В. В. Липилина

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

При изучении теории случайных процессов весьма важным является более подробное изучение вопросов, связанных со стохастическими интегралами и интегральными уравнениями, описывающими диффузионные процессы. Прекрасным введением в круг идей, связанных со стохастическими процессами, может служить книга К. Ито [2], а также книга Генри Маккина [1]. Основой для работы над данной статьёй послужила последняя. В работе над этой темой автор руководствовался следующими соображениями: необходимо было подробно разобрать идеи, рассмотренные Г. Маккином, провести доказательство некоторых фактов, данных в книге без доказательств, решить некоторые задачи.

Введение

Г. Маккин рассматривает построение броуновского движения и его свойства для одномерного и многомерного случаев, неравенства для мартингалов, законы Хинчина и Леви.

Броуновская траектория нигде не дифференцируема, в силу этого интегралы вида $\int_0^1 e(t)db$ не могут быть определены обычным образом. В книге излагаются строгое определение стохастического интеграла и простейшие свойства стохастических интегралов, стохастические дифференциалы, лемма Ито для одномерного и многомерного броуновского движения, стохастические интегральные уравнения для одномерного и многомерного случаев.

Стохастическое интегрирование случайных функций ввёл и изучил К. Ито. Интегрирование по квадратично интегрируемым мартингалам с абсолютно непрерывной характеристикой рассматривал Дж. Л. Дуб. Дальнейшее усовершенствование и развитие стохастического интеграла дано в работах П. Мейера.

Нововведением в книге Г. Маккина является использование экспоненциального мартингала $\gamma(t)=\exp\left[\int_0^t edb-\frac{1}{2}\int_0^t e^2ds\right]$ при выводе мощной оценки $P\left[\max_{t\le 1}\left[\int_0^t edb-\frac{\alpha}{2}\int_0^t e^2ds\right]>\beta\right]\le e^{-\alpha\beta}$.

1. Винеровское определение стохастического интеграла

Т.к. сумма $\ell_n=\sum_{k\le 2^n}\left|b\left(k2^{-n}\right)-b\left((k-1)2^{-n}\right)\right|$ возрастает при $n\uparrow\infty$, а

$$E\left[e^{-\ell n}\right]=\left(E\left[exp\left(1-b\left(2^{-n}\right)\right)\right]\right)^{2^n}\le\left(1-2^{-\frac{n}{2}-1}+2^{-n}\right)^{2^n}\downarrow 0$$

(использована оценка $e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$ при $x\ge 0$), то длина ℓ_∞ броуновской траектории $b(t): t\le 1$ бесконечна, и интеграл вида $\int_0^1 e(t)db$ нельзя определить обычным образом.

Винер обошел эту трудность, положив $\int_0^1 e(t)db=e(1)\cdot b(1)-e(0)b(0)=\int_0^1 e'bdt$ для подходящих функций $e = e(t)$ из $C'[0,1]\left(\int_0^1 edb=-\int_0^1 e'bdt\right)$ для неслучайных функций $e(t)\in C^1[0,1]$, равных 0 $b(t)= 1$), и распространив затем этот интеграл на $Z_2[0,1]$ с помощью изометрии,

$$E\left[\left(\int_0^1 edb\right)^2\right]=\int_0^1\int_0^1 t_1\Lambda t_2e'(t_1)e'(t_2)dt_1dt_2=\int_0^1 e^2dt.$$

Ито распространил этот интеграл на широкий класс броуновских функционалов $e = e(t)$, для которых $P\left[\int_0^1 e^2dt<\infty\right]=1$, зависящих от траектории $t\to b(t)$ **неупреждающим образом.**

2. Определить стохастический интеграл Ито

Рассмотрим поле C борелевских подмножеств оси [0,8) и возрастающее семейство полей $A_t\supset B_t$ ($t = 0$), таких, что A_s не зависит от поля B_s, порождённого процессом

$$b^+(t)\equiv b(t+s)-b(s):\quad t\ge 0$$

функция $e = e(t)$, зависящая от $t\ge 0$, броуновской траектории $t\to b(t)$, и, возможно, дополнительных стохастических координат, измеримых относительно A_8, называется **неупреждающим броуновским функционалом,** если:

1) $e(t)$ измерима относительно $C\times A_в$,

2) $e(t)$ при каждом $t\geq 0$ измерима относительно A_t. Определим $\int_0^1 edb$ одновременно для всех $t\geq 0$ и для почти каждой броуновской траектории.

Дополнительно предполагается, что $P\left[\int_0^1 e^2 ds<\infty, t\geq 0\right]=1$ (дальше будет показано, что без этого условия обойтись нельзя). Чтобы понять суть дела, достаточно рассмотреть построение интеграла $\int_0^1 edb(t\leq 1)$ при условии $P\left[\int_0^1 e^2 dt<\infty\right]=1$. Оценки основываются на маргинальном неравенстве.

ШАГ 1. Неупреждающий броуновский функционал e называется **простым**, если

$e(t) = e((k-1)2^{-n})$ при $(k-1)2^{-n}\leq t\leq k2^{-n}$, $(k\leq 2^n)$ для некоторого $n\geq 1$.

