В. Н. Булатов

ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФИЛЬТРА ВИДА *SIN(MX)/SIN(X)*

В статье приведены вывод и анализ импульсной характеристики трансформированной дельта-функции для квазинепрерывных периодических сигналов. Получены зависимости между временем переходного процесса и полосой частот синтеза анализируемой временной функции независимо от ее вида.

Для однократной реализации временного процесса – в строгом соответствии с преобразованием Фурье – математическим результатом преобразования из временной области в частотную может быть только спектральная плотность. Очевидно, что без предварительных преобразований выделение гармонических составляющих – в силу малости их амплитуд – невозможно.

Одним из способов преобразования можно рассматривать периодизацию сигнала с некоторым периодом повторения T, с числом повторений m, которая позволяет накапливать в достаточной мере энергию в точках $n\omega = n2\pi f = n2\pi/T$, где $n = 1, 2, 3,...$, чтобы произвести аппаратурное выделение фазы n-й составляющей.

Пусть носителем информативного параметра является фазовый спектр непериодического сигнала $e_1(t)$, при этом предполагается, что сигнал полностью представлен на конечном интервале времени $[-\tau/2, \tau/2]$ (рисунок 1, а). Пусть сигнал $e_1(t)$ имеет спектральную плотность $\mathbf{S}_1(\omega)$. Пусть имеется последовательность этих сигналов с числом m, равноотстоящих друг от друга на интервал T и симметрично расположенной на оси t (выравненная функция). Поскольку m может быть как нечетным числом, так и четным, то необходимо рассматривать анализ для обоих случаев формирования указанной последовательности (рисунки 1, б и 1, в).

Для получения спектральной функции конечной периодической последовательности импульсов используем линейные свойства преобразования Фурье и теорему о смещении в соответствии с рисунком 1.

Для нечетного m (рисунок 1, б):

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{S}_1(\omega)exp[+j(m-1)\,\omega T/2] + \mathbf{S}_1(\omega)exp[+j(m-3)\,\omega T/2] +...+ \mathbf{S}_1(\omega) +...+ \mathbf{S}_1(\omega)exp[-j(m-3)\,\omega\, T/2] + \mathbf{S}_1(\omega)exp[-j(m-1)\,\omega\, T/2].$$

Полученное выражение есть сумма геометрической прогрессии с множителем $exp[-j\omega T]$. Используя известное выражение для суммы геометрической прогрессии, запишем:

$$S(\omega) = S_1 \frac{e^{j(m-1)\omega T/2} - e^{-j(m+1)\omega T/2}}{1 - e^{-j\omega T}} =$$

$$= S_1(\omega) \frac{e^{jm\omega T/2} - e^{-jm\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}.$$

Используя формулу Эйлера для числителя и знаменателя, запишем окончательное выражение для спектральной плотности выравненной пачки с нечетным числом импульсов:

$$S(\omega) = S_1 \frac{e^{jm\omega T/2} - e^{-jm\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}} =$$

$$= S_1(\omega) \frac{\sin(m\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}.$$

б) Для четного m спектральную плотность определяем аналогично пункту а) с учетом рисунка 1, в:

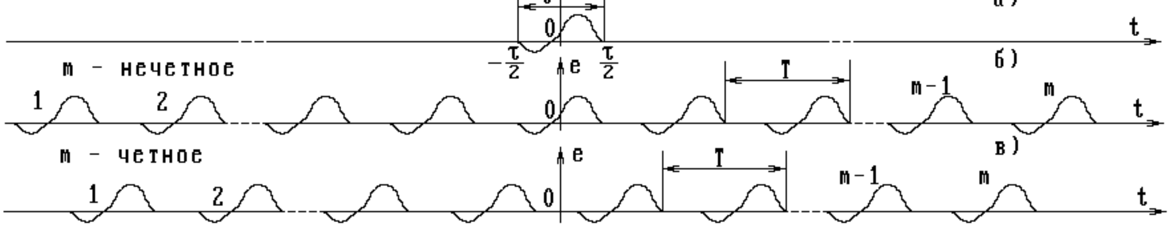

Рисунок 1

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{S}_1(\omega) exp[+j(m/2\text{-}1/2)\ \omega\ T] +$$
$$+\ \mathbf{S}_1(\omega) exp[+j(m/2\text{-}1/2)\ \omega\ T] + \ldots +$$
$$+\ \mathbf{S}_1(\omega) exp[+j(1/2)\ \omega\ T] +$$
$$+\mathbf{S}_1(\omega) exp[-j(1/2)\ \omega\ T] + \ldots +$$
$$+\ \mathbf{S}_1(\omega) exp[-j(m/2\text{-}1/2)\ \omega\ T] +$$
$$+\ \mathbf{S}_1(\omega) exp[-j(m/2\text{-}1/2)\ \omega\ T] =$$

