

И.М. Киянов

## ОПТИМАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР ГЕОМЕТРИИ ФЕРМ С ПОСТОЯННЫМ РАСПОРОМ

Системы строительной механики с постоянными усилиями в лишней связи имеют оптимальные параметры геометрии, соответствующие максимальной суммарной работе усилий в лишней связи и не зависящие ни от нагрузки, ни от степени преднапряжения (патент РФ №2012749). Приводятся выводы уравнений для определения оптимального угла наклона к горизонтали элементов нижнего пояса ферм, имеющих постоянный распор.

Конструкции с постоянными при температурных и других перемещениях усилиями в лишней связи условно названы близкими к статически неопределимым.

Основными системами для конструкций, близких к статически неопределимым, являются те же основные системы, что и для обычных статически неопределимых конструкций.

Усилия, которые должны создавать связи, приближающие статически определимые конструкции к статически неопределимым, находятся методом сил так же, как находятся усилия в лишней связи обычных статически неопределимых систем. Свойство связей таково, что усилия в них постоянны при температурных перемещениях, значит, постоянны и при перемещениях, условно названных перемещениями теневой геометрической нелинейности, именно это позволяет установить оптимальный параметр геометрии.

Оптимальный параметр геометрии конструкций, близких к один раз статически неопределимым, соответствует случаю, когда усилие в лишней связи, находясь в функциональной зависимости от аргумента, определяющего геометрию конструкции, от одной и той же нагрузки приобретает максимальное по абсолютной величине значение. Находится оптимальный параметр геометрии из уравнения, получаемого приравнением нулю производной от функции, выражающей усилие в лишней связи, по аргументу, определяющему геометрию конструкции:

$$\frac{dX_1}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \frac{\Delta_{IP}}{\delta_{11}} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta_{IP}$  – перемещение в основной системе по направлению усилия в лишней связи  $X_1$  от заданной нагрузки;

$\delta_{11}$  – перемещение в основной системе по направлению усилия в лишней связи, вызванное действием силы  $X_1 = 1$ ;

$Z$  – аргумент, определяющий геометрию конструкции (для балочных ферм – угол

наклона элементов нижнего пояса к горизонтали, для арочных и висячих конструкций – стрела подъема арки и стрелка кабеля и т. д.

При достижении параметром геометрии оптимального значения увеличивается  $\Delta_{IP}$ , и  $\delta_{11}$  в известном выражении:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{IP}}{\delta_{11}}. \quad (2)$$

Абсолютная величина  $X_1$  в выражении (2) увеличивается до максимума за счет того, что при достижении параметром геометрии оптимального значения перемещение  $\Delta_{IP}$  увеличивается на большую величину, чем перемещение  $\delta_{11}$ .

Нагрузка в уравнении (1) сокращается потому, что она при наличии связи, приближающей статически определимую конструкцию к статически неопределимой, не является аргументом, поскольку при изменении аргумента, определяющего геометрию, и постоянной нагрузке усилие в связи изменяется и каждый раз нужно ставить новую связь, способную воспринять усилие, соответствующее новому параметру геометрии, а при постоянном аргументе, определяющем геометрию, и увеличении нагрузки – усилие в связи не изменяется. Параметр геометрии, полученный из уравнения (1), действителен для любых нагрузок.

Связи, приближающие статически определимые конструкции к статически неопределимым, разделяются на два вида: связи, создающие предварительное напряжение, и связи, не создающие его. Фильтр усилий не создает предварительного напряжения.

Фильтр усилий состоит из двух гребенок, входящих друг в друга, и битума, заполняющего пространство между гребенками (а. с. №414350)

При действии на конструкцию временной нагрузки в фильтре возникает перемещение  $\Delta_c$ . Перемещение в фильтре  $\Delta_c$  связано с перемещениями в конструкции, поэтому его можно записать так:

$$\Delta_c = \Delta_c^x + \Delta_c^h, \quad (3)$$

где  $\Delta_c^x$  – перемещение в фильтре, вызванное линейным перемещением в конструкции в направлении силы  $X_1$ ;

$\Delta_c^h$  – перемещение в фильтре в направлении силы  $X_1$ , вызванное нелинейным перемещением в конструкции (геометрическая нелинейность).

Подставив (3) в выражение (2), получим

$$X_1 = -\frac{\Delta_{IP}}{\delta_{11}} + \frac{\Delta_c^x + \Delta_c^h}{\delta_{11}}. \quad (4)$$

При увеличении параметра геометрии от нуля до оптимального значения перемещение  $\Delta_c^x$  в выражении (4) увеличивается с такой же скоростью, с какой увеличивается перемещение  $\Delta_{IP}$ . Поскольку при этом, как известно, перемещение  $\Delta_c^h$  уменьшается, то второй член практически остается постоянным.