Для таких e определим

$$\int_0^1 edb=\sum_{k\leq l} e\left((k-1)2^{-m}\right)\left[b\left(k2^{-m}\right)-b\left((k-1)2^{-m}\right)\right]+$$

$$+e\left(\ell 2^{-m}\right)\left[b(t)-b\left(\ell 2^{-m}\right)\right]^{p},$$

где $t\leq 1$, $m\geq n$, $\ell=\left[2^m t\right]$.

Заметим следующее:

(a) интеграл не зависит от $m\geq n$;

(b) $\int_0^t (e_1+e_2)db=\int_0^t e_1 db+\int_0^t e_2 db$;

(c) $\int_0^t kedb=k\int_0^t edb$, $\forall k=const$;

(d) интеграл представляет собой непрерывную функцию верхнего предела $t\leq 1$.

ШАГ 2. Чтобы определить $\int_0^t edb \quad (t\leq 1)$ для общего неупреждающего функционала, понадобится следующая оценка интеграла от простого функционала:

$$P\left[\max_{t\leq 1}\int_0^t edb-\frac{\alpha}{2}\int_0^t e^2 ds>\beta\right]\leq e^{-\alpha\beta}$$

ШАГ 3. Пусть e_n – последовательность простых функционалов, для которых

$P\left[\int_0^t e_n^2 dt\leq 2^{-n}, n\uparrow\infty\right]=1$, и $\Theta>1$ – постоянная.

Тогда $P\left[\max\left|\int_0^t e_n db\right|<\theta\left(2^{-n+1}\ln n\right)^{\frac{1}{2}}, n\uparrow\infty\right]=1.$

ШАГ 4. Если дан неупреждающий броуновский функционал e, для которого $\int_0^1 e^2 dt<\infty$, то можно найти такую последовательность простых неупреждающих функционалов e_n

$(n\geq 1)$, что $\mathrm{P}[\int_0^t (e-e_n)^2 dt\leq 2^{-n}, n\uparrow\infty]=1$.

ШАГ 5. Теперь уже можно определить $\int_0^t edb\,(t\leq 1)$. Рассмотрим простые функционалы e_n $(n\geq 1)$, такие, что $\mathrm{P}[\int_0^t (e-e_n)^2 dt\leq 2^{-n}, n\uparrow\infty]=1$ (как в шаге 4). Согласно шагу 3, $\max_{t\leq 1}\left|\int_0^t (e_n-e_{n-1})db\right|$ экспоненциально быстро убывает при $n\uparrow\infty$, так что можно положить $\int_0^t edb\equiv\lim_{n\uparrow\infty}\int_0^t e_n db\,(t\leq 1)$. Оценка шага 3 показывает, что предел не зависит от способа выбора простой аппроксимирующей последовательности e_n $(n\geq 1)$. Так как сходимость равномерна, $\int_0^t edb\,(t\leq 1)$ – непрерывная функция верхнего предела. Особенно важно, что эта функция определена одновременно для всех $t\leq 1$, для почти всех броуновских траекторий. При условии $\mathrm{P}[\int_0^\infty e^2 dt<\infty]=1$ стохастический интеграл $\int_0^\infty edb$ можно определить таким образом, чтобы $\mathrm{P}[\lim_{t\uparrow\infty}\int_0^t edb=\int_0^\infty edb]=1$. Действительно, выберем простые функционалы e_n, равные тождественно 0 вблизи бесконечности, так чтобы $\int_0^t (e_n-e)^2 dt\leq 2^{-n}\,(n\geq 1)$. Можно без труда обобщить использованные выше оценки и показать, что $\max_{t\leq 1}\left|\int_0^t (e_n-e_{n-1})db\right|$ стремится к 0 при $n\uparrow\infty$ экспоненциально быстро.

Так как при $t<\infty$ $\int_0^t e_n db$ – непрерывная функция, то и функция $\int_0^t edb$ – непрерывна.

3. Простейшие свойства стохастического интеграла

Пусть e *– неупреждающий броуновский функционал, для которого* $\mathrm{P}[\int_0^\infty e^2 dt<\infty, t\geq 0]=1$.

(1) $\int_0^t (e_1+e_2)db=\int_0^t e_1 db+\int_0^t e_2 db$

(2) $\forall k = const \quad \int_0^t kedb = k\int_0^t edb$;

(3) $\int_0^t edb$ – непрерывная функция при $t < 8$;

(4) $\int_0^t edb = \int_0^\infty efdb$, где $\tau < 8$ – броуновский марковский момент, а f – (неупреждающий) индикатор события ($t = \tau$).

(5) $\mathrm{E}[(\int_0^\infty edb)^2] \le \|e\|^2 \equiv \mathrm{E}[\int_0^\infty e^2 dt]\,(\le\infty)$,

если $\mathrm{P}[\int_0^\infty e^2 dt < \infty] = 1$; если $\|e\| < \infty$,

то $\mathrm{E}[(\int_0^\infty edb)^2] = \|e\|^2$ и $\mathrm{E}[\int_0^\infty edb] = 0$.