$$= S_1 \frac{e^{j(m-1)\omega T/2} - e^{-j(m+1)\omega T/2}}{1 - e^{-j\omega T}} =$$

$$= S_1(\omega)\frac{\sin\left(m\omega T/2\right)}{\sin(\omega T/2)}.$$

Следовательно в аналитическом виде выражение спектральной плотности пачки одинаковых, равноотстоящих друг от друга, импульсов не зависит от четности числа *m* импульсов и определяется выражением:

$$S(\omega) = S_1(\omega)\frac{\sin(m\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{S}_1(\omega)$ — спектральная плотность выравненного одиночного импульса.

Очевидно, что именно второй сомножитель вида *sin(mx)/sin(x)* отражает динамику временного процесса в какой-либо полосе частот в пределах одной реализации сигнала *e(t)*.

Как уже было установлено в [1], указанный сомножитель в (1) имеет свойства гребенчатого фильтра, который при $m \to \infty$ преобразуется в периодическую дельта-функцию в частотной области, причем для четных *m* эта функция знакопеременная. Для установления влияния его параметров на переходной процесс определим его импульсную характеристику *g(t)*:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega T}{2}} e^{j\omega t} d\omega. \qquad (2)$$

Для определения *g(t)* представим интеграл в выражении (2) в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega T}{2}} e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega(t+\frac{mT}{2})}}{\sin\frac{\omega T}{2}} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega(t-\frac{mT}{2})}}{\sin\frac{\omega T}{2}} d\omega\right]. \qquad (3)$$

Определим импульсную характеристику *g(t)* при $\omega \in [-\infty, \infty]$. Поскольку подынтегральные функции имеют разрывы (полюсы) при $\omega_k = \pm 2k\pi T$, то для определения несобственных интегралов воспользуемся теорией о вычетах [2], для чего введем комплексную перемену $z = \omega + jY$. Построим контур интегрирования таким образом (рисунок 2), чтобы функция *f(z)* внутри контура была всюду аналитична. При этом особые точки $z_k = \omega_k$ обойдем полуокружностями l_i по часовой стрелке.

В соответствии с рисунком 2 и теоремой Коши [2] для левого интеграла в правой части уравнения (3) можно записать:

$$\left(\int_{-R}^{\frac{-2k\pi}{T}-r} + \int_{\frac{-2k\pi}{T}+r}^{\frac{-2(k-1)\pi}{T}-r} + \ldots + \int_{\frac{-2\pi}{T}+r}^{-r} + \int_{r}^{\frac{2\pi}{T}-r} + \ldots + \int_{\frac{2(k-1)\pi}{T}+r}^{\frac{2k\pi}{T}-r} + \int_{\frac{2k\pi}{T}+r}^{R}\right)\bullet$$

$$\bullet\int\frac{e^{j\omega(t+\frac{mT}{2})}}{\sin\frac{\omega T}{2}} d\omega =$$

$$= \sum_{2k+1}\left(\int_{l_i}\frac{e^{jz(t+\frac{mT}{2})}}{\sin\frac{zT}{2}} dz\right) - \int_{L}\frac{e^{jz(t+\frac{mT}{2})}}{\sin\frac{zT}{2}} dz. \qquad (4)$$

Сначала вычислим правый интеграл в выражении (4) при $R \to \infty$, считая при этом, что $R = |f(z)|$ является множеством, исключающим z_k, что не является ограничением *R* сверху. В этом случае очевидно, $|f_1(z)| = 1/|sin(zT/2)|$ будет бесконечно убывать при $R \to \infty$. Следовательно рассматриваемый случай удовлетворяет условиям леммы Жордана, согласно которой для $t > (-mT/2)$ можно записать:

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ z\neq z_k}}\int_{L}\frac{e^{jz(t+\frac{mT}{2})}}{\sin\frac{zT}{2}} dz = 0. \qquad (5)$$

Теперь определимся с суммой определенных интегралов, представленной левой частью уравнения (4). Из рисунка 2 очевидно, что

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}}\left(\int_{-R}^{\frac{-2k\pi}{T}-r} + \int_{\frac{-2k\pi}{T}+r}^{\frac{-2(k-1)\pi}{T}-r} + \ldots + \int_{\frac{-2\pi}{T}+r}^{-r} + \int_{r}^{\frac{2\pi}{T}-r} + \ldots\right.$$

$$\ldots+\left(\int\limits_{\frac{2(k-1)\pi}{T}+r}^{\frac{2k\pi}{T}-r}+\int\limits_{\frac{2k\pi}{T}+r}^{R}\right)\frac{e^{j\omega(t+\frac{mT}{2})}}{\sin\frac{\omega T}{2}}d\omega=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega(t+\frac{mT}{2})}}{\sin\frac{\omega T}{2}}d\omega, \qquad (6)$$

то есть этот предел есть левый интеграл в квадратных скобках (3).