На рис. 1 изображена балочная ферма, близкая к один раз статически неопределимой. В лишнюю связь включен фильтр усилий (рис. 1, а). Реакцию фильтра усилий обозначим через  $X_1$ . Основная и заданная системы эквивалентны. На основную систему действуют нагрузка  $P$  и реакция со стороны фильтра усилий  $X_1$ . Параметром геометрии в данном случае является угол наклона элементов нижнего пояса к горизонтали  $\gamma$ . При оптимальном значении этого угла усилие  $X_1$  от одной и той же нагрузки приобретает максимальную величину.

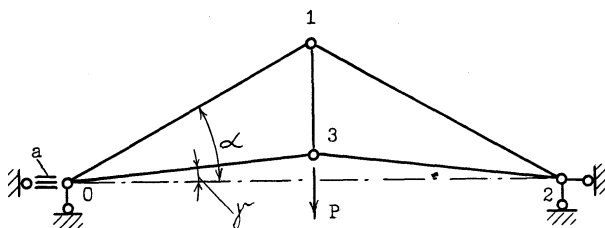


Рис. 1. Балочная ферма, близкая к один раз статически неопределимой, в лишнюю связь которой включен фильтр усилий а.

Введем следующие обозначения:

$\Delta_{IP}$  – перемещение по направлению силы  $X_1$ , вызванное силой  $P$ ;

$\Delta_{PI}$  – перемещение по направлению силы  $P$ , вызванное силой  $X_1$ ;

$\Delta_{PP}$  – перемещение по направлению силы  $P$ , вызванное силой  $P$ ;

$\Delta_{II}$  – перемещение по направлению силы  $X_1$ , вызванное силой  $X_1$ .

На основании теоремы о взаимности работ (теорема Бетти) записываем:

$$X_1 \Delta_{IP} = P \Delta_{PI}. \quad (5)$$

У балочной фермы, изображенной на рис. 1, будем увеличивать, начиная с нуля, угол наклона элементов нижнего пояса к горизонтали  $\gamma$ . При достижении углом  $\gamma$  оптимального значения и  $X_1$  и  $\Delta_{IP}$  увеличатся. Нагрузка  $P$  неизменна. Значит, перемещение  $\Delta_{PI}$  увеличится на большую величину, чем перемещение  $\Delta_{IP}$ .

Сила  $P$  направлена сверху вниз, а перемещение  $\Delta_{PI}$  происходит в направлении снизу вверх.

Запишем следующие перемещения:

$$\Delta_{II} = X_1 \delta_{11} = -\Delta_{IP}; \quad (6)$$

$$\Delta_{PP} = P \delta_{PP}, \quad (7)$$

где  $\delta_{11}$  и  $\delta_{PP}$  – единичные перемещения по направлению сил  $X_1$  и  $P$ .

Единичные перемещения  $\delta_{11}$  и  $\delta_{PP}$  находятся между собой в прямо пропорциональной зависимости. Поэтому при увеличении угла  $\gamma$  до оптимального значения перемещение  $\delta_{PP}$  увеличивается со скоростью увеличения перемещения  $\delta_{11}$ . Из выражений (6) и (7) видно, что перемещение  $\Delta_{PP}$  увеличивается со скоростью, меньшей скорости увеличения перемещения  $\Delta_{IP}$  – оно увеличивается со скоростью увеличения перемещения  $\delta_{11}$ .

Из этих рассуждений следует, что перемещение точки приложения силы  $P$  (рис. 1, узел 3) по направлению силы  $P$  при достижении углом  $\gamma$  оптимального значения уменьшается до минимума.

Оптимальный параметр геометрии прост и очевиден. Легче всего он доказывается с применением принципа возможной работы, который уместно использовать в данном случае еще и потому, что он, как известно, применим ко всем конструкциям независимо от того, как ведет себя материал: линейно или нелинейно, упруго или неупруго.

При оптимальном параметре геометрии возможная работа внутренней силы в связи, приближающей статически определимую конструкцию к статически неопределимой, будет максимальной (сила  $X_1$  и ее возможное перемещение  $\Delta_{IP}$  имеют максимальное значение). Эта возможная работа имеет всегда противоположный знак по отношению к возможной работе внутренних сил (результатирующих напряжений) основной системы. Поэтому при оптимальном параметре геометрии (прочие условия равны) возможная работа внутренних

сил (результатирующих напряжений) всей конструкции будет минимальной. Возможная работа внешней силы (нагрузки) в соответствии с принципом возможной работы будет тоже минимальной. А это значит, что прогиб конструкции при оптимальном параметре геометрии (прочие условия равны) будет минимальным и основная система – наименее напряженной.