(6) $\xi(t) = \exp[\int_0^t edb - \frac{1}{2}\int_0^t eds]$ – супермартингал и, значит, $\xi(t)$ – субмартингал относительно A_t, причем $\mathrm{E}(\xi) \le 1 \quad \mathrm{P}[\max_{t\ge 0}\int_0^t edb - \frac{\alpha}{2}\int_0^t e^2 ds > \beta] \le e^{-\alpha\beta}$.

(7) $\mathrm{P}[\max_{t\ge 0}\left|\int_0^t e_n db\right| < \theta(2^{-n+1}\ln n)^{\frac{1}{2}},\ n\uparrow\infty] = 1, \quad \forall\theta > 1$,

если $\mathrm{P}[\int_0^\infty e_n^2 dt \le 2^{-n},\ n\uparrow\infty] = 1$.

(8) $\mathrm{E}[\exp(\int_0^\infty edb) - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^2 dt] = 1$,

если $\mathrm{E}[\exp(\frac{1}{2}\int_0^\infty e^2 dt)] < \infty$.

Свойства (1), (2), (3) вытекают непосредственно из определения интеграла.

<u>Доказательство</u> свойства (4).

Равенство $\int_0^t edb = \int_0^\infty efdb$ очевидно, если e – простой функционал, равный $\equiv 0$ при достаточно больших t.

В общем случае e можно аппроксимировать простыми функционалами e_n $(n \ge 1)$ равными тождественно 0 вблизи бесконечности, и так, чтобы $\max_{t\ge 0}\left|\int_0^t (e - e_n)db\right|$ экспоненциально стремился к 0 при $n\uparrow\infty$, в то время как $\int_0^\infty e_n fdb$ будет стремиться к $\int_0^\infty efdb$, ибо $\int_0^\infty (e - e_n)^2 f^2 \le 2^{-n}$, таким образом применимы рассуждения шага 5.

<u>Доказательство</u> свойства (5).

Если e – простой функционал и $e \equiv 0$ при больших t, то, как показывает простая выкладка, $\mathrm{E}[(\int_0^\infty edb)^2] = \|e\|^2$. В общем случае можно подобрать простые e_n, равные 0 вблизи бесконечности и столь, хорошо аппроксимирующий функционал e (индикатор события $\int_0^t e^2 \le n$), чтобы

$$\mathrm{P}[\int_0^\infty (e_n - e)^2 dt \le 2^{-n},\ n\uparrow\infty] = 1 \text{ и } \lim_{n\uparrow\infty}\|e_n\| = e.$$

При таком выборе e_n

$$\mathrm{E}[(\int_0^\infty edb)^2] = \mathrm{E}[\lim_{n\uparrow\infty}(\int_0^\infty e_n db)^2] \le \lim_{n\uparrow\infty}\mathrm{E}[(\int_0^\infty e_n db)^2] =$$

$= \lim_{n\uparrow\infty}\|e_n\|^2 = \|e_n\|^2$, а если $\|e\| < \infty$, то можно к тому же добиться, чтобы $\lim_{n\uparrow\infty}\|e - e_n\| = 0$.

Тогда $\lim_{n\uparrow\infty}\mathrm{E}[(\int_0^\infty (e_n - e)db)^2] \le \lim_{n\uparrow\infty}\|e_n - e\|^2 = 0$.

<u>Доказательство</u> свойства (6).

Если e – простой функционал, тождественно равный нулю при больших t, то (6) справедливо (по шагу 2). В общем случае e можно аппроксимировать простыми функционалами e_n $(n \ge 1)$, равными тождественно 0 вблизи бесконечности, и так, чтобы $\mathrm{P}[\int_0^\infty (e_n - e)^2 dt \le 2^{-n}] = 1$, и, используя ранее доказанный факт

$$\mathrm{P}[\lim_{t\uparrow\infty}\int_0^t edb = \int_0^\infty edb] = 1,$$

воспользуемся рассуждениями шага 2 раздела 2.2.

Для простых e_n процесс $\xi(t) = \exp[\int_0^t edb - \frac{1}{2}\int_0^t eds]$ – субмартингал относительно семейства полей A_t $(t \ge 0)$, причем $E(\xi(1)) \le 1$. В самом деле, если e_n постоянен тождественно при $1 \le t$, то величина c измерима относительно A_s и, стало быть, не зависит от $b(t) - b(s)$. В результате находим

$$\mathrm{E}[\frac{\xi(t)}{A_s}] \ge \xi(s)\mathrm{E}[\exp(c(b(t) - b(s)) - c^2\frac{t-s}{2})\Big/A_s] = \xi(s).$$

Необходимая нам оценка для e_n получается, если заменить e_n на de_n и применить мартингальное равенство (1.5):

$$\mathrm{P}[\max_{t\ge 0}\int_0^t edb - \frac{\alpha}{2}\int_0^t e_n^2 ds > \beta] =$$

$$= \mathrm{P}[\max\xi(t) > e^{\alpha\beta}] \le e^{-\alpha\beta}\mathrm{E}[\xi(1)] \le e^{-\alpha\beta}.$$

Совершая предельный переход $\int_0^t edb = \lim_{n\uparrow\infty}\int_0^t e_n db$ $(t \ge 0)$ (предел не зависит от способа выбора аппроксимирующей последовательности e_n $(n \ge 1)$), получаем необходимое нам неравенство

$$\mathrm{P}[\max_{t\ge 0}\int_0^t edb - \frac{\alpha}{2}\int_0^t e_n^2 ds > \beta] \le e^{-\alpha\beta}.$$

Доказательство свойства (7).