И, наконец, определим сумму $2k$+1 интегралов в (4) вдоль одинаковых полуокружностей l_i с радиусом $r\to 0$. При этом объединим вычисления интегралов вдоль симметрично расположенных относительно $z_0=0$ путей интегрирования l_i (рисунок 2) и введем замены:

$$z=r\cdot e^{j(\phi\pm\frac{2k\pi}{T})},\ k\in Z_p;\ dz=jre^{j\phi}d\phi,\ \phi\in[0,\pi].$$

К этому добавим еще одно упрощение:

$\sin\limits_{z\to z_k}\frac{zT}{2}\approx(-1)^k\frac{zT}{2}$ в окрестности z_k.

Для $t>-mT/2$:

$$I_{1l_0}=\lim_{r\to 0}\int\limits_{l0}\frac{e^{z(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{zT}{2}}dz=\lim_{r\to 0}\int\limits_0^{\pi}\frac{e^{jr^{j\phi}(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{T}{2}re^{j\phi}}jre^{j\phi}=j\frac{2\pi}{T};$$

$$I_{1l_1}=\lim_{r\to 0}\left[\left(\int\limits_{l_{1L}}+\int\limits_{l_{1R}}\right)\frac{e^{z(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{zT}{2}}dz\right]=$$

$$=\lim_{r\to 0}\left[\int\limits_0^{\pi}\frac{e^{j(r\cdot e^{j\phi}-\frac{2\pi}{T})(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{T}{2}re^{j\phi}}jre^{j\phi}d\phi+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\pi}\frac{e^{j(r\cdot e^{j\phi}+\frac{2\pi}{T})(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{T}{2}re^{j\phi}}jre^{j\phi}d\phi\right]=$$

$$=-j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}(t+\frac{mT}{2});$$

$$I_{1l_2}=\lim_{r\to 0}\left[\left(\int\limits_{l_{2L}}+\int\limits_{l_{2R}}\right)\frac{e^{z(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{zT}{2}}dz\right]=$$

$$=\lim_{r\to 0}\left[\int\limits_0^{\pi}\frac{e^{j(r\cdot e^{j\phi}-\frac{4\pi}{T})(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{T}{2}re^{j\phi}}jre^{j\phi}d\phi+\right.$$

