменение потока

$$\left( a_2^{(j)}\omega - \frac{1}{2}b_2^{(j)} \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)_{x_2=j} =$$

$$= \left( a_2^{(j+1)}\omega - \frac{1}{2}b_2^{(j+1)} \frac{\partial\omega}{\partial x_2} \right)_{x_2=j} + c_j, \quad c_j = const, \quad (11)$$

$$j = m + k + 1, m + k + 2, \dots$$

что соответствует уходу из очереди части заявок без обслуживания (альтернативное трудоустройство). И наконец, выполняется естественное условие нормировки

$$\iint_D \omega(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1. \quad (12)$$

Аппроксимацию решения задачи (1-11) в области  $D_H$  предлагается искать в численно-аналитической форме методом конечных элементов Галеркина, заменив (8) на условие

$$\left[ a_1\omega - \frac{1}{2}b_1 \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=H_0} = 0, \quad (9')$$

где  $H_0$  – начальное приближение к  $H$ .

Ограничимся далее случаем  $\alpha = 0, c_j = 0$ .

Пусть  $z \in H_1(D)$  – любая функция, непрерывно дифференцируемая в области  $D$ , удовлетворяющая условию

$$z|_{\Gamma_1 \cup (X_1=0) \cup (X_2=0)} = 0 \quad (13)$$

Рассмотрим и преобразуем, учитывая (4-8, 9', 10-11) функционал

$$\iint_{D_{H_0}} \left( \frac{\partial\omega}{\partial t} - \sum_{l=1}^2 \left( \frac{b_l}{2} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_l^2} - a_l \frac{\partial\omega}{\partial x_l} \right) \right) * z dx_1 dx_2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{i_{H_0}} \sum_{j=1}^{m+k} \iint_{D_j^i} \left( \frac{\partial\omega}{\partial t} - \sum_{l=1}^2 \left( \frac{b_l}{2} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_l^2} - a_l \frac{\partial\omega}{\partial x_l} \right) \right) * z dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint_{D_{H_0}} z \frac{\partial\omega}{\partial t} dx_1 dx_2 - \sum_{i=0}^{i_{H_0}} \sum_{j=1}^{m+k} \iint_{D_j^i} \left( \sum_{l=1}^2 \left( \frac{b_l}{2} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_l^2} - a_l \frac{\partial\omega}{\partial x_l} \right) \right) * z dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint_{D_{H_0}} \frac{\partial\omega}{\partial t} z dx_1 dx_2 - \sum_{i=0}^{i_{H_0}} \sum_{j=1}^{m+k} \int_i^{i+1} \left( \int_{j+i}^{j+i+1} \left( \sum_{l=1}^2 \left( \frac{b_l}{2} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_l^2} - a_l \frac{\partial\omega}{\partial x_l} \right) \right) z dx_1 \right) dx_2 =$$

$$= \iint_{D_{H_0}} \frac{\partial\omega}{\partial t} z dx_1 dx_2 -$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=0}^{i_{H_0}} \sum_{j=1}^{m+k} \int_i^{i+1} \left( \frac{b_1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} z|_{j+i}^{j+i+1} - a_1 \omega z|_{j+i}^{j+i+1} \right) dx_2 - \\
 & - \sum_{i=0}^{i_{H_0}} \sum_{j=1}^{m+k} \int_{j+i}^{j+i+1} \left( \frac{b_2}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} z|_i^{i+1} - a_2 \omega z|_i^{i+1} \right) dx_1 + \\
 & + \sum_{i=0}^{i_{H_0}} \sum_{j=1}^{m+k} \int_i^{i+1} \int_{j+i}^{j+i+1} \left( \sum_{l=1}^2 \left( \frac{b_l}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x_l} \frac{\partial z}{\partial x_l} - a_l \omega \frac{\partial z}{\partial x_l} \right) \right) dx_1 dx_2 = 0 \\
 & \iint_D \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} z + \sum_{l=1}^2 \left( \left( \frac{b_l}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x_l} - a_l \omega \right) \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right) dx_1 dx_2 = 0. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Равенство (14) будем использовать для получения аппроксимации искомого решения по методу конечных элементов.

Для получения аппроксимирующего решения, во-первых, дискретизируем область D на квадраты со стороной h и будем, к примеру, использовать для аппроксимации искомого решения на элементарных квадратах S<sub>h</sub> билинейные функции

$$\varphi = c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_2 + c_4 x_1 x_2.$$

Пусть M – число узлов (вершин квадратов).

Через φ<sub>1</sub>(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>), φ<sub>2</sub>(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>)...φ<sub>M</sub>(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>) обозначим базисные функции (равные 1 в соответствующей функции номеру вершине, равные нулю во всех остальных вершинах). Аппроксимирующее решение представим в виде

$$\omega_{H_0}(x_1, x_2, t) = \sum_{j=1}^M Q_j(t) \varphi_j(x_1, x_2), \quad (15)$$

где Q<sub>j</sub>(t) – неизвестные функции времени.