Применим свойство (6), выберем $\alpha=(2^{n+1}\ln n)^{\frac{1}{2}},\quad \beta=\theta(2^{-n-1}\ln n)^{\frac{1}{2}}.$

Величина $e^{-\alpha\beta}=n^{-\theta}$ – общий член сходящегося ряда, так что по первой лемме Бореля-Кантелли

$$P[\max_{t\le 1}\int_0^t e_n db\le\frac{\alpha}{2}\int_0^t e_n^2 ds+\beta\le(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{2})(2^{-n+1}\ln n)^{\frac{1}{2}},\ n\uparrow\infty]=1.$$

Доказательство свойства (8).

Пусть величина $\xi(t)$ определяется таким образом: $t=\int_0^{\xi_t}e^2(s,b)ds,\quad \tilde{b}(t)=b(\xi(t)),\quad \tilde{A}_t=A_{\xi_t}$. Процесс $\tilde{b}(t)$ является винеровским. Величина $\int_0^{\xi_t}e^2(s,b)ds=\tau$ является марковским моментом. Для доказательства свойства достаточно установить, что для всякого марковского момента τ, для которого $Ee^{\frac{1}{2}\tau}<\infty$

$$E\left\{\exp[\tilde{b}(\tau)-\frac{1}{2}\tau]\right\}=1.$$

Пусть величина $\xi(t)$ – марковский момент специального вида: момент первого достижения процессом $\tilde{b}(t)$ прямой $t–a$ ($a > 0$). Легко видеть, что процесс $\xi(t)=\exp[\tilde{b}(\tau)-\frac{1}{2}\tau]$ является мартингалом. Так как τ_a совпадает с моментом первого достижения непрерывным процессом с независимыми приращениями $\tilde{b}(t)+t$ уровня a, то так как $E^{-\lambda\tau_a}=\exp[aB(\lambda)]$ (где $B(\lambda)$ – некоторая функция от λ, аналитическая при $P\varepsilon\lambda > 0$ и непрерывная при $P\varepsilon\lambda > 0$) и в силу формул (70), (71) §2 гл. 4, т. 2 «Теории случайных процессов» И. И. Гихмана и А. В. Скорохода:

где $B(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$B(\lambda)+\frac{1}{2}B(\lambda)^2=\lambda \text{ и так как } B(0) = 0,$$

$$\text{то } B(\lambda)=1-\sqrt{1+2\lambda}.$$

Таким образом $Ee^{-\lambda\tau_a}=\exp[a(1-\sqrt{1+2\lambda})]$. (*)

Хотя указанные результаты справедливы лишь при $P\varepsilon\lambda>0$, но из аналитичности правой части при $\mathrm{Re}\lambda>-\frac{1}{2}$ и непрерывности при $\mathrm{Re}\lambda>-\frac{1}{2}$ легко вывести, что формула (*) справедлива при $\mathrm{Re}\lambda>-\frac{1}{2}$. В частности $Ee^{\frac{1}{2}\tau_a}=e^a$.

Так как $\xi(t_a)=\exp[\tilde{b}(\tau_a)-\frac{1}{2}\tau_a]=e^{\frac{1}{2}\tau_a-a}$, то из последнего вытекает. что $E\xi(\tau_a)=1$. Из того, что $\xi(t)$ – мартингал, вытекает, что для любой пары марковских моментов ξ_1, ξ_2, для которых $\xi_1\le\xi_2$

$$E(\eta(\xi_1)/\tilde{A}_{\xi_1})\le 1.$$

Поэтому для всякого марковского момента $\xi=\tau_a$

$$\eta(\xi)\ge E(\xi(\tau_a)/A_\xi)$$

и $E\eta(\xi)\ge 1$, то есть $E\eta(\xi)=1$.

Очевидно, что $\tau_a\wedge\tau\le\tau_a$,

$$1=E\eta(\tau_a\wedge\tau)=E\eta(\tau_a)\chi_{\{\tau_a\le\tau\}}+E\eta(\tau)\chi_{\{\tau\le\tau_a\}}\qquad(**)$$

Но $\eta(\tau_a)\chi_{\{\tau_a\le\tau\}}=e^{-a+\frac{1}{2}\tau_a}\chi_{\{\tau_a\le\tau\}}\le e^{-a}\chi_{\{\tau_a\le\tau\}}e^{\frac{1}{2}\tau}$.