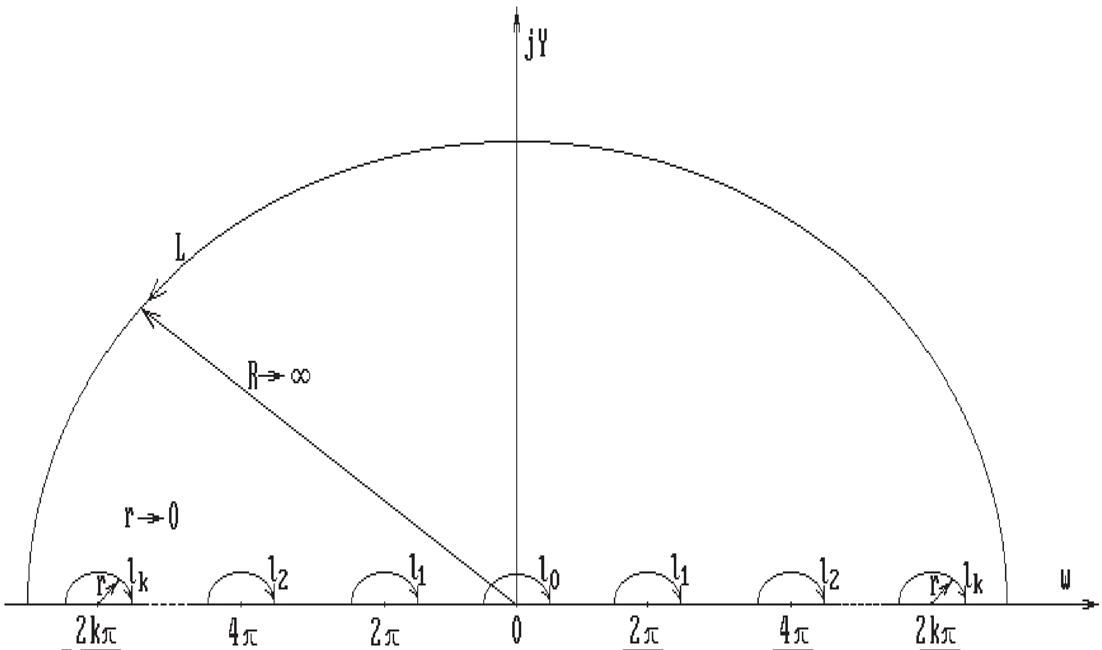

Рисунок 2

$$+\int_0^{\pi}\frac{e^{j(r\cdot e^{j\phi}+\frac{4\pi}{T})(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{T}{2}re^{j\phi}}jre^{j\phi}d\phi\Bigg]=$$

$$=j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{4\pi}{T}(t+\frac{mT}{2});$$

. . . .

$$I_{1l_k}=\lim_{r\to 0}\left[\left(\int_{l_{kL}}+\int_{l_{kR}}\right)\frac{e^{z(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{zT}{2}}dz\right]=$$

$$=\lim_{r\to 0}\Bigg[\int_0^{\pi}\frac{e^{j(r\cdot e^{j\phi}-\frac{2k\pi}{T})(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{T}{2}re^{j\phi}}jre^{j\phi}d\phi+$$

$$+\int_0^{\pi}\frac{e^{j(r\cdot e^{j\phi}+\frac{2k\pi}{T})(t+\frac{mT}{2})}}{\frac{T}{2}re^{j\phi}}jre^{j\phi}d\phi\Bigg]=$$

$$=(-1)^k j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{2k\pi}{T}(t+\frac{mT}{2}).$$

Для вычисления интегралов I_{1li} для $t< -mT/2$ нужно рассмотреть зеркальное [2] относительно оси ω представление контура интегрирования. Очевидно, что в соответствии с теоремой Коши в этом случае:

$$I_{1l_0}=-j\frac{2\pi}{T};$$

$$I_{1l_1}=j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}(t+\frac{mT}{2});$$

$$I_{1l_2}=-j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{4\pi}{T}(t+\frac{mT}{2});$$

……………………………..

$$I_{1l_k}=-(-1)^k j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{2k\pi}{T}(t+\frac{mT}{2}).$$

С учетом полученных зависимостей для I_{1li} запишем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega(t+\frac{mT}{2})}}{\sin\frac{\omega T}{2}}d\omega= \tag{7}$$

$$=\begin{cases} j\frac{2\pi}{T}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i(m+1)}2\cos\frac{2i\pi}{T}t\right) & при \quad t>-\frac{mT}{2};\\ -j\frac{2\pi}{T}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i(m+1)}2\cos\frac{2i\pi}{T}t\right) & при \quad t<-\frac{mT}{2}.\end{cases}$$

По этой же технологии определяем зависимость для правого интеграла в квадратных скобках правой части уравнения (3). Поскольку подынтегральные выражения суммы интегралов в (3) отличаются только множителем ($t+mT/2$) и соответственно ($t-mT/2$) в степени при экспоненте, то очевидно, что предыдущие результаты будут справедливы и для этого интеграла, только с заменой множителей: ($t+mT/2$) → ($t-mT/2$):

$$I_{2l_0}=\begin{cases}+j\frac{2\pi}{T} & при \quad t>\frac{mT}{2};\\ -j\frac{2\pi}{T} & при \quad t<\frac{mT}{2};\end{cases}$$

$$I_{2l_1}=\begin{cases}-j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}(t-\frac{mT}{2}) & при \quad t>\frac{mT}{2};\\ +j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}(t-\frac{mT}{2}) & при \quad t<\frac{mT}{2};\end{cases}$$

$$I_{2l_2}=\begin{cases}+j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{4\pi}{T}(t-\frac{mT}{2}) & при \quad t>\frac{mT}{2};\\ -j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{4\pi}{T}(t-\frac{mT}{2}) & при \quad t<\frac{mT}{2};\end{cases}$$

. . . .

$$I_{2l_k}=\begin{cases}(-1)^k j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{2k\pi}{T}(t-\frac{mT}{2}); & при \quad t>\frac{mT}{2};\\ -(-1)^k j\frac{4\pi}{T}\cos\frac{2k\pi}{T}(t-\frac{mT}{2}); & при \quad t<\frac{mT}{2};\end{cases}$$

