

## РАСЧЕТ ЛАМИНАРНОГО ДВУХФАЗНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассматривается обтекание пластины двухфазным жидкометаллическим пузырьковым потоком. Выведены интегральные соотношения импульсов и энергии для двухфазного пограничного слоя при наличии объёмных источников тепловыделения. Приводятся результаты численного расчета толщины динамического и теплового пограничного слоя для больших и малых чисел Прандтля, а также коэффициентов теплоотдачи.

Рассматривается поток вязкой электропроводной жидкости с монодисперсными пузырьками идеального газа, протекающий в скрещенных однородном магнитном и электрическом полях. Эффектами слипания, дробления, взаимодействия между пузырьками, энергией их хаотического движения, а также капиллярными эффектами на границе раздела фаз пренебрегаем.

Интерес для инженерных расчетов представляют задачи обтекания и теплообмена на твердой поверхности, решить которые удается в рамках представлений о пограничном слое [1].

Приближенный метод расчета таких течений основывается на применении интегральных соотношений импульса и энергии [2], которые применительно к двухфазным течениям имеют отличия от своих однофазных аналогов. Выведем эти соотношения для ламинарного течения на плоской поверхности.

Проведя оценку порядка слагаемых в уравнениях импульсов фаз [3], для плоского установившегося течения на пластине  $\vec{v}_i = \{u_i, v_i, 0\}$  получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_1) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_2 v_2) = 0, \quad (2)$$

$$\rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \rho_1 v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} + f_{1x} - F_{12x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\rho_2 u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \rho_2 v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + F_{12x}. \quad (4)$$

В этих уравнениях индекс «1» относится к жидкой (несущей) фазе, а «2» – к дисперсной (пузырькам газа),  $\alpha_i$  – объёмное содержание  $i$ -фазы,  $\rho_i$  и  $\rho_i^0$  – приведенная и истинная плотности  $i$ -ой фазы соответственно, причем  $\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i$ ,  $\vec{v}_i$  – скорость,  $\vec{f}_1 = \vec{j}_1 \times \vec{B}$  – приведенная плотность электромагнитной силы,  $\vec{j}_1$  и  $\vec{j}_1^0$  – приведенная и истинная плотности электрического тока, причем

$\vec{j}_1 = \alpha_1 \vec{j}_1^0$ ;  $\vec{B} = \{0, 0, -B\}$ ,  $B = \text{const}$  – индукция магнитного поля (рассматривается случай малых магнитных чисел Рейнольдса),  $\vec{F}_{12}$  – сила взаимодействия между фазами, обусловленная скоростной неравновесностью фаз и определяемая моделью силового взаимодействия (электромагнитное выталкивание, сопротивление обтеканию, сила Магнуса или Жуковского, сила инерции присоединенных масс и др.) [3].

В случае, если среди сил  $\vec{F}_{12}$  нет поперечных, то система уравнений (1)-(4) методами теории пограничного слоя приводится к виду [4]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} [\rho_1 u_1 (U_1 - u_1)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_1 v_1 (U_1 - u_1)] + \\ & + \rho_1 (U_1 - u_1) \frac{dU_1}{dx} = -\Delta F_{12} - \frac{\partial \tau_1}{\partial y}, \\ & \frac{\partial}{\partial x} [\rho_2 u_2 (U_2 - u_2)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_2 v_2 (U_2 - u_2)] + \\ & + \rho_2 (U_2 - u_2) \frac{dU_2}{dx} = \Delta F_{12}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем их поперёк динамического пограничного слоя в пределах от  $y = 0$  до  $y = \delta(x)$ , при этом примем во внимание правило дифференцирования интеграла по параметру с переменным верхним пределом [5] и условия на границах пограничного слоя:

$$\begin{aligned} y = 0: & u_1 = 0, u_2 = 0, \tau_1 = \tau_{1W}, v_1 = 0, v_2 = 0; \\ y = \delta(x): & u_1 = U_1, u_2 = U_2, v_1 = 0, v_2 = 0, \tau_1 = 0, \end{aligned}$$

тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho_1 u_1 (U_1 - u_1) dy + \frac{dU_1}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho_1 (U_1 - u_1) dy = \\ = \tau_{1W} - \int_0^{\delta(x)} \Delta F_{12} dy, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho_2 u_2 (U_2 - u_2) dy + \frac{dU_2}{dx} \int_0^{\delta(x)} \rho_2 (U_2 - u_2) dy =$$

$$\delta(x) = \int_0^{\delta(x)} \Delta F_{12} dy.$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \delta_1^{**} &= \int_0^{\delta(x)} \alpha_1 \frac{u_1}{U_1} \left(1 - \frac{u_1}{U_1}\right) dy, \\ \delta_2^{**} &= \int_0^{\delta(x)} \alpha_2 \frac{u_2}{U_2} \left(1 - \frac{u_2}{U_2}\right) dy, \quad (5) \\ \delta_1^* &= \int_0^{\delta(x)} \alpha_1 \left(1 - \frac{u_1}{U_1}\right) dy, \\ \delta_2^* &= \int_0^{\delta(x)} \alpha_2 \left(1 - \frac{u_2}{U_2}\right) dy, \quad (6) \end{aligned}$$

– соответственно толщины потери импульсов в фазах  $\delta_1^{**}$  (5) и толщины вытеснения  $\delta_1^*$  (6), тогда интегральные соотношения импульсов в фазах принимают канонический вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\rho_1^0 U_1^2 \delta_1^{**}) + \rho_1^0 U_1 \frac{dU_1}{dx} \delta_1^{**} &= \tau_{1W} - \int_0^{\delta} \Delta F_{12} dy, \\ \frac{d}{dx} (\rho_2^0 U_2^2 \delta_2^{**}) + \rho_2^0 U_2 \frac{dU_2}{dx} \delta_2^{**} &= \int_0^{\delta} \Delta F_{12} dy. \end{aligned}$$

Обозначим отношение скоростей фаз в потенциальной части потока  $U_2/U_1 = S$  – коэффициент проскальзывания фаз и  $\rho_* = \rho_1^0/\rho_2^0$  – приведенная плотность, тогда, складывая предыдущие уравнения, после некоторых преобразований получим интегральное соотношение импульсов для смеси в целом

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + (2\delta^{**} + \delta^*) \frac{U_1'}{U_1} + \frac{\delta^*}{\rho_*} SS' = \frac{\tau_{1W}}{\rho_1^0 U_1^2}, \quad (7)$$

где штрих означает производную по  $x$ , а толщина вытеснения  $\delta^*$  и толщина потери импульса  $\delta^{**}$  для смеси определены следующими выражениями:

$$\delta^{**} = \delta_1^{**} + S^2 \frac{\delta_2^{**}}{\rho_*}, \quad \delta^* = \delta_1^* + S^2 \frac{\delta_2^*}{\rho_*}. \quad (8)$$

Замечательной особенностью интегрального соотношения импульсов (7) является то, что все многообразие силового взаимодействия между фазами в их скоростной неравновесности учитывается в нём через интегральную характеристику – коэффициент проскальзывания фаз  $S$ .

Следует отметить, что при  $S = \text{const}$  уравне-

ние (7) по форме записи совпадает с интегральным соотношением Кармана [4].

Выведем также интегральное соотношение энергии пограничного слоя исходя из уравнения притока теплоты [3], которое в приближении пограничного слоя при установившемся течении несжимаемой жидкости (дозвуковые скорости течения) и температурной равновесности в фазах принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\rho_1 u_1 (T_\infty - T)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_1 v_1 (T_\infty - T)] &= \\ &= \frac{1}{c_1^0} \frac{\partial q_{1y}}{\partial y} - \alpha_1 \frac{Q_v^0}{c_1^0} + \alpha_1 u_1 \frac{Q_{v,\infty}^0}{c_1^0 U_1}, \end{aligned}$$

где  $c_i^0$  – истинная удельная массовая изобарная теплоемкость  $i$ -ой фазы потока, а величина  $Q_v^0 = Q_{дж}^0 + Q_\mu^0 + Q_\nu^0$  – плотность объемных источников тепловыделения за счет джоулевой, вязкой и «скоростной» диссипации энергии, индекс  $\infty$  относится к параметрам потока вне погранслоя.