(χ_a – *индикатор* A)

Значит, $\lim_{a\to\infty}E\eta(\tau_a)\chi_{\{\tau_a\le\tau\}}=0$, так как величина, стоящая под знаком математического ожидания, имеет интегрируемую мажоранту $e^{\frac{1}{2}\tau}$ и стремится к нулю при $a\to\infty$. Учитывая, что $\chi_{\{\tau\le\tau_a\}}\uparrow 1$ при $a\uparrow\infty$, и переходя к пределу в (**), получаем, что $E\xi(\tau)=1$.

4. Вычисление одного стохастического интеграла

$$(*)\qquad \int_0^t bdb=\frac{1}{2}b(t)^2-\frac{t}{2}.$$

Определим простой неупреждающий функционал $e_n=b(2^{-n}[2^n t])$, так как $\forall t\ge 0$ при $n\uparrow 8$ $\int_0^t(e-e_n)^2dt\to 0$, остается показать, что

$$\lim_{n\uparrow\infty}\int_0^t e_n db=\frac{1}{2}(b^2-t).$$

Дополнительно заметим, что для $\Delta=b(k2^{-n})-b((k-1)2^{-n}),\quad \ell=[2^n t]$ и $n\uparrow\infty$

$$2\int_0^t e_n db=2[\sum_{k\le\ell}b((k-1)2^{-n})\Delta]+2b(\ell 2^{-n})[b(t)-b(\ell 2^{-n})]=$$

$$=\sum_{k\le\ell}^{0}[b(k2^{-n})^2-b((k-1)2^{-n})^2]-$$

$$-\sum_{k\le\ell}\Delta^2+o(1)=b(t)^2-\sum_{k\le\ell}\Delta^2+o(1).$$

Следующая лемма устанавливает более сильный результат.

ЛЕММА.

Пусть $\xi_n(t)=\sum_{k\le\ell}\Delta^2+[b(t)-b(\ell 2^{-n})]^2-t$

для $\ell=[2^n t]$ и $t = 1$.

Тогда $P[\max_{t\ge 0}|\xi_n(t)| < 2^{-\frac{n}{2}} n, n\uparrow\infty] = 1.$

<u>Задача 1</u>. Броуновский дифференциал под знаком стохастического интеграла всегда должен быть «направлен в будущее». «Направленный в прошлое интеграл»

$$\int_0^t bdb \equiv \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{k\le 2^n}^{0} b(k2^{-n})[b(k2^{-n}) - b((k-1)2^{-n})]$$

имеет значение $\frac{1}{2}[b(1)^2+1]$, а совсем не $\frac{1}{2}[b(1)^2-1]$.

Доказать это, то есть доказать равенство $\int_0^1 bdb = \frac{1}{2}[b(1)^2+1].$

<u>Доказательство</u>: Как при вычислении интеграла (*) определим простой неупреждающий функционал $e_n = b(2^{-n}[2^n t])$. Так как $\forall t\ge 0$ при $n\uparrow\infty$ $\int_0^t (e-e_n)^2 dt \to 0$ остается показать, что:

Заметим, что для

$$\Delta = b(k2^{-n}) - b((k-1)2^{-n}) \quad \lim_{n\uparrow\infty}\int_0^1 e_n db = \frac{1}{2}(b^2+1)$$

и при $\ell = 2^n, n\uparrow\infty$ $\quad 2\lim_{n\uparrow\infty}\int_0^1 e_n db = 2\int_0^1 bdb =$

$$= 2\lim_{n\uparrow\infty}\sum_{k\le 2^n} b((k-1)2^{-n})\Delta + 2\lim_{n\uparrow\infty} b(\ell 2^{-n})[b(t)+b(\ell 2^{-n})] =$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty}\sum_{k\le 2^n}\{b((k-1)2^{-n})\Delta + \Delta^2 + o(\Delta^2)\} = b(t)^2 + \sum_{k\le 2^n}\Delta^2 + o(\Delta^2).$$

Воспользуемся леммой, покажем, что $\xi_n(t) = \sum_{k\le 2^n}\Delta^2 + [b(t) - b(\ell 2^{-n})]^2 - t$ если $\ell = [2^n t]$ и $t\le 1$ непрерывный мартингал относительно броуновских полей B_t. Тогда ξ_n^2 – непрерывный субмартингал. Неравенство (1.5) приводит к оценке

$$P[\max_{t\le 1}|\xi_n(t)| > 2^{-\frac{n}{2}}\cdot n] \le 2^n\cdot n^{-2} E[\xi_n(1)^2] =$$

$$= 2^{2n}\cdot n^{-2} E[b(2^{-n})^2 - 2^{-n}]^2 = const\cdot n^{-2}$$

где на первом шаге было использовано свойство автомодельности броуновского движения $b(2^{-n}) \to 2^{-\frac{n}{2}} b(1)$.