Некоторое утяжеление работы связей не имеет существенного значения, так как во многих случаях связи, приближающие статически определимые конструкции к статически неопределимым, – это небольшие детали (подвижные опорные части, фильтры усилий, связи с основной и дополнительной пластинчатыми пружинами), масса которых несоизмеримо мала по сравнению с массой конструкций, на которые они оказывают воздействие. Что касается висячего моста, жесткой арки с гибкой затяжкой, шпренгельной балки, то лишние связи этих конструкций, имея значительную длину, работают на растяжение, и некоторое утяжеление их работы за счет облегчения работы частей конструкций, воспринимающих изгибающие моменты и сжимающие усилия, выгодно.

В отношении параметра геометрии конструкции можно разделить на два вида: конструкции, в которых изменения параметра геометрии не вызывают изменений в геометрии основной системы, и конструкции, в которых изменения параметра геометрии изменяют геометрию основной системы.

Если при изменениях параметра геометрии конструкции изменяется геометрия только лишней связи и не изменяется геометрия основной системы, то, конечно, при неизменной внешней нагрузке об изменениях возможной работы внутренних сил основной системы не может быть и речи.

Во втором случае, когда изменяется геометрия основной системы, возможная работа внутренних сил основной системы при достижении параметром геометрии оптимального значения несколько увеличивается, но это увеличение всегда меньше увеличения возможной работы внутренней силы в связи, приближающей статически определимую конструкцию к статически неопределимой.

Рассмотрим подробно случай, когда изменяется геометрия основной системы. Для этого рассмотрим ферму, близкую к один раз статически неопределимой, например, ферму, изображенную на рис. 1.

Возможная работа внутренних сил фермы, близкой к один раз статически неопределимой, равна:

$$W_{внт} = W_{внт}^{oc} - X_1 \Delta_{IP} = W_{внт}^{oc} - \left( \frac{\Delta_{IP}}{\delta_{11}} \right) \Delta_{IP} =$$

$$= \sum \frac{N^P \bar{N}_2 l}{EF} - \frac{\sum \frac{N^P \bar{N}_1 l}{EF}}{\sum \frac{\bar{N}_1^2 l}{EF}} \sum \frac{N^P \bar{N}_1 l}{EF}. \quad (8)$$

где  $W_{внт}^{oc}$  – возможная работа внутренних сил основной системы;

$\bar{N}_1$  – усилия в стержнях от силы  $\bar{X}_1 = 1$ ;

$N^P$  – усилие в стержнях от внешней нагрузки  $P$ , приложенной к основной системе;

$N_2$  – усилие в стержнях от внешней нагрузки, равной единице, приложенной к основной системе в точке приложения силы  $P$  и действующей в направлении этой силы.

При достижении параметром геометрии оптимального значения усилия  $N^P$ ,  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_2$  увеличиваются. Увеличение этих сил находится в пропорциональной зависимости. При этом и первый член в формуле (8) увеличивается пропорционально увеличению  $\Delta_{IP}$ , но увеличивающееся  $\Delta_{IP}$  умножается еще и на усилие  $X_1$ , которое тоже увеличивается. Поэтому возможная работа внутренних сил (результатирующих напряжений) всей конструкции уменьшается.

Возможность установления оптимального параметра геометрии заложена в самих конструкциях. В самом деле, приравняв производную от усилия в лишней связи по параметру геометрии нулю, мы для любой конструкции и от любой нагрузки получим такое уравнение, в котором всегда представляется возможность сократить нагрузку. Наличие связей, приближающих статически определимые конструкции к статически неопределимым, позволяет реализовать эту возможность.

Оптимальный параметр геометрии конструкций – объективная истина. Установив эту истину, автор использует ее в деле совершенствования строительных и мостовых конструкций.

Возможность применения математического аппарата и простота решений – есть своего рода критерий совершенства связей и конструкций. Чем легче применить математический аппарат и чем более простые при этом получаются решения, тем более совершенными являются связи и конструкции, включающие их. Конструкции, близкие к статически неопределимым, удовлетворяют этому критерию.

В поисках оптимальной конструкции, близкой к статически неопределимой, дело, конечно, не ограничивается установлением оптимального параметра геометрии. Взяв для конструкции определенного пролета различные отношения жесткостей ее элементов, определив для каждого из них оптимальный параметр геометрии, из серии конструкций следует выбрать ту, которая будет наиболее полно удовлетворять требованиям прочности, жесткости и экономичности.