При течении пузырькового потока, в котором объёмное содержание газовой фазы невелико  $\alpha_2 \ll 1$  и  $\rho_1^0 \gg \rho_2^0$ , можно пренебречь диссипацией энергии из-за скоростной неравновесности фаз. В этом случае плотность объемных источников тепловыделения будет определяться только джоулевой и вязкой диссипацией  $Q_v^0 = Q_{дж}^0 + Q_\mu^0$ . Вне пограничного слоя вязкая диссипация отсутствует и  $Q_\mu^0 = 0$ , тогда  $Q_{v,\infty}^0 = Q_{дж,\infty}^0$ . Внутри пограничного слоя  $Q_v^0 = Q_{дж}^0 + Q_\mu^0$ , при этом в силу закона сохранения электрического тока

$$Q_{дж,\infty}^0 = Q_{дж}^0 = \text{const}, \quad \text{а} \quad Q_\mu^0 = \mu_1 \left( \frac{du_1}{dy} \right)^2,$$

поэтому последнее выражение перепишем так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\rho_1 u_1 (T_\infty - T)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho_1 v_1 (T_\infty - T)] &= \\ &= \frac{1}{c_1^0} \frac{\partial q_{1y}}{\partial y} - \alpha_1 \frac{Q_{дж}^0}{c_1^0} \left(1 - \frac{u_1}{U_1}\right) - \frac{\alpha_1}{c_1^0} \mu_1 \left( \frac{du_1}{dy} \right)^2. \end{aligned}$$

Проинтегрируем это уравнение поперек теплового погранслоя в пределах от  $y=0$  до  $y=\delta_T(x)$ , учтем условия на границах теплового слоя

$$y=0: \quad u_1 = v_1 = 0, \quad T = T_W, \quad q_{1y} = -\lambda_{эф} \frac{\partial T}{\partial y};$$

$$y=\delta_T: \quad u_1 = U_1, \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0,$$

где  $\lambda_{эф}$  – эффективная теплопроводность двухфазного потока, перейдем к избыточным температурам, положив, что  $\Theta = T_{\infty}(x) - T(x)$ ,  $\theta = T(x) - T_W$ , тогда уравнение погранслоя примет вид

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} + (\delta_T^{**} + \delta_T^*) \frac{Q_{дж}^0}{\rho_1^0 c_1^0 U_1 \Theta} + \delta_T^{**} \frac{U_1'}{U_1} = \frac{\lambda_{эф}}{\rho_1^0 c_1^0 U_1 \Theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} - \alpha_1 \frac{\mu_1}{\rho_1^0 c_1^0 U_1 \Theta} \int_0^{\delta_T} \left( \frac{du_1}{dy} \right)^2 dy, \quad (9)$$

где

$$\lambda_{э\tau} = \lambda_1^0 \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha_2}{1 - \sqrt[3]{\frac{9\pi}{16} \alpha_2^2}} \right]^{-1} \approx \lambda_1^0 \left( 1 - \frac{3}{2} \alpha_2 \right)$$

–  $\lambda_1^0$  – истинная теплопроводность несущей фазы [6].

В приближенном методе расчета погранслоя для интегрирования уравнений (7) и (9) задаются профилями скорости и температуры. В случае динамического погранслоя профили скоростей фаз можно найти, удовлетворив следующим условиям на границе слоя:

$$y = 0: \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0;$$

$$y = \delta(x): \quad u_1 = U_1, \quad u_2 = U_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0,$$

что приводит к таким выражениям [2]:

$$\frac{u_1}{U_1} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3, \quad \frac{u_2}{U_2} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (10)$$

Профиль температур находят, удовлетворяя условиям на границах теплового погранслоя:

$$y = 0: \quad \theta = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0; \quad y = \delta_T(x): \quad \theta = \Theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0,$$

что даёт 
$$\frac{\theta}{\Theta} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta_T} \right)^3.$$

При заданных профилях (10) и (11) и параметрах  $U'$  и  $S'$  система уравнений (7) и (9) может интегрироваться численно. В случае обтекания пластины безградиентным потоком она допускает элементарное решение.