Но n^{-2} – общий член сходящегося ряда, и, применив первую лемму Бореля-Кантелли имеем необходимый результат при t = 1, то есть

$$\int_0^1 bdb = \frac{1}{2}[b(1)^2+1].$$

5. Стохастические дифференциалы и лемма Ито

В дальнейшем под стохастическим интегралом будем понимать более общее выражение $\xi(t) + \xi(0) + \int_0^t edb + \int_0^t fds \quad (t\ge 0)$, включающее:

а) величину $\xi(0)$, не зависящую от основного броуновского поля B_∞;

б) неупреждающий броуновский функционал f, для которого $P[\int_0^t |f| ds < \infty, t\ge 0] = 1.$

Стохастический дифференциал $d\xi = edb + fdt$ – это просто более компактная запись того же самого выражения.

Стохастический интеграл сам является неупреждающим броуновским функционалом, так что класс стохастических интегралов замкнут относительно обычного интегрирования $\xi \to \int_0^t \xi ds$ и относительно интегрирования по Ито $\xi \to \int_0^t \xi db$. Этот класс замкнут также относительно сложения и умножения на константы.

Лемма Ито устанавливает, что он замкнут и относительно применения широкого класса гладких функций.

<u>ЛЕММА ИТО</u>. Рассмотрим функцию $u = u[t; x_1,..., x_n]$, определенную на $[0, \infty]\mathrm{x}R^n$ с непрерывными частными производными

$$u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}, u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}.(i\le n), u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\cdot\partial x_j}.(i,j\le n)$$

Возьмем n стохастических интегралов

$$\xi_i(t) = \xi_i(0) + \int_0^t e_i db + \int_0^t f_i ds \quad (i\le n)$$

Тогда композиция $\xi(t) = u[t; \xi_1(t),..., \xi_n(t)]$ тоже стохастический интеграл, дифференциал которого равен

$$d\chi = u_0 dt + \sum_{i\le n} u_i d\chi_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j\le n} u_{ij} d\chi_i d\chi_j$$

Произведения $d\chi_i, d\chi_j \quad (i,j\le n)$ вычисляются на основе приведенной ниже «таблицы умножения», т.е. $d\chi_i d\chi_j = e_i e_j dt \qquad (i,j\le n)$

	db	dt
db	dt	0
dt	0	0

6. Решение простейшего стохастического дифференциального уравнения

Пусть **e** *– неупреждающий броуновский функционал, такой, что*

$$P\left[\int_0^t e^2 \mathrm{ds} < \infty, \mathrm{t} \ge 0\right] = 1$$

Экспонециальный супермартингал

$$\chi(t) = \exp\left[\int_0^t e\mathrm{db} - \frac{1}{2}\int_0^t e^2 \mathrm{ds}\right]$$

является решением стохастического дифференциального уравнения $\mathrm{d}\chi = \chi_e \mathrm{db}$ при начальном условии $\chi(0) = 1$, действительно,

$$\mathrm{d}\chi = \chi\left(\mathrm{edb} - \frac{1}{2}e^2\mathrm{dt}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\chi\left(e\mathrm{db} - \frac{1}{2}e^2\mathrm{dt}\right)^2 = \chi\left(e\mathrm{db} - \frac{1}{2}e^2\mathrm{dt}\right) + \frac{1}{2}\chi e^2\mathrm{dt} = \chi e\mathrm{db}.$$

Если ϑ – второе решение того уравнения, то лемма Ито позволяет заключить, что

$$\mathrm{d}\left(\frac{\vartheta}{\chi}\right) = \chi^{-2}[\vartheta\mathrm{d}\chi - \chi\mathrm{d}\vartheta] + \chi^{-3}\vartheta(\mathrm{d}\chi)^2 - \chi^2\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\chi = 0$$

Итак, χ – единственное решение, для которого $\chi(0)=1$

<u>Вывод</u>: в теории Ито супермартингал χ дублирует обычную экспоненту

$$\exp\left[\int_0^t e\mathrm{db}\right].$$

Получим для χ второе выражение в виде ряда $\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n$, где $\chi_0 = 1$,

$$\chi_n = \int_0^t \chi_{n-1} edb = \int_0^t e(t_1)db(t_1)\int_0^{t1} e(t_2)db(t_2)\ldots\int_0^{tn-1} e(t_n)db(t_n)$$

$$(\mathrm{n} \le 1)$$

Далее для решения одной задачи нам необходимы полиномы Эрмита:

$$\mathrm{H}_n[t,x] = \frac{(-t)^n}{n!}\exp\left(\frac{x^2}{2t}\right)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \quad (n \ge 0)$$

и заметим, что из ряда Тейлора для $\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$ следует соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \mathrm{H}_n = \exp\left(\gamma x - \gamma^2 \frac{t}{2}\right)$$

Используя эту формулу, разложим в ряд решение

$\chi = \exp[\gamma^t]e\mathrm{db} - \gamma^2 L\left(\frac{t}{2}\right)J$ уравнения

$\mathrm{d}\chi = \chi\gamma.e\mathrm{db}$ (где $L(t) = \int_0^t e^2\mathrm{db}$ – внутреннее время) и сравним его с другим рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n\chi_n$ также задающим решением.