Параметром геометрии фермы, близкой к статически неопределимой, является угол между элементами нижнего пояса и линией, проведенной через центры опорных шарниров (рис. 1, угол  $\gamma$ ). Если этот угол принять равным нулю, то распор, возникающий в связи, будет оказывать влияние только на нижний пояс ферм, уменьшая в нем растягивающее усилие. Такое решение не будет оптимальным. При наличии угла между элементами нижнего пояса и линией, проходящей через центры опорных шарниров, распор будет оказывать влияние на все стержни фермы. Имеется оптимальное значение этого угла.

Оптимальный параметр геометрии фермы, близкой к один раз статически неопределимой, определяется из уравнения (1). Для ферм это уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{dX_1}{d\gamma} = \frac{dX_1}{d\gamma} \left( \frac{\sum \frac{\bar{N}_i N_i^P l_i}{EF_i}}{\sum \frac{\bar{N}_i^2 l_i}{EF_i}} \right) = 0, \quad (9)$$

где  $\gamma$  – параметр геометрии;

$\bar{N}_i$  – усилия в стержнях основной системы от силы  $X_1=1$ ;

$N_i^P$  – усилия в стержнях основной системы от заданной нагрузки  $P$ .

На основную систему действует сила  $\bar{X}_1 = 1$ .

$\bar{N}_1$  – усилие в стержне 0-3;  $\bar{N}_2$  – усилие в стержне 0-1 (см. рис. 1).

Вырезав узел 0, составим для него уравнения равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную ось:

$$\sum Y = -\bar{N}_1 \sin \gamma + \bar{N}_2 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum X = -\bar{N}_1 \cos \gamma + \bar{N}_2 \cos \alpha + 1 = 0,$$

откуда

$$\bar{N}_2 \left( \frac{\sin \alpha \cos \gamma}{\sin \gamma} - \cos \alpha \right) - 1 = 0;$$

$$\bar{N}_2 \left( \frac{\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma}{\sin \gamma} \right) = 1;$$

$$\bar{N}_2 \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\sin \gamma} = 1;$$

$$\bar{N}_2 = -\frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha - \gamma)}. \quad (10)$$

$$\bar{N}_1 = -\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \gamma)}. \quad (11)$$

На основную систему действует нагрузка  $P$ .

$N_1^P$  – усилие в стержне 0-3;  $N_2^P$  – усилие в стержне 0-1.

Вырезав узел 0, составим для него уравнения равновесия в виде суммы проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную ось:

$$\sum X = N_1^P \cos \gamma - N_2^P \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = N_1^P \sin \gamma - N_2^P \sin \alpha + R_y^P = 0,$$

откуда

$$N_2^P \left( \frac{\sin \gamma \cos \alpha}{\cos \gamma} - \sin \alpha \right) + R_y^P = 0;$$

$$N_2^P \left( \frac{\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha}{\cos \gamma} \right) + R_y^P = 0;$$

$$N_2^P = -\frac{R_y^P \cos \gamma}{\sin(\alpha - \gamma)}; \quad (12)$$

$$N_1^P = \frac{R_y^P \cos \alpha}{\sin(\alpha - \gamma)}. \quad (13)$$

В выражениях (12) и (13)  $R_y^P$  – опорная реакция от нагрузки  $P$ , действующая на узел 0 в направлении  $y$ . Стержень 1-3 не учитывается.

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\bar{N}_i N_i^2 l_i}{EF_i} = \\ & = -\frac{\sin \alpha R_y^P \cos \alpha l_1}{\sin^2(\alpha - \gamma) EF_1} - \frac{\sin \gamma R_y^P \cos \gamma l_2}{\sin^2(\alpha - \gamma) EF_2} = \\ & = -\frac{R_y^P}{E \sin^2(\alpha - \gamma)} \left( \frac{\sin \alpha \cos \alpha l_1}{F_1} + \frac{\sin \gamma \cos \gamma l_2}{F_2} \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{R_y^p (\sin \alpha \cos \alpha l_1 F_2 + \sin \gamma \cos \gamma l_2 F_1)}{E \sin^2 (\alpha - \gamma) F_1 F_2}.$$

$$\sum \frac{N_i^2 l_i}{E F_i} = \frac{\sin^2 \alpha l_1}{\sin^2 (\alpha - \gamma) E F_1} + \frac{\sin^2 \gamma l_2}{\sin^2 (\alpha - \gamma) E F_2} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 (\alpha - \gamma) E} \left( \frac{\sin^2 \alpha l_1}{F_1} + \frac{\sin^2 \gamma l_2}{F_2} \right) =$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha l_1 F_2 + \sin^2 \gamma l_2 F_1}{E \sin^2 (\alpha - \gamma) F_1 F_2}.$$

$$X_1 = R_y^p \frac{l_1 F_2 \sin \alpha \cos \alpha + l_2 F_1 \sin \gamma \cos \gamma}{l_1 F_2 \sin^2 \alpha + l_2 F_1 \sin^2 \gamma}. \quad (14)$$