Действительно, положив в уравнениях (7) и (9)  $U' = 0, S' = 0$ , перепишем их в виде

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\mu_1}{\rho_1^0 U_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\mu_1}{\rho_1^0 U_1} \frac{1}{\delta(x)}, \quad (12)$$

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} + (\delta_T^{**} + \delta_T^*) \frac{Q_{дж}^0}{\rho_1^0 c_1^0 U_1 \Theta} + \alpha_1 \frac{\mu_1 U_1}{\rho_1^0 c_1^0 \Theta} \delta(x) = \frac{\lambda_{эф}}{\rho_1^0 c_1^0 U_1 \Theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (13)$$

Здесь, в уравнении (13), предполагалось, что  $\delta_T < \delta$ .

Рассмотрим вначале решение уравнения (12) для динамического пограничного слоя. Профили скорости дают возможность вычислить толщину потери импульса и, при условии  $\rho_* \gg 1$ , дают ( $\eta = y/\delta$ )

$$\delta^{**} = \delta_1^{**} + \frac{S^2}{\rho_*} \delta_2^{**} \approx \delta_1^{**} =$$

$$= \alpha_1 \delta(x) \int_0^1 \left( \frac{3}{2} \eta - \frac{1}{2} \eta^3 \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \eta + \frac{1}{2} \eta^3 \right) d\eta = \frac{39}{280} \alpha_1 \delta(x),$$

подставляя эту толщину в уравнение (12) и учитывая, что при  $x=0$   $\delta=0$ , получаем решение

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{1 + \alpha_2}{1 - \alpha_2}} \sqrt{\frac{280}{13} \frac{v_1^0 x}{U_1}}.$$

Здесь  $\alpha_1 = 1 - \alpha_2 = \text{const}$ .

При  $\alpha_2 = 0$  решение (14) переходит в свой однофазный аналог [2]. Следует отметить, что в полученное решение не входят силы, ответственные за скоростную неравновесность. Это объясняется тем, что информация о межфазном взаимодействии хранится в толщине потери импульсов дисперсной фазы  $\delta_2^{**}$ , которая из-за большого значения параметра  $\rho_*$  становится несущественной. Таким образом, решение (14) можно было бы назвать безинерционным.

На рис. 1 показаны графики зависимости толщины двухфазного и однофазного динамического пограничного слоя: кривая 1 – приведенная толщина  $\delta(x)/L$  однофазного, а 2 – двухфазного пограничного слоя по длине пластины:  $\zeta = x/L$ ,  $L$  – длина пластины. Толщина двухфазного слоя рассчитывалась при газосодержании  $\alpha_2 = 10\%$ , параметры жидкой фазы соответствовали воде при температуре 50°C.

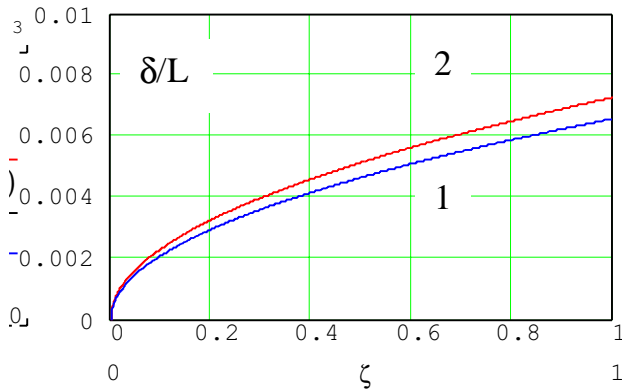


Рис. 1. Графики зависимости относительной толщины  $d/L$  ламинарного динамического пограничного слоя от приведенной длины  $z=x/L$ : 1 – однофазный, 2 – двухфазный ламинарные пограничные слои.

Приведенные графики показывают, что дисперсная фаза в несущем потоке приводит к увеличению толщины динамического пограничного слоя.

При интегрировании уравнения теплового пограничного слоя нужно учитывать две возможности: тепловой погранслой утоплен в динамическом  $\delta_T < \delta$  и тепловой слой толще динамического  $\delta_T > \delta$ .

Рассмотрим первый случай, имеющий место при числе Прандтля  $Pr = \nu_1^0 \rho_1^0 c_1^0 / \lambda_1^0 \geq 1$  – обычные жидкости.