С учетом полученных зависимостей для I_{2li} и произведенной замены: ($t+mT/2$) → ($t-mT/2$) – выражение (4) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega(t-\frac{mT}{2})}}{\sin\frac{\omega T}{2}}d\omega= \tag{8}$$

$$\begin{cases} j\dfrac{2\pi}{T}\left(1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i(1+m)}2\cos\dfrac{2\pi\cdot i}{T}\right) & при \quad t>\dfrac{mT}{2}; \\ -j\dfrac{2\pi}{T}\left(1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i(1+m)}2\cos\dfrac{2\pi\cdot i}{T}\right) & при \quad t<\dfrac{mT}{2}. \end{cases}$$

Подставляя зависимости (7) и (8) в (3), и далее – в (2), окончательно получим выражение импульсной характеристики $g(t)$:

$$g(t)= \tag{9}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{T}\left(1+2\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i(1+m)}\cos\dfrac{2\pi\cdot i}{T}t\right) & при \quad \dfrac{mT}{2}>t>-\dfrac{mT}{2}; \\ 0 \quad при \quad |t|>\dfrac{mT}{2}. \end{cases}$$

Или

$$g(t)= \tag{10}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{T}\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(-1)^{i(1+m)}e^{j\frac{2\pi i}{T}i} & при \quad \dfrac{mT}{2}>t>-\dfrac{mT}{2}; \\ 0 \quad при \quad |t|>\dfrac{mT}{2}. \end{cases}$$

Из анализа (9) и (10) следует, что импульсная характеристика $g(t)$ представляет собой нормированные веса гармонических функций, представляющих ортогональную систему на конечном интервале времени mT, симметрично расположенном на временной оси. Независимость от времени огибающих весовых функций позволяет судить о безынерционности фильтра типа $sin(mx)/sin(x)$ при конечных значениях m, что, в свою очередь, позволяет сформулировать очень важный вывод о том, что если $g(t)$ содержит бесконечное число слагаемых нормированных весовых гармонических функций, представляющих собой ортогональную систему, то, независимо от длительности интервала mT, временные параметры сигнала $e_1(t)$ на каждом последующем интервале T будут полностью воспроизводиться.

Пример – пусть задан сигнал

$$e_1(t)=\begin{cases} U_m\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t+\phi\right) & при \quad 0\le t\le T, \\ 0 \quad при \quad t<0 \quad и \quad t>T. \end{cases}$$

Найдем сигнал $e(t)$ на выходе фильтра вида $sin(mx)/sin(x)$:

$$e(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}e_1(x)g(t-x)dx=\int\limits_{0}^{T}e_1(t-x)g(x)dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{T}U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T}(t-x)+\phi\right)\bullet$$

$$\bullet\left[\frac{1}{T}\left(1+2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{k(1+m)}\cos\frac{2\pi\cdot i}{T}x\right)\right]dx=$$

$$=\frac{U_m}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)\int\limits_{0}^{T}\cos\frac{2\pi}{T}x\bullet$$

$$\bullet\left(1+2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{k(1+m)}\cos\frac{2\pi\cdot i}{T}x\right)dx+$$

$$+\frac{U_m}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}+\phi\right)\int\limits_{0}^{T}\sin\frac{2\pi}{T}x\bullet$$

$$\bullet\left(1+2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{k(1+m)}\cos\frac{2\pi\cdot i}{T}x\right)dx=$$

$$=\frac{U_m}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}+\phi\right)\int\limits_{0}^{T}\frac{1}{2}2(-1)^{1+m}dx+0=$$

$$=(-1)^{1+m}U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi\right)\Bigg|_{\frac{mT}{2}>t>-\frac{mT}{2}}.$$

Как и следовало ожидать, переходной процесс как таковой отсутствует и огибающая гармонического колебания прямоугольна. Меняется в зависимости от m только фаза колебаний на величину $\pm\pi$, что соответствует положениям и выводам, изложенным в [1] для частотной области.

С точки зрения практики интерес представляет случай выделения на определенном интервале (сечении) времени узкополосного сигнала в области частот $\omega_k=\pm 2k\pi/T$, который, строго говоря, нельзя назвать непрерывным гармоническим сигналом из-за размытости соответствующей спектральной составляющей. Для анализа переходных процессов в узкополосной системе и определения функциональной связи с размытостью спектральных линий (чистотой спектральных линий) определим импульсную характеристику $g(t)$ фильтра типа $sin(mx)/sin(x)$ в полосе частот $\omega\in[\omega_k-\Omega_1,\ \omega_k+\Omega_1]$, где $\omega_k=2\pi k/T$, $\Omega_1<<\omega_k$ (рисунок 3), причем за пределами этой полосы частот будем считать, что $|\ sin(mx)/sin(x)\ |=0$.