Для нахождения оптимального угла  $\gamma$  используем уравнение (9):

$$\frac{dX_1}{d\gamma} = \frac{d}{d\gamma} \left( \frac{l_1 F_2 \sin \alpha \cos \alpha + l_2 F_1 \sin \gamma \cos \gamma}{l_1 F_2 \sin^2 \alpha + l_2 F_1 \sin^2 \gamma} \right) = 0;$$

$$\frac{(l_1 F_2 \sin^2 \alpha + l_2 F_1 \sin^2 \gamma) l_2 F_1 [\sin \gamma (-\sin \gamma) + \cos \gamma \cos \gamma] - (l_1 F_2 \sin \alpha \cos \alpha + l_2 F_1 \sin \gamma \cos \gamma) l_2 F_1 \sin \gamma \cos \gamma}{(l_1 F_2 \sin^2 \alpha + l_2 F_1 \sin^2 \gamma)^2} = 0;$$

$$2l_2 F_1 \sin \gamma \cos \gamma (l_1 F_2 \sin \alpha \cos \alpha + l_2 F_1 \sin \gamma \cos \gamma) - l_2 F_1 (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) (l_1 F_2 \sin^2 \alpha + l_2 F_1 \sin^2 \gamma) = 0;$$

$$2l_2 F_1 l_1 F_2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma \cos \gamma + 2l_2^2 F_1^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma - l_2 F_1 l_1 F_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma - l_2 F_1 l_1 F_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma - l_2^2 F_1^2 \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma + l_2 F_1 l_1 F_2 \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma + l_2^2 F_1^2 \sin^4 \gamma = 0;$$

$$l_1 F_2 \sin 2\alpha \sin \gamma \cos \gamma - l_1 F_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma + l_1 F_2 \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma + l_2 F_1 \sin^2 \gamma (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = 0;$$

$$l_1 F_2 \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma + l_2 F_1 \sin^2 \gamma + l_1 \sin 2\alpha \sin \gamma \cos \gamma - l_1 F_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma = 0;$$

$$(l_1 F_2 \sin^2 \alpha + l_2 F_1) \sin^2 \gamma + l_1 F_2 \sin 2\alpha \sin \gamma \cos \gamma - l_1 F_2 \sin^2 \alpha = 0;$$

$$tg^2 \gamma + \frac{l_1 F_2 \sin 2\alpha}{l_1 F_2 \sin^2 \alpha + l_2 F_1} tg \gamma - \frac{l_1 F_2 \sin^2 \alpha}{l_1 F_2 \sin^2 \alpha + l_2 F_1} = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) дает приближенное значение оптимального параметра геометрии, поскольку оно получено без учета стойки 1-3.

Простота – достоинство уравнения (15). Приближенное значение оптимального параметра геометрии, быстро найденное из уравнения (15), нетрудно уточнить.

Подобно предыдущему случаю, параметром геометрии фермы, показанной на рис. 2, является угол наклона элементов нижнего пояса к горизонтали.

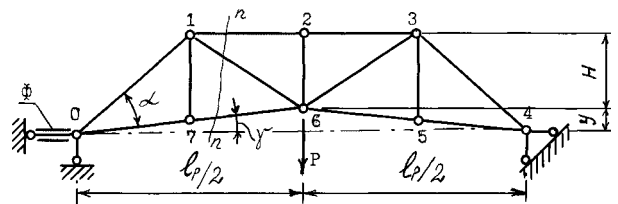


Рис. 2. Балочная ферма, близкая к один раз статически неопределимой.

На основную систему, которая получается отбрасыванием лишней связи, действует нагрузка P и реакция со стороны фильтра усилий  $X_1$ . Основная и заданная системы эквивалентны.

У обычных балочных ферм нижний пояс, как известно, горизонтальный. При наличии лишней связи с фильтром усилий элементы нижнего пояса лучше располагать под углом  $\gamma$  к горизонтали. Оптимальное значение этого параметра геометрии определяется из уравнения (9).

Усилия в стержнях 0-1 и 0-6 основной системы от силы  $X_1 = 1$  определяются по формулам (10) и (11).