Если ввести критерии задачи

$$Po = \frac{Q_{дж}^0 L}{\lambda_1^0 \Theta}, \quad Pe = \frac{U_1 L}{\lambda_1^0}, \quad Ec = \frac{U_1^2}{c_1^0 \Theta}, \quad Re = \frac{\rho_1^0 U_1 L}{\mu_1^0}$$

– соответственно числам Померанцева, Пекле, Эккерта и Рейнольдса, то уравнение (13) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{d\delta_T^{**}}{dx} + (\delta_T^{**} + \delta_T^*) \frac{Po}{Pe} \frac{1}{L} + \\ & + \alpha_1 (1 + \alpha_2) \frac{Ec}{Re} \frac{L}{\delta(x)} \int_0^{\delta_T} \left( \frac{d}{d\eta} \left( \frac{u_1}{U_1} \right) \right)^2 d\eta = \\ & = \frac{3}{2} \frac{1 - \frac{3}{2} \alpha_2}{Pe} \frac{L}{\delta_T(x)} \end{aligned} \quad (15)$$

Используя профили скоростей и температуры, рассчитаем входящие в это выражение толщины и интеграл.

Пусть  $\delta_T / \delta = h < 1$  и  $\eta = y / \delta$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta_T} \left( \frac{d}{d\eta} \left( \frac{u_1}{U_1} \right) \right)^2 d\eta &= \int_0^h \left( \frac{d}{d\eta} \left( \frac{3}{2} \eta - \frac{1}{2} \eta^3 \right) \right)^2 d\eta = \\ &= \frac{9}{4} h - \frac{3}{20} h^3 + \frac{9}{20} h^5, \end{aligned}$$

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \alpha_1 \frac{u_1}{U_1} \left( 1 - \frac{\theta}{\Theta} \right) dy = \frac{3}{20} \alpha_1 \delta h^2 \left( 1 - \frac{1}{14} h^2 \right),$$

$$\delta_T^* = \int_0^{\delta_T} \alpha_1 \left( 1 - \frac{\theta}{\Theta} \right) dy = \alpha_1 \delta h \left( 1 - \frac{3}{4} h + \frac{1}{8} h^2 \right)$$

Подставляя эти выражения в уравнение теплового пограничного слоя и учитывая решение (14), сведем его к функции  $h(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\zeta} &= \frac{13}{280} \frac{1 - \alpha_2}{1 + \alpha_2} \frac{1}{Pr} \frac{1 - \frac{3}{2} \alpha_2}{\zeta h(\zeta) \Psi(h)} - \frac{3}{40} \frac{1 - \alpha_2}{\zeta \Psi(h)} - \\ & - (1 - \alpha_2) \frac{\frac{3}{20} \Phi(h) + \chi(h)}{\Psi(h)} \frac{Po}{Pe} - \\ & - \frac{65}{1680} (1 - \alpha_2)^2 \frac{Ec}{\Psi(h) \zeta}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\zeta = x/L$  – приведенная продольная координата, а функции от  $h$  определены следующими выражениями

$$\begin{aligned} \Phi(h) &= h^2 \left( 1 - \frac{h^2}{14} \right), \quad \Psi(h) = 2h \left( 1 - \frac{h^2}{7} \right) \\ \chi(h) &= h \left( 1 - \frac{3}{4} h - \frac{h^2}{8} \right) \end{aligned}$$

Найдем более точные условия, чем  $Pr \geq 1$  [2], которые обеспечивают условие «утопленности» теплового погранслоя в динамическом.

Действительно, если правая часть уравнения (16) в точке  $\zeta=0$  будет отрицательной, то функция  $h(\zeta)$  станет убывающей. Доопределив её при  $x=0$   $h(0)=1$ , получим искомое условие:

$$Pr > Pr_{кр1} = \frac{13}{21} \frac{1}{1 + \alpha_2} \frac{1}{1 + 0.5 Ec}$$

Рассмотрим интегрирование уравнения теплового пограничного слоя (15), когда его толщина превышает толщину динамического, т.е.  $\delta_T \geq \delta$ .