С учетом введенных ограничений по полосе пропускания импульсная характеристика будет определяться таким выражением:

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2k\pi}{T}-\Omega_1}^{-\frac{2k\pi}{T}+\Omega_1}\frac{\sin\frac{m\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega T}{2}}e^{j\omega t}d\omega+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{2k\pi}{T}-\Omega_1}^{\frac{2k\pi}{T}+\Omega_1}\frac{\sin\frac{m\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega T}{2}}e^{j\omega t}d\omega. \qquad (11)$$

Поскольку сигнал узкополосный, то удобнее ввести переменную расстройки Ω. Для положительных значений частоты: ω=2kπ/*T*+Ω, для отрицательных: ω=-2kπ/*T*-Ω, *d*ω=*d*Ω. Тогда выражение (11) примет вид:

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\Omega_1}^{\Omega_1}\frac{\sin\frac{mT}{2}\left(-\frac{2k\pi}{T}-\Omega\right)}{\sin\frac{T}{2}\left(-\frac{2k\pi}{T}-\Omega\right)}e^{-j\left(\frac{2k\pi}{T}+\Omega\right)t}d\Omega+\right.$$

$$\left.+\int_{-\Omega_1}^{\Omega_1}\frac{\sin\frac{mT}{2}\left(\frac{2k\pi}{T}+\Omega\right)}{\sin\frac{T}{2}\left(\frac{2k\pi}{T}+\Omega\right)}e^{j\left(\frac{2k\pi}{T}+\Omega\right)t}d\Omega\right]=$$

$$=(-1)^{k(1+m)}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\Omega_1}^{\Omega_1}\frac{\sin\frac{m\Omega T}{2}}{\sin\frac{\Omega T}{2}}e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}e^{-j\Omega t}d\Omega+\right.$$

$$\left.+\int_{-\Omega_1}^{\Omega_1}\frac{\sin\frac{m\Omega T}{2}}{\sin\frac{\Omega T}{2}}e^{j\frac{2k\pi}{T}t}e^{j\Omega t}d\Omega\right]_{\Omega<<\frac{2\pi}{T}}\approx$$

$$\approx(-1)^{k(1+m)}\frac{1}{2\pi T}\times$$

$$\times\left[e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}\left(\int_{-\Omega_1}^{\Omega_1}\frac{\sin(\frac{mT}{2}-t)\Omega+\sin(\frac{mT}{2}+t)\Omega}{\Omega}d\Omega-\right.\right.$$

$$\left.-\int_{-\Omega_1}^{\Omega_1}\frac{\cos(\frac{mT}{2}-t)\Omega-\cos(\frac{mT}{2}+t)\Omega}{\Omega}d\Omega\right)+$$

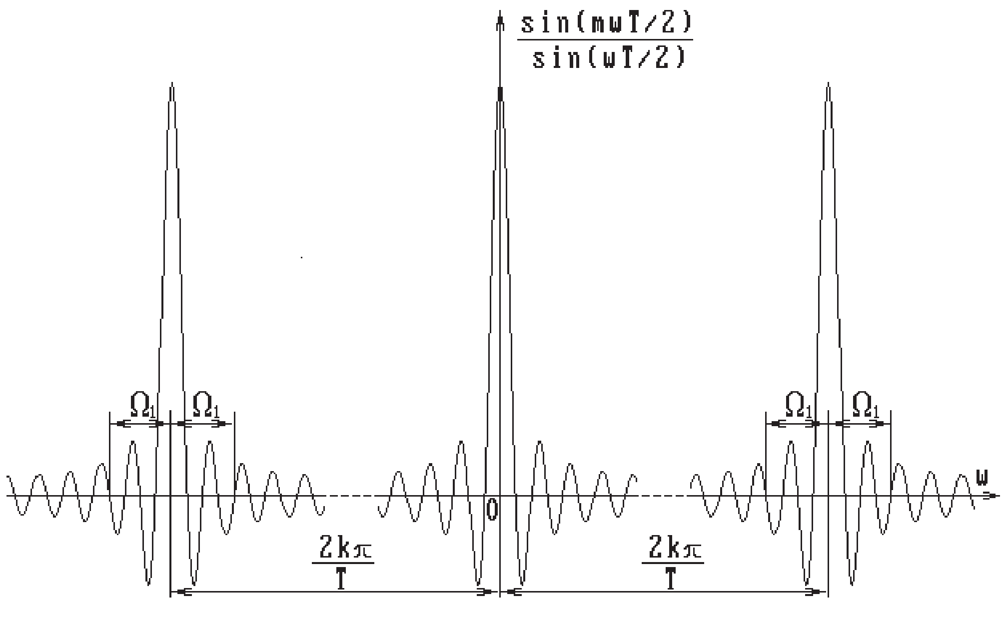

Рисунок 3

$$+e^{j\frac{2k\pi}{T}t}\left[\int_{-\Omega_1}^{\Omega_1}\frac{\sin\left(\frac{mT}{2}-t\right)\Omega+\sin\left(\frac{mT}{2}+t\right)\Omega}{\Omega}d\Omega+\right.$$