Усилие в стержне 1-2 основной системы от силы  $X_1 = 1$  определяется из уравнения, получаемого приравниванием нулю суммы моментов всех сил, действующих на часть фермы, расположенную слева от сечения n-n, относительно узла 6:

$$\sum M_6 = 0; \quad 1 \cdot \frac{l_p}{2} tg \gamma - \overline{N}_3 H = 0;$$

$$\overline{N}_3 = \frac{l_p tg \gamma}{2H}, \quad (16)$$

где  $l_p$  – расчетный пролет фермы;  
H – высота фермы в середине.

Усилия в стержнях 0-6 и 0-1 основной системы от нагрузки P, приложенной в середине фермы, определяется по формулам (12) и (13).

Усилие в стержне 1-2 основной системы от нагрузки P определяется так же, как и усилие  $\overline{N}_3$ :

$$\sum M_6 = 0; R_y^p \frac{l_p}{2} + N_3^p H = 0;$$

$$N_3^p = -\frac{l_p R_y^p}{2H}. \quad (17)$$

Определяя усилие  $X_1$ , усилия в стержнях решетки (стержни 1-7 и 1-6) не учитываем. Это не оказывает заметного влияния на точность определения оптимального параметра геометрии.

$$\sum \frac{\bar{N}_i N_i^p l_i}{EF_i} = -\frac{R_y^p \sin \alpha \cos \alpha l_1}{\sin^2(\alpha - \gamma) EF_1} - \frac{R_y^p \sin \gamma \cos \gamma l_2}{\sin^2(\alpha - \gamma) EF_2} -$$

$$-\frac{R_y^p l_p^2 \operatorname{tg} \gamma l_3}{4H^2 EF_3} = \quad (18)$$

$$= -R_y^p \left[ \frac{4H^2 l_1 F_2 F_3 \sin \alpha \cos \alpha \cos \gamma}{4EH^2 F_1 F_2 F_3 \sin^2(\alpha - \gamma) \cos \gamma} + \frac{4H^2 l_2 F_1 F_3 \sin \gamma \cos^2 \gamma}{4EH^2 F_1 F_2 F_3 \sin^2(\alpha - \gamma) \cos \gamma} + \frac{l_p l_3 F_1 F_2 \sin^2(\alpha - \gamma) \sin \gamma}{4EH^2 F_1 F_2 F_3 \sin^2(\alpha - \gamma) \cos \gamma} \right]$$

$$\sum \frac{N_i^2 l_i}{EF_i} = \frac{\sin^2 \alpha l_1}{\sin^2(\alpha - \gamma) EF_1} + \frac{\sin^2 \gamma l_2}{\sin^2(\alpha - \gamma) EF_2} +$$

$$+ \frac{l_p^2 \sin^2 \gamma^3}{4H^2 EF_3 \cos^2 \gamma} =$$

$$= \frac{4H^2 l_1 F_2 F_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma + 4H^2 l_2 F_1 F_3 \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma}{4H^2 EF_1 F_2 F_3 \sin^2(\alpha - \gamma) \cos^2 \gamma} +$$

$$+ \frac{l_p^2 l_3 F_1 F_2 \sin^2(\alpha - \gamma) \sin^2 \gamma}{4H^2 EF_1 F_2 F_3 \sin^2(\alpha - \gamma) \cos^2 \gamma}. \quad (19)$$

В выражениях (18) и (19) имеем:

$l_p$  – расчетный пролет фермы;

$l_1$  и  $F_1$  – расстояние от узла 0 до узла 6 и площадь поперечного сечения нижнего пояса;

$l_2$  и  $F_2$  – длина и площадь поперечного сечения стержня 0-1;

$l_3$  и  $F_3$  – длина и площадь поперечного сечения стержня 1-2;

$\alpha$  – угол наклона стержня 0-1 к горизонтали;

$\gamma$  – угол наклона элементов нижнего пояса к горизонтали.

Обозначим частное от деления выражения (18) на выражение (19) через  $\Theta$ .

Запишем значение частного  $\Theta$ :

$$\Theta = \left\{ \left[ 4H^2 l_1 F_2 F_3 \sin \alpha \cos \alpha \cos \gamma + 4H^2 l_2 F_1 F_3 \sin \gamma \cos^2 \gamma + l_p^2 l_3 F_1 F_2 \sin^2(\alpha - \gamma) \sin \gamma \right] \cos \gamma \right\}:$$

$$\left[ 4H^2 l_1 F_2 F_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma + 4H^2 l_2 F_1 F_3 \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma + l_p^2 l_3 F_1 F_2 \sin^2(\alpha - \gamma) \sin^2 \gamma \right] =$$

$$= \left[ 4H^2 l_1 F_2 F_3 \sin 2\alpha \cos^2 \gamma + 2H^2 l_1 F_1 F_3 \sin 2\gamma \cos^2 \gamma + 0,5 l_p^2 l_3 F_1 F_3 \sin^2(\alpha - \gamma) \sin 2\gamma \right]:$$

$$\left[ 4H^2 l_1 F_2 F_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma + \quad (20)$$

$$+ H^2 l_2 F_1 F_3 \sin^2 2\gamma + l_p^2 l_3 F_1 F_2 \sin^2(\alpha - \gamma) \sin^2 \gamma \right]$$

Обозначим делимое в выражении (20) через  $u$ , а делитель через  $v$ .