Подставляя выражение (15) в (14), причем в качестве z выберем φ<sub>i</sub>, получим

$$\begin{aligned}
 & \iint_{D_{H_0}} \left( \sum_{j=1}^M \frac{dQ_j(t)}{dt} \varphi_j \varphi_i + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^M \left( Q_j(t) \left( \frac{b_l}{2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} - a_l \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} \right) \right) \right) dx_1 dx_2 = 0 \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

Таким образом мы получили систему M обыкновенных дифференциальных уравнений с M неизвестными Q<sub>1</sub>(t), Q<sub>2</sub>(t)...Q<sub>M</sub>(t)

$$\sum_{j=1}^M \left( \frac{dQ_j(t)}{dt} \iint_{D_{H_0}} \varphi_j \varphi_i dx_1 dx_2 \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^M \left( Q_j(t) \sum_{l=1}^2 \left( \frac{b_l}{2} \iint_{D_{H_0}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} dx_1 dx_2 - a_l \iint_{D_{H_0}} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} dx_1 dx_2 \right) \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Обозначив

$$\bar{Q} = \{Q_1(t), Q_2(t) \dots Q_M(t)\}^T$$

и

$$\bar{Q}' = \left\{ \frac{dQ_1(t)}{dt}, \frac{dQ_2(t)}{dt} \dots \frac{dQ_M(t)}{dt} \right\}^T,$$

перепишем (17) в матричном виде

$$M^* \bar{Q}' + K^* \bar{Q} = 0, \quad (18)$$

где M\* – матрица массы с коэффициентами

$$m_{i,j}^* = \iint_{D_{H_0}} \varphi_j \varphi_i dx_1 dx_2, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (19)$$

K – матрица жесткости с коэффициентами

$$k_{i,j}^* = \sum_{l=1}^2 \left( \frac{b_l}{2} \iint_{D_{H_0}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} dx_1 dx_2 - a_l \iint_{D_{H_0}} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} dx_1 dx_2 \right), \quad (20)$$

$$i = 1, 2, \dots, M,$$

$$j = 1, 2, \dots, M.$$

Аппроксимируем начальное условие (3)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^M Q_{j0} \iint_D \varphi_j(x_1, x_2) \varphi_i(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\
 & = \iint_D \delta(x_1 - 1) \delta(x_2) \varphi_i(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, M.$$

получили систему M уравнений относительно Q<sub>j0</sub>, j=1,2...M, разрешив которую, получим условия Коши для (20). Задачу Коши для системы (20) решаем численно, используя, например, схему Кранка-Николсона, записанную симметричным образом относительно (n<sub>0</sub> + 1/2)Δt

$$M^* \frac{\bar{Q}^{(n_0+1)} - \bar{Q}^{(n_0)}}{\Delta t} + K^* \frac{\bar{Q}^{(n_0+1)} + \bar{Q}^{(n_0)}}{2} = 0 \Rightarrow \quad (22)$$

$$\left( M^* + K^* \frac{\Delta t}{2} \right) \bar{Q}^{(n_0+1)} = \left( M^* - K^* \frac{\Delta t}{2} \right) \bar{Q}^{(n_0)}, \quad n_0 = 0, 1, \dots$$

Тогда, решая (22), найдем значения Q̄ в дискретные моменты времени Δt, 2Δt, 3Δt и т. д., а следовательно, в эти моменты времени можно записать аппроксимирующее решение

$$\omega_{H_0}(t, x_1, x_2) = \sum_{j=1}^M Q_j(t) \varphi_j(x_1, x_2). \quad (23)$$

Варьируя  $H_0$  до тех пор, пока

$$\forall h_0, \forall \varepsilon > 0, \forall t > 0, \|\omega_{H_0} - \omega_{H_0+h_0}\| < \varepsilon.$$

Используя численно-аналитическое решение задачи оценим характеристики СМО, такие как: сред-

нее время обслуживания заявок, среднее число заявок в системе, среднее время ожидания и т. п. Варьируя коэффициенты  $a_1$  и  $b_1$ , в том числе во времени, получаем возможность проводить многовариантные прогнозные расчеты функционирования системы, адаптированные к изменениям среды.

**Список использованной литературы:**

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977.
3. Реннер А.Г. Непрерывная марковская модель системы массового обслуживания в экономических расчетах, Материалы международной научно-практической конференции: Учебная, научно-производственная и инновационная деятельность высшей школы в современных условиях (Направление 2, стр 135-136). – Оренбург: ОГУ, 2001.
4. Реннер А.Г., Тарасов В.Н., Непрерывная марковская модель системы массового обслуживания зависящей от состояния системы. – М., Деп. в ВИНТИ, 25.12.91, №4761-В91, 1991.