Имеем

$$\chi(t) = \exp\left[\gamma\int_0^t e\mathrm{db} - \frac{1}{2}\gamma^2 L(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n \mathrm{H}_n\left[L(t)\int_0^t e\mathrm{db}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\chi_n\gamma^n.$$

Тем самым доказан частный случай формулы Ито и Винера

$$\chi_m(t) = \int_0^t e(t_1)\mathrm{db}(\mathrm{t}_1)\int_0^{t1} e(t_2)\mathrm{db}(\mathrm{t}_2)\ldots$$

$$\ldots\int_0^{t_{n-1}} e(t_n)\mathrm{db}(\mathrm{t}_n) = \mathrm{H}_n\left[L(t), \int_0^t e\mathrm{db}\right];$$

при e=1,отсюда следует равенство

$$\int_0^t \mathrm{db}(\mathrm{t}_1)\int_0^{t1}\mathrm{db}(\mathrm{t}_2)\ldots\int_0^{tn-1}\mathrm{db}(t_n) = \mathrm{H}_n[t, b(t)], (n \ge 1).$$

Итак, полиномы Эрмита служат в теории Ито аналогами обычных степеней

$$\frac{b(t)^n}{n!} \quad (n \ge 1)$$

В задачах, предлагаемых Г. Маккиным в этой части книги, обсуждается общая формула Ито-Винера, в этих задачах e – неупреждающий функционал, для которого

$$\mathrm{P}\left[\int_0^{\infty} e^2\mathrm{dt} < \infty\right] = 1$$

<u>Задача 1</u>. Доказать, что

$$(*) \quad (n+1)\mathrm{H}_{n+1^{n+1}} + t\mathrm{H}_{n-1} = xH_n \quad (n \ge 1)$$

<u>Решение</u>: Воспользуемся производящей функцией

$$\exp\left[\gamma x - \gamma^2 \frac{t}{2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma^n H_n \qquad (H_0 = 1).$$

Умножим равенство $(*)$ на γ^n и просуммируем по n=1, 2, …

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\gamma^n H_{n+!} = x\sum_{n=1}^{\infty}\gamma^n H_n - t\sum_{n=1}^{\infty}\gamma^n H_{n-1}$$

(ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma^n H_n$ сходится, если $\{Hj\}$ ограничена по крайне мере для $|j|<1$, это показывает сравнение с геометрической прогрессией), почленно проинтегрируем обе части равенства :

$$\int_0^{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)s^n H_{n+1}\mathrm{ds} =$$

$$= \int_0^{\gamma}\left[\mathrm{x}\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}s^n H_n - t\sum_{n=1}^{\infty}s\cdot s^{n-1}H_{n-1}\right]\mathrm{ds}$$

вычислим левую часть равенства :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\gamma}(n+1)H_{n+1}\mathrm{ds} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathrm{n}+1)H_{n+1}\int_0^{\gamma}s^n\mathrm{ds} =$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\mathrm{n}+1)H_{n+1}\frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\gamma^{n+1}H_{n+1} = \exp\left[\gamma x - \gamma^2\frac{t}{2}\right]$$

вычислим правую часть последнего равенства:

$$\int_0^{\gamma}\left[x\sum_{n=1}^{\infty}s^n H_n - ts\sum_{n=1}^{\infty}s^{n-1}H_{n-1}\right]\mathrm{ds} =$$

$$= \int_0^{\infty}\left[x\exp\left[sx - \frac{s^2t}{2}\right] - ts\exp\left[sx - \frac{s^2t}{2}\right]\right]\mathrm{ds} =$$

$$= \int_0^{\gamma}(x-ts)\exp\left(sx - \frac{s^2t}{2}\right)\mathrm{ds} = \exp\left[\gamma x - \frac{s^2t}{2}\right]$$

Имеем равенство обеих частей, ч.т.д.

7. Стохастические интегралы и дифференциалы для многомерного броуновского движения

Определение интеграла Ито легко распространяется на ℓ-мерное броуновское движение $b(t) = [b_1(t),\dots b_d(t)]$ $\quad (t \ge 0)$ введенное ранее.

Неупреждающий функционал $e: t \to R^n$ определяется, как и раньше, и автоматически является неупреждающим функционалом для каждой компоненты, скажем b_1, так, что если

$$n=1 \text{ и } P\left[\int_0^t e^2\mathrm{ds} < \infty, \mathrm{t} \ge 0\right] = 1$$

интеграл $\int_0^t e\mathrm{db}_1$ можно ввести в точности, как в разделе *2.*

Более сложные интегралы можно сконструировать из отдельных деталей.

Рассмотрим примеры для d=3, поясняющего эту идею:

$$e: t \to R^3, \int_0^t \left|\cdot t\right|^2\mathrm{ds} = \int_0^t\left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\right)\mathrm{ds} < \infty, \quad (1)$$

$$\int_0^t e\mathrm{db} = \int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{e}_1\mathrm{db}_1 + \int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{e}_2\mathrm{db}_2 + \int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{e}_3\mathrm{db}_3.$$

$$e: \quad t \to R^3 \otimes R^3, \int_0^t |e|^2\mathrm{ds} < \infty \qquad (2)$$

($R^n \otimes R^m$ – есть класс линейных операторов из $R^m \beta R^n$, если $e \in R^n \otimes R^m$, то $|e|$ всегда означает норму этого оператора; при n=1 $R^n \otimes R^m$ можно отождествить с самим R^m и $|e|$ совпадает с обычной нормой $|e| = \left(e_1^2 + e_2^2 + \dots\right)\frac{1}{2}$).