Воспользовавшись формулой (4, 9), запишем:

$$\frac{dX_1}{d\gamma} = \frac{d\Theta}{d\gamma} = \frac{d}{d\gamma} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \quad (21)$$

Производная делимого равна

$$u' = -2H^2 l_1 F_2 F_3 \sin 2\alpha \sin 2\gamma - 2H^2 l_2 F_1 F_3 \sin^2 2\gamma +$$

$$+ 4H^2 l_2 F_1 F_3 \cos^2 \gamma \cos 2\gamma +$$

$$+ l_p^2 l_3 F_1 F_2 \sin^2(\alpha - \gamma) \cos 2\gamma -$$

$$- 0,5 l_p^2 l_3 F_1 F_2 \sin 2\gamma \sin 2(\alpha - \gamma).$$

Производная делителя равна

$$v' = -4H^2 l_1 F_2 F_3 \sin^2 \alpha \sin 2\gamma +$$

$$+ 2H^2 l_2 F_1 F_2 \sin 4\gamma + l_p^2 l_3 F_1 F_2 \sin^2(\alpha - \gamma) \sin 2\gamma -$$

$$- l_p^2 l_3 F_1 F_2 \sin^2 \gamma \sin 2(\alpha - \gamma).$$

После подстановки значений  $u$ ,  $v$ ,  $u'$ ,  $v'$  уравнение (21) и сокращения  $v^2$  получим:

$$\frac{dX_1}{d\gamma} = vu' - uv' =$$

$$= -8H^4 l_1^2 F_2^2 F_3^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha \sin 2\gamma \cos^2 \gamma -$$