$$\left.\left.+\int_{-\Omega_1}^{\Omega_1}\frac{\cos\left(\frac{mT}{2}-t\right)\Omega-\cos\left(\frac{mT}{2}+t\right)\Omega}{\Omega}d\Omega\right]\right]. \quad (12)$$

Вторые интегралы во внутренних скобках выражения (12) – в силу нечетности функции суммы слагаемых подынтегральных функций и симметричности пределов – равны нулю. Тогда, с учетом четности функции суммы слагаемых подинтегральных функций первых интегралов во внутренних скобках (12), можно записать:

$$g(t)=(-1)^{k(1+m)}\frac{2}{\pi T}\left(Si\left[\left(t+\frac{mT}{2}\right)\Omega_1\right]-\right.$$

$$\left.-Si\left[\left(t-\frac{mT}{2}\right)\right]\Omega_1\right)\cos\frac{2k\pi}{T}t. \quad (13)$$

Таким образом, получено выражение в общем виде для импульсной характеристики *g(t)* узкополосного сигнала с условиями фильтрации, описанными выше. Из анализа (13) можно сделать вывод, что множитель перед весовой функцией $cos(2k\pi t/T)/T$ отображает характер ее огибающей.

Обозначим функцию огибающей импульсной характеристики *g(t)* через $g_A(t)$:

$$g_A(t)=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\Omega_1}\frac{\sin(t+\frac{mT}{2})\Omega}{\Omega}d\Omega-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\Omega_1}\frac{\sin(t-\frac{mT}{2})\Omega}{\Omega}d\Omega\right]. \quad (14)$$

Общий характер огибающей $g_A(t)$ представлен на рисунке 4.

Для определения времени установления переходного процесса предлагается в качестве величины, характеризующей это время, взять время фронта. В выражении (14) первый интеграл представляет время переднего фронта, второй – заднего. Поскольку они идентичны, то передний и задний фронты должны быть одинаковы, и для опре-