Лемма Ито легко обобщается.

Вычисление дифференциалов проводится, как раньше, в терминах произведения вида $(\mathrm{dt})^2, \mathrm{dtdb_i}$, где $(i \le d)$, $\mathrm{db_i db_j}$, где $(i, j \le d)$, а они принимают значения «0»или «dt»в соответствии со следующей таблицей умножения:

L	x	db_1	db_2	dt	
	db_1	dt	0	0	
	db_2	0	dt	0	
	…	…	…	…	
	dt	0	0	0	

<u>Доказательство </u>леммы Ито:

Рассуждения те же, что и в 5. Их нужно лишь дополнить обоснованием правила перекрестного умножения броуновских дифференциалов ($db_1 db_2 = 0$ и т.п.), что сводит к доказательству такого факта: если е – ограниченный неупреждающий функционал для двумерного броуновсого движения $b = (b_1, b_2)$, то максимум модуля мартингала

$$\chi_e = \sum_{k \le \ell} e\left((k-1)2^{-n}\right)\left[b_1\left(k2^{-4}\right) - \right.$$

$$\left. - b_1\left((k-1)2^{-4}\right)\right]\left[b_2\left(k2^{-4}\right) - b_2\left((k-1)2^{-4}\right)\right], \left(e \le 2^{-n}\right),$$

допускает при $n \uparrow \infty$ оценку $2^{\frac{-n}{2}} \cdot n$, т.е.

$$P\left[\max_{\ell \le 2^{-n}} \left|\chi_e\right| < 2^{\frac{-n}{2}} \cdot n, n \uparrow \infty = 1\right].$$

Но это, как и раньше, выводится из мартингального неравенства.

$$P\left[\max_{k \le n} \left|\chi_e\right| \ge \ell\right] \le \ell^{-1} E\left({\chi_n}^+\right) (\ell > 0).$$

Отсюда вытекает следствие: если $b_i(t)$ обладает стохастическими дифференциалами

$$\mathrm{db_i} \text{ и } b(t) = \left(b_1(t), \ldots b_d(t)\right),$$

то существуют дифференциалы

$$\mathrm{db_i} \quad \mathrm{d}(\mathrm{b_1} + \mathrm{b_2}), \mathrm{d}(\mathrm{b_1}, \mathrm{b_2}), \mathrm{de}^{(\mathrm{b_1}, \mathrm{b_2})}, \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{b_1}}{\mathrm{b_2}}\right);$$

$\mathrm{d}\dfrac{b_1}{b_2}$ применимо при условии $b_2(t) \ge \delta > 0$.

К. Ито использовал свой интеграл для построения диффузии, связанной с эллиптическим дифференциальным оператором G на гладком многообразии M. При $\mathrm{M} = R^1$ и

$$Gu = \left(\frac{e^2}{2}\right)u'' + fu',$$

где $e(\ne 0)$ и f принадлежит пространству $C^1\left(R^1\right)$, соответствующая диффузия является неупреждающим решением φ интегрального уравнения

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t e(\gamma)\mathrm{db} + \int \mathrm{f}(\gamma)\mathrm{ds} \qquad t \ge 0$$

Ещё ранее попытка в этом направлении была сделана Бернштейном. Гихман завершил программу Бернштейна независимо от Ито.

После введения понятий стохастического интеграла и стохастического дифференциала дифференциальному уравнению

$$\mathrm{dx} = \mathrm{e}(\mathrm{x})\mathrm{db} + \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dt},$$

которое можно принять за исходный пункт при определении диффузионного процесса, придается строгий смысл, приводится решение этого уравнения для случая коэффициентов ограниченного наклона и для общих коэффициентов класса $C^1\left(R^1\right)$, также рассматривается метод Ламперти для решения уравнения от функции $f \in C^1 R^1$ ограниченного наклона, более простой, чем метод Ито, т.к. не опирается ни на мартингальное неравенство, ни на лемму Бореля-Кантелли, но метод Ламперти не применим в высших размерностях.

Список использованной литературы:
1. Г. Маккин. Стохастические интегралы. М. – Изд. «Мир», 1972 г.
2. К. Ито, Г. Маккин.Диффузионные процессы и их траектории. – Изд. «Мир», 1968 г.
3. И.И. Гихман, А.В. Скороход. Теория случайных процессов, тт. I, II, III. М. – Изд. «Наука». 1975 г.
4. М. Лоэв. Теория вероятностей. – Москва. 1962 г.
5. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и её приложения. тт. I, II. – Изд. «Мир». М. 1967 г.
6. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. – М. 1954 г.