В этом случае необходимо учесть, что при  $y > \delta$ ,  $u_1 = U_1$ , тогда для толщин погранслоя по-

лучаем:

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \alpha_1 \frac{u_1}{U_1} \left(1 - \frac{\theta}{\Theta}\right) dy =$$

$$= \alpha_1 \delta \left( -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} h + \frac{3}{20} \frac{1}{h} + \frac{29}{1120} \frac{1}{h^3} \right)$$

$$\delta_T^* = \int_0^{\delta_T} \alpha_1 \left(1 - \frac{u_1}{U_1}\right) dy = \alpha_1 \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u_1}{U_1}\right) dy = \frac{3}{8} \alpha_1 \delta,$$

и учитывая, что

$$\int_0^{\delta} \left( \frac{d}{dy} \left( \frac{u_1}{U_1} \right) \right)^2 dy = \frac{6}{5} \frac{1}{\delta(x)}, \text{ т.к. при } y > \delta \text{ } u_1 = U_1,$$

приводим уравнение теплового пограничного слоя к виду

$$\frac{dh}{d\zeta} = \frac{13}{280} \frac{1 - \frac{3}{2} \alpha_2}{1 + \alpha_2} \frac{1}{Pr} \frac{1}{\zeta h(\zeta) \Psi(h)} -$$

$$\frac{\left( \frac{3}{8} + \Phi(h) \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{Po}{Pe} \zeta \right)}{\Psi(h) \zeta} - \frac{39}{700} (1 - \alpha_2) \frac{Ec}{\Psi(h) \zeta}, \quad (17)$$

где функции от **h** определены равенствами

$$\Phi(h) = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} h + \frac{3}{20} \frac{1}{h} + \frac{29}{1120} \frac{1}{h^3},$$

$$\Psi(h) = \frac{3}{8} - \frac{3}{20} \frac{1}{h^2} - \frac{87}{1120} \frac{1}{h^4}$$

Потребовав, чтобы производная в точке  $\zeta=0$  была бы положительной, и доопределив функцию  $h(0)=1$ , можно найти условия, которым должны удовлетворять критерии задачи, чтобы тепловой слой был толще динамического:  $\delta_T > \delta$ :

$$Pr < Pr_{кр2} = \frac{26}{147} \frac{1 - \frac{3}{2} \alpha_2}{1 + \alpha_2} \frac{1}{1 + 2 \frac{Po}{Pe} + 0.2 Ec}$$

На рис. 2 показаны решения уравнений (16) и (17) для двух жидкостей: кривая 1 – вода при температуре 50°C и 2 – жидкий галлий при температуре 100°C с объемным содержанием пузырьков воздуха  $\alpha_2 = 10\%$ .

Функция  $h(\zeta)$  для воды рассчитывалась при  $Po = Ec = 0$  и  $Pr = 6,18$ , а для галлия – при следующих критериях

$$Pr = 0,02, \quad \Theta = 100^0 \text{ C}, \quad Pe = 1,12 * 10^5,$$

$$Ec = 3,9 * 10^{-7}, \quad Po = 7,69.$$

Из приведенных графиков видно, что на всей длине пластины в воде (кривая 1) выполняется условие утолщенности теплового слоя, а в жидком галлии (кривая 2) – обратное условие. Объемные источники тепловыделения, имеющие место в потоке жидкого металла, оказывают слабое влияние на величину  $h$  при указанных критериях задачи.

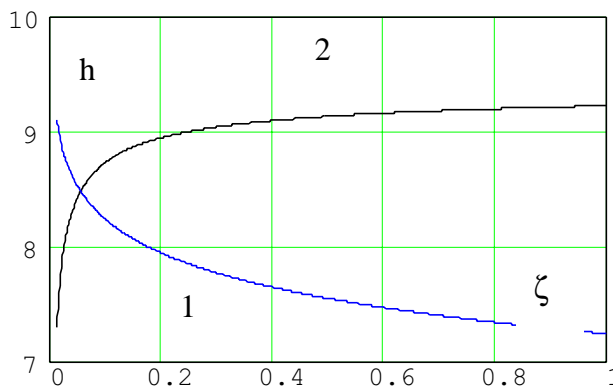


Рис. 2. Зависимость  $h = \delta_T / \delta$  по длине пластины  $\zeta = x/L$  в двухфазном пограничном слое: кривая 1 – несущий поток вода (масштаб по оси абсцисс увеличен в 10 раз), кривая 2 – жидкий галлий.