$$- 8H^4 l_1 l_2 F_1 F_2 F_3^2 \sin^2 \alpha \sin^2 2\gamma \cos^2 \gamma +$$

$$+ 16H^4 l_1 l_2 F_1 F_2 F_3^2 \sin^2 \alpha \cos^4 \gamma \cos 2\gamma +$$

$$\begin{aligned}
& + 4l_p^2 H^2 l_1 l_3 F_1 F_2^2 F_3 \sin^2 \alpha \sin^2 (\alpha - \gamma) \cos^2 \gamma \cos 2\gamma - \\
& - 2l_p^2 H^2 l_1 l_3 F_1 F_2^2 F_3 \sin^2 \alpha \sin 2\gamma \sin 2(\alpha - \gamma) \cos^2 \gamma - \\
& \quad - 2H^4 l_1 l_2 F_1 F_2 F_3^2 \sin 2\alpha \sin^3 2\gamma - \\
& \quad - 2H^4 l_2^2 F_1^2 F_3^2 \sin^4 2\gamma + \\
& \quad + 4H^4 l_2^2 F_1^2 F_3^2 \sin^2 2\gamma \cos^2 \gamma \cos 2\gamma + \\
& + l_p^2 H^2 l_2 l_3 F_1^2 F_2 F_3 \sin^2 2\gamma \sin^2 (\alpha - \gamma) \cos 2\gamma - \\
& \quad - 0,5l_p^2 H^2 l_2 l_3 F_1^2 F_2 F_3 \sin^3 2\gamma \sin 2(\alpha - \gamma) - \\
& - 2l_p^2 H^2 l_1 l_3 F_1 F_2^2 F_3 \sin 2\alpha \sin^2 \gamma \sin^2 (\alpha - \gamma) \sin 2\gamma - \\
& \quad - 2l_p^2 H^2 l_2 l_3 F_1^2 F_2 F_3 \sin^2 2\gamma \sin^2 \gamma \sin^2 (\alpha - \gamma) + \\
& + 4l_p^2 H^2 l_2 l_3 F_1^2 F_2 F_3 \sin^2 \gamma \sin^2 (\alpha - \gamma) \cos^2 \gamma \cos 2\gamma + \\
& \quad + l_p^4 l_3^2 F_1^2 F_2^2 \sin^4 (\alpha - \gamma) \sin^2 \gamma \cos 2\gamma - \\
& - 0,5l_p^4 l_3^2 F_1^2 F_2^2 \sin^2 \gamma \sin^2 (\alpha - \gamma) \sin 2\gamma \sin 2(\alpha - \gamma) + \\
& \quad + 8H^4 l_1^2 F_2^2 F_3^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha \sin 2\gamma \cos^2 \gamma - \\
& \quad - 4H^4 l_1 l_2 F_1 F_2 F_3^2 \sin 2\alpha \sin 4\gamma \cos^2 \gamma - \\
& - 2l_p^2 H^2 l_1 l_3 F_1 F_2^2 F_3 \sin 2\alpha \sin^2 (\alpha - \gamma) \sin 2\gamma \cos^2 \gamma + \\
& + 2l_p^2 H^2 l_1 l_3 F_1 F_2^2 F_3 \sin 2\alpha \sin^2 \gamma \sin 2(\alpha - \gamma) \cos^2 \gamma + \\
& \quad + 8H^4 l_1 l_2 F_1 F_2 F_3^2 \sin^2 \alpha \sin^2 2\gamma \cos^2 \gamma - \\
& \quad - 4H^4 l_2^2 F_1^2 F_3^2 \sin 4\gamma \sin 2\gamma \cos^2 \gamma - \\
& - 2l_p^2 H^2 l_2 l_3 F_1^2 F_2 F_3 \sin^2 2\gamma \sin^2 (\alpha - \gamma) \cos^2 \gamma + \\
& + 2l_p^2 H^2 l_2 l_3 F_1^2 F_2 F_3 \sin^2 \gamma \sin 2\gamma \sin 2(\alpha - \gamma) \cos^2 \gamma + \\
& + 2l_p^2 H^2 l_1 l_3 F_1 F_2^2 F_3 \sin^2 \alpha \sin^2 2\gamma \sin^2 (\alpha - \gamma) - \\
& \quad - l_p^2 H^2 l_2 l_3 F_1^2 F_2 F_3 \sin^2 (\alpha - \gamma) \sin 4\gamma \sin 2\gamma - \\
& \quad - 0,5l_p^4 l_3^2 F_1^2 \sin^4 (\alpha - \gamma) \sin^2 2\gamma + \quad (22) \\
& + 0,5l_p^4 l_3^2 F_1^2 F_2^2 \sin^2 \gamma \sin^2 (\alpha - \gamma) \sin 2\gamma \sin (\alpha - \gamma) = 0
\end{aligned}$$

Сократив ряд членов в уравнении (22) и выполнив преобразования, получим окончательный вид уравнения для определения оптимального параметра геометрии фермы, показанной на рис. 2.

$$\begin{aligned}
& \frac{2F_2}{l_2} K_1 + \frac{2H^2}{l_p^2 l_3} K_2 - \frac{F_1}{l_1} K_3 + \\
& + \frac{2H^2 F_1 F_2}{l_p^2 l_1 l_3 F_2} K_4 + \frac{l_p^2 l_3 F_1 F_2}{H^2 l_1 l_2 F_3} K_5 = 0, \quad (23)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_1 &= \sin^2 \alpha \sin^2 (\alpha - \gamma) (2 \cos^2 \gamma \cos 2\gamma + \sin^2 2\gamma) - \\
& - \sin 2(\alpha - \gamma) \cos^2 \gamma (\sin^2 \alpha \sin 2\gamma - \sin 2\alpha \sin^2 \gamma) - \\
& \quad - \sin 2\alpha \sin^2 (\alpha - \gamma) \sin 2\gamma; \\
K_2 &= 8 \sin^2 \alpha \cos^4 \gamma \cos 2\gamma - \\
& - \sin 2\alpha (\sin^3 2\gamma + 2 \sin 4\gamma \cos^2 \gamma); \\
K_3 &= 2 \sin^2 2\gamma \sin^2 (\alpha - \gamma); \\
K_4 &= \sin^2 2\gamma (2 \cos^2 \gamma \cos 2\gamma - \\
& \quad - \sin^2 2\gamma - 4 \cos^2 \gamma \cos 2\gamma); \\
K_5 &= \sin^4 (\alpha - \gamma) \sin^2 \gamma (\cos 2\gamma - 2 \cos^2 \gamma)
\end{aligned}$$

Модуль упругости в уравнении (23) сокращается, поскольку было принято, что у всех элементов фермы он одинаков.

При изменениях угла  $\gamma$  от нуля до оптимального значения расстояние между узлами 0-6 и 1-6 изменяется, но незначительно. Поэтому при взятии производной величины  $l_1$  и  $l_6$  считаются постоянными, равными среднему их значению, и выносятся за знак дифференциала.

Нагрузка, действующая на ферму, в уравнении сократилась. Это значит, что оптимальный угол наклона элементов нижнего пояса к горизонтали присущ ферме и не зависит от нагрузки.