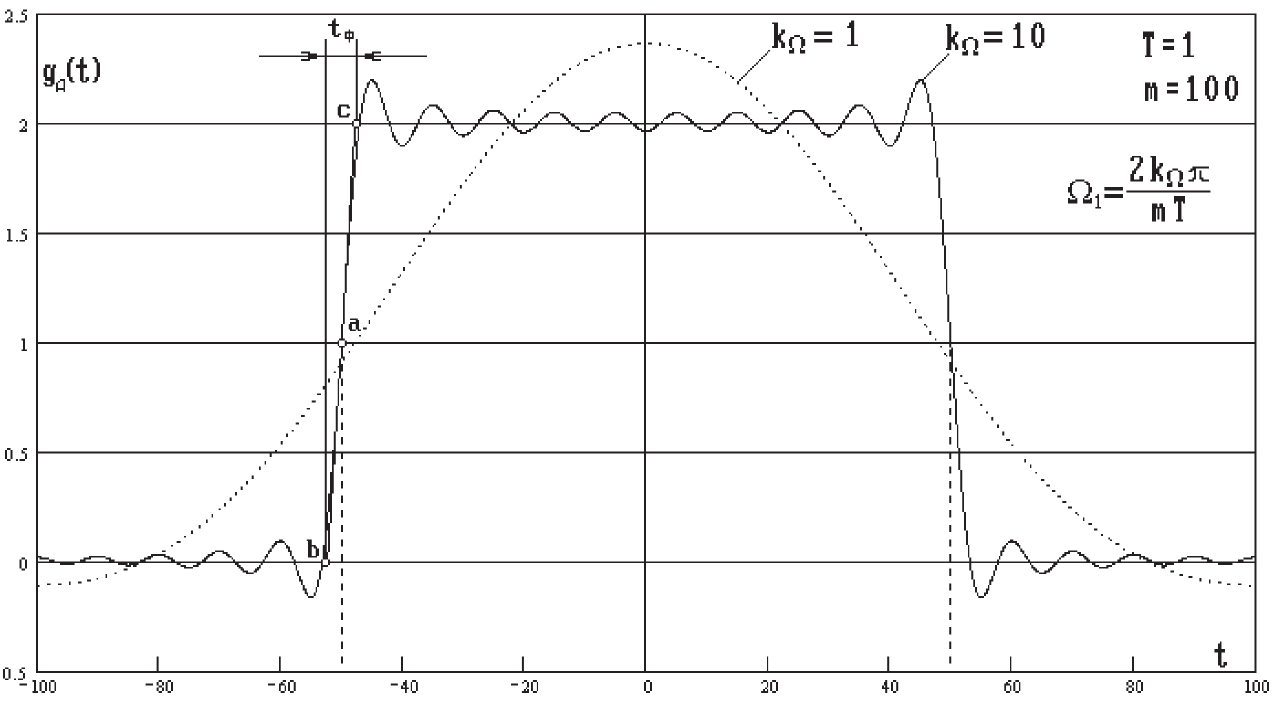

Рисунок 4. Огибающая импульсной характеристики $g_A(t)$.

деления фронтов достаточно определить, допустим, передний. Методика определения величины фронта t_ϕ переходного процесса предлагается следующая.

В области **a** (рисунок 4) при $t \to -mT/2$ можно считать, что в силу малости аргумента при функции *sin*:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\Omega_1}\frac{\sin(t+\frac{mT}{2})\Omega}{\Omega}d\Omega \approx \frac{2(t+\frac{mT}{2})}{\pi}\int_0^{\Omega_1}\frac{\Omega}{\Omega}d\Omega \approx$$

$$\approx \frac{2}{\pi}(t+\frac{mT}{2})\Omega_1. \tag{15}$$

Из анализа (9) следует, что для широкополосной системы (предельный случай) амплитуда огибающей одной нормированной весовой гармонической функции равна 2. На основании этого заключения принимаем в качестве фронта прямую, проходящую через точки **b, a, c** (рисунок 4), где точка **b** соответствует $g_{Amin}=0$, точка **c** соответствует $g_{Amax}=2$ – установившемуся значению в широкополосной системе. Наклон прямой **bac** с учетом (15) определяем следующим образом:

$$\left.\frac{dg_A(t)}{dt}\right|_{t=a} = \frac{d}{dt}\left[(t+\frac{mT}{2})\frac{2\Omega_1}{\pi}\right]_{t=-mT/2} = \frac{2\Omega_1}{\pi}. \tag{16}$$

Чтобы установить зависимость временных характеристик процесса с с параметром размытости спектральной составляющей, привяжем зависимость Ω_1 к нулям функции вида *sin(mx)/sin(x)* (рисунок 3):

$$\Omega_{1=}2k\Omega\pi/(mT), \tag{17}$$

где $k\Omega \in N_p$ (N_p – множество натуральных положительных чисел).

Тогда

$$\frac{dg_A}{dt} = \frac{4k_\Omega\pi}{mT\pi} = \frac{4k_\Omega}{mT}; \tag{18}$$

Теперь с учетом (17) и (18) определяем величину t_ϕ:

$$t_\phi = \frac{g_{A\max} - g_{A\min}}{\frac{dg_A(t)}{dt}} = \frac{2mT}{4k_\Omega} = \frac{mT}{2k_\Omega}. \tag{19}$$

Таким образом, получена зависимость длительности переходного процесса в зависимости от параметра $k\Omega$, характеризующего чистоту спектральной линии. Кроме этого, всегда выполняется: $t_\phi=2\pi/2\Omega$, откуда следует:

$$t_\phi\Omega_1=\pi = \text{const}. \tag{20}$$

На основании полученных результатов исследования (в частности, на основании (13), (19), (20) и рассмотренного примера), можно сделать очень важное заключение о том, что если трансформировать информативную фазу выделяемого узкополосного сигнала в точки пересечения его через ноль, то теоретически информация будет истинной, начиная с первой точки пересечения через ноль – независимо от вида огибающей переходного процесса; фактически же неинформативная начальная часть переходного процесса будет определяться уровнем шумов на входе узкополосной системы и выбранной величиной $k\Omega$.

Список использованной литературы:

1. Булатов В.Н. Анализ спектра однократной реализации недетерминированного сигнала // Научные основы высоких технологий: Сб. науч. тр. Международной научно-технической конф.; В 6-и т. – Новосибирск, 1997. – Т.2. – С. 134 – 138.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука. Гл. ред физ.мат. лит., 1985. – 464 с.: ил.