В широком их диапазоне эффектами тепловыделения  $Q_v$  можно пренебречь. Критическое число Прандтля для кривой 1 составляло  $Pr_{кр1} = 0,563$ , а для кривой 2 –  $Pr_{кр2} = 0,167$ . На рис. 3 показаны графики зависимости приведенной толщины  $\delta/L$  теплового (кривая 1) и динамического (кривая 2) пограничного слоя для двухфазного жидкометаллического потока галлия при объемном газосодержании 10% и указанных выше параметрах. Условие «утолщенности» динамического слоя обеспечивается малыми числами Прандтля в жидкометаллических потоках [2].

На рис. 4 приведен график зависимости местного коэффициента теплоотдачи  $\beta$  ( $Вт/м^2 * ^0C$ ) и местного числа Нуссельта  $Nu_x = \beta x / \lambda_1^0$  от местного числа Рейнольдса  $Re_x = U_1 x / \nu_1^0$ , соответствующие тепловому пограничному слою на рис. 3. Характер изменения местного коэффициента теплоотдачи похож на аналогичную зависимость в однофазной жидкости, но наличие газовой фазы приводит к некоторому снижению  $\beta$ .

Следует отметить, что устойчивость и сходимость численных алгоритмов решения уравнения теплового пограничного слоя нарушается на интервале чисел Прандтля  $Pr_2 < Pr < Pr_1$ .

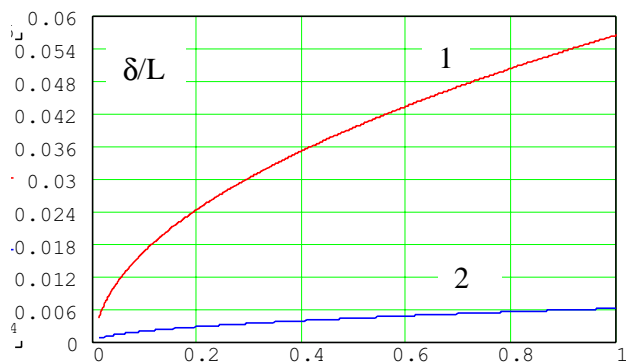


Рис. 3. Зависимость приведенной толщины теплового (кривая 1) и динамического (кривая 2) пограничного слоя по длине пластины  $z$  (динамический слой утоплен в тепловом).

Полученные уравнения теплового пограничного слоя могут быть использованы при расчете гидродинамики и теплообмена двухфазных жидкометаллических потоков в некоторых энергетических установках.

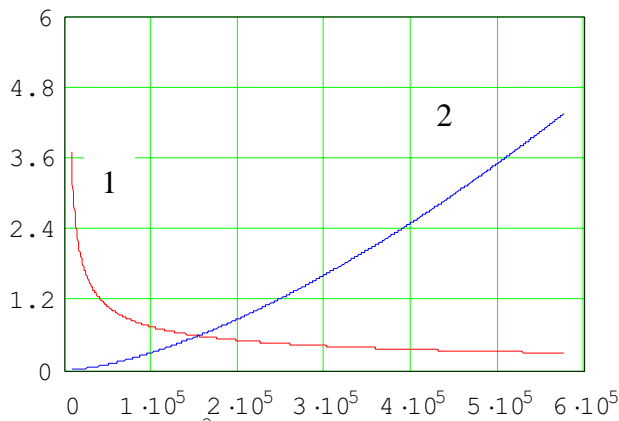


Рис. 4. Зависимость местного коэффициента теплоотдачи  $b/1000$  и числа Нуссельта  $Nu*1000$  в двухфазном жидкометаллическом потоке от местного числа Рейнольдса:  $b/1000$ -кривая 1,  $1000Nu$  – кривая 2.

**Список использованной литературы:**

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973 – 847 с.
2. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение, 1976. – 502 с.
3. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. – 336 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. – 711 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Наука, 1969.– 800 с.
6. Васильев А.П. Экспериментальное исследование электропроводности двухфазного потока// ИФЖ. – 1980. – Т. 39, №4. – С. 